Astrofísica Estelar
Resolução de exercícios da Lista 1 feita em aula

Profª:Jane Gregorio-Heten
Monitor: Rafael R. de Campos

5-) Qual é a separação Zeeman para uma linha de espectro com 5000 Å, em um campo magnético 3000 G (que é valor típico de uma mancha solar)?

Lembrando que:

$$\Delta\nu = c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

$$\Delta\nu = c\left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda\lambda_0}\right) = -c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda\lambda_0}\right) \tag{1}$$

Lembrando que $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, se $\Delta\lambda \to 0$, temos:

$$\Delta\nu = -c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2(1+\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0})}\right) \to -c\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right) = \Delta\nu \tag{2}$$

Tomando a relação para a separação Zeeman:

$$\Delta\nu = \frac{eB}{4\pi m_e},$$

assim sendo:

$$\Delta\lambda = -\lambda_0^2\frac{eB}{4\pi m_e c} \approx -0.35\,\text{Å} \tag{3}$$

8-)(Prova estrangeira questão 5) (Aula: 8a) Considere um sistema binário cujas estrelas têm temperaturas de 5500K e 4800 K. Qual seria a razão das intensidades das linhas de um íon de Fe II, cujo potencial de excitação é de 3.0 eV, das duas estrelas (a intensidade da linha da mais quente dividida pela intensidade da estrela mais fria)? Considere o potencial de ionização do FeI 7.9 eV. Considere também que a pressão eletrônica e a abundância de FeI em ambas as estrelas são aproximadamente iguais. (Lembre-se que queremos calcular a excitação de Fe II, que por sua vez surge da ionização de Fe I).

Primeiramente vamos tomar a equação de Saha para que possamos ver as razões das abundâncias de FeII entre as duas estrelas, aqui denominadas A (estrela quente) e B (estrela fria).

$$\underbrace{\frac{\frac{N_{FeII_A}}{N_{FeI_A}}}{\frac{N_{FeII_B}}{N_{FeI_B}}}}_{N_{FeI_A}=N_{FeI_B}} = \frac{N_{FeII_A}}{N_{FeII_B}} = \left(\frac{2Z_{FeII}K_BT_1}{Z_{FeI}P_e}\left(\frac{2\pi m_eK_BT_1}{h^2}\right)^{3/2}e^{-\Delta E/(K_BT_1)}\right) \times \left(\frac{2Z_{FeII}K_BT_2}{P_eZ_{FeI}}\left(\frac{2\pi m_eK_BT_1}{h^2}\right)^{3/2}e^{-\Delta E/(K_BT_2)}\right)^{-1}$$

$$\frac{N_{FeII_A}}{N_{FeII_B}} = \underbrace{\frac{T_1^{5/2}e^{-\Delta E/(K_BT_1)}}{T_2^{5/2}e^{-\Delta E/(K_BT_2)}}}_{=\alpha} = \alpha \tag{4}$$

Quanto as razões de abundâncias de FeII excitado ($FeII^*$), temos:

$$\frac{\frac{N_{FeII^*_A}}{N_{FeII_A}}}{\frac{N_{FeII^*_B}}{N_{FeII_B}}} = \left(\frac{g_*}{g_0}e^{-\Delta E/K_BT_1}\right) \times \left(\frac{g_*}{g_0}e^{-\Delta E/K_BT_2}\right)^{-1} \tag{5}$$

Usando a eq. (4) para escrevermos N_{FeII_B} em função de N_{FeII_A}, e a substituindo na eq. (5), temos:

$$\frac{N_{FeII^*_A}}{N_{FeII^*_B}} = \frac{e^{-\Delta E/K_BT_1}}{e^{-\Delta E/K_BT_2}} \times \alpha \tag{6}$$

Aplicando os valores dados pelo problema, temos que:

$$\alpha = \frac{5500^{3/2}e^{7,9\mathrm{eV}/(5500K_B)}}{4800^{3/2}e^{7,9\mathrm{eV}/(4800K_B)}} \approx 16,0$$

$$\frac{N_{FeII^*_A}}{N_{FeII^*_B}} = \frac{e^{-\Delta E/K_BT_1}}{e^{-\Delta E/K_BT_2}} \times \alpha \approx 2,52 \times 16,0 \approx 40 \tag{7}$$

Vemos assim que a linha de FeII excitado é 40 vezes mais intensa na estrela quente do que na fria.

9-) A função de distribuição de velocidades de um grupo N de partículas é dada por $dN_v = avdv$ onde dN_v é um número de partículas que tem velocidades entre v e $v+dv$ e a é uma constante. Vamos considerar que nenhuma partícula se move com velocidade maior que V, sendo que as velocidades podem variar de 0 a V. Sabendo disso:

a-) Esboce o gráfico de dN_v/dv em função de v.

O gráfico é uma reta com o coeficiente angular a, e raiz na origem.

b-) Calcule o valor da constante a em termos de N e V.

Temos que:

$$\begin{aligned} dN_v &= avdv \\ N_v &= \int_0^V avdv = \frac{aV^2}{2} \\ a &= \frac{2N_v}{V^2} \end{aligned} \tag{8}$$

c-) Calcule a velocidade média, a velocidade quadrática média e a velocidade mais provável, em função de V.

Para a velocidade média:

$$\int vdN = \int_0^V v \times avdv$$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\frac{aV^3}{3} = \frac{2}{3}V$$

Para a velocidade quadrática média:

$$\int v^2dN = \int_0^V v^2 \times avdv$$

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{1}{N}a\frac{1}{4}V^4 = \frac{1}{2}V^2 \\ v_{rms} &= \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} V \end{aligned}$$

A velocidade mais provável é obtida derivando-se a função de distribuição e encontrando o seu máximo no intervalo de 0 a V. Não há máximo global, mas sim um máximo local, que é justamente em $v = V$.

d-) Qual porcentagem das partículas com velocidades entre a velocidade média e V? E entre a velocidade quadrática média e V?

Para calcularmos basta que integremos dN_v no intervalo pedido:

$$\begin{aligned} N'_v &= \int_{\langle v \rangle}^V avdv = \left[\frac{av^2}{2}\right]_{\langle v \rangle}^V \approx N_v \times 0,56 \\ \frac{N'_v}{N_v} &\approx 0,56 \end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio, temos para a fração de partículas entre v_{rms} e V:

$$N_v' = \int_{v_{rms}}^{V} avdv = \left[\frac{av^2}{2}\right]_{v_{rms}}^{V} = N_v \times 0,50$$

$$\frac{N_v'}{N_v} = 0,50$$