Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2011

Parte 1 — 28/09/2010

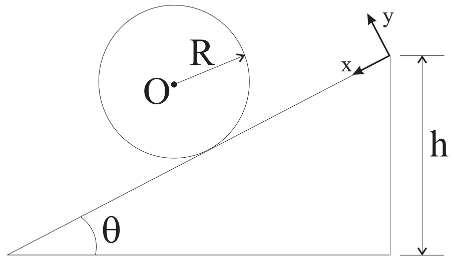
Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q1. Considere um corpo de massa M de seção transversal circular de raio R que rola sem deslizamento sobre um plano que possui um ângulo de inclinação θ em relação à horizontal, conforme mostra a figura abaixo. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e o plano é μ_e. O momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando pelo ponto O é I e a aceleração da gravidade é g.



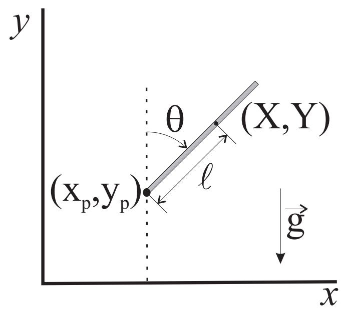
(a) Desenhe o diagrama de forças para o corpo. Escreva a equação que relaciona a velocidade angular, $\dot{\varphi}$, de rolamento do corpo e a velocidade de translação, $\dot{x}$, que caracteriza um rolamento sem deslizamento.

(b) Determine a aceleração $\ddot{x}$, associada à translação do corpo ao longo do plano inclinado, em termos dos parâmetros que constam no enunciado.

(c) Assuma que o corpo inicia o seu movimento a partir do repouso na origem do sistema de coordenadas cartesianas indicado na figura. Calcule a energia mecânica no início e no final do movimento. A energia mecânica do sistema é conservada?

(d) Calcule o momento de inércia I considerando que o corpo seja (i) um anel e (ii) um disco. Assuma que as massas dos corpos estão uniformemente distribuídas. Suponha agora que o ângulo θ possa ser variado. A partir de qual θ cessa o movimento de rolamento puro e o corpo começa a deslizar, nos casos (i) e (ii) acima? Deixe a resposta em termos de μ_e.

Q2. Considere o pêndulo invertido da figura abaixo, composto por uma barra de massa M e momento de inércia I_0 em relação ao seu centro de massa, cujas coordenadas são (X,Y). A barra pode girar livremente no plano xy em torno de um eixo de rotação que passa pela posição (x_p,y_p), a uma distância ℓ do centro de massa. A aceleração da gravidade é g.



(a) Escreva as equações para a energia cinética e potencial do sistema em termos de X, Y e θ.

Para os itens (b), (c) e (d) assuma que um agente externo faz o eixo de rotação oscilar horizontalmente com frequência angular ω, ou seja, tem-se $y_p(t) = 0$ e $x_p(t) = A\cos(\omega t)$.

(b) Escreva a lagrangiana do sistema em termos da coordenada generalizada θ.

(c) Escreva a equação de movimento para a lagrangiana do item (b).

(d) Considere que o sistema executa pequenas oscilações (θ pequeno). Mostre que neste caso, $\theta(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\,\mathrm{sen}(\omega t)$ é uma solução para o problema. Determine α e β.

Q3. Para os itens (a), (b) e (c), admita que no modelo de Bohr para uma partícula de massa m se movendo numa órbita circular de raio r e velocidade v, a força Coulombiana fosse substituída por uma força central atrativa de intensidade $k\,r$ (sendo k uma constante). Admita que os postulados de Bohr sejam válidos para este sistema. Para esta situação:

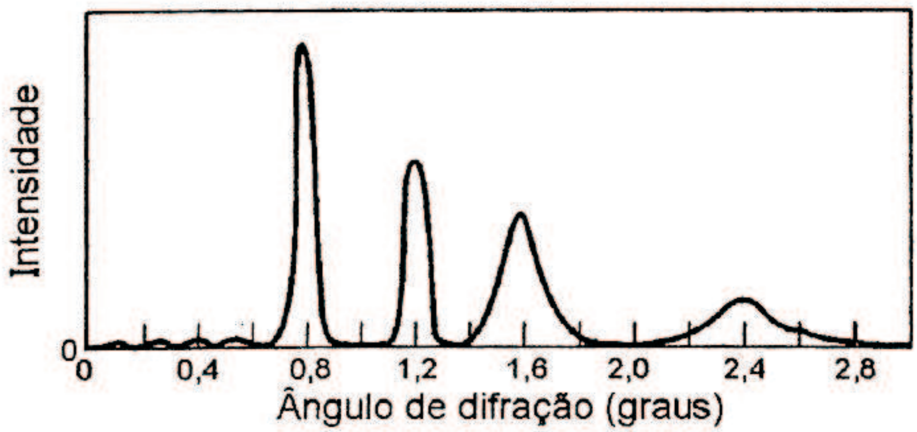
(a) Deduza a expressão para os raios r_n das órbitas de Bohr permitidas neste modelo em função do número quântico n e das constantes k, $\hbar$ e m. Diga quais os valores possíveis de n neste caso.

(b) Lembrando que para o caso desta força central, a energia potencial correspondente é $V(r) = kr^2/2$, deduza a expressão para as energias E_n das órbitas permitidas em função do número quântico n e das constantes k, $\hbar$ e m. Determine a frequência irradiada quando a partícula faz uma transição de uma órbita para outra adjacente.

(c) Calcule o comprimento de onda de de Broglie associado à partícula em um estado de energia correspondente ao número quântico $n = 2$ em função de k, $\hbar$ e m.

Para o item (d), considere um feixe de raios X, contendo radiação de dois comprimentos de onda distintos, difratados por um cristal cuja distância entre planos de difração é 1 nm (10^{-9} m). A figura abaixo apresenta o espectro de intensidade na região de pequenos ângulos (medidos em relação à direção do feixe incidente).

(d) Determine os comprimentos de onda dos raios X presentes no feixe. Utilize $\pi = 3$.



Q4. Numa experiência de efeito fotoelétrico, luz de comprimento de onda 414 nm e intensidade I_0 incide sobre uma superfície limpa de um metal cuja função trabalho é $\phi = 2{,}5$ eV.

(a) Calcule a energia cinética máxima dos fotoelétrons.

(b) Se a intensidade de luz incidente for duplicada, o que ocorre com a energia cinética dos fotoelétrons?

Considere agora a experiência de espalhamento Compton em que um elétron de massa m_0 em repouso espalha um fóton de comprimento de onda $\lambda = 2\lambda_c \equiv 2h/(m_0 c)$. Após o espalhamento, o fóton perde metade de sua energia.

(c) Calcule o comprimento de onda do fóton espalhado (expresse seu resultado apenas em função de λ_c) e determine o seu ângulo de espalhamento.

(d) Calcule a energia total e o momento linear do elétron após a colisão (expresse seu resultado em função de m_0 e c).

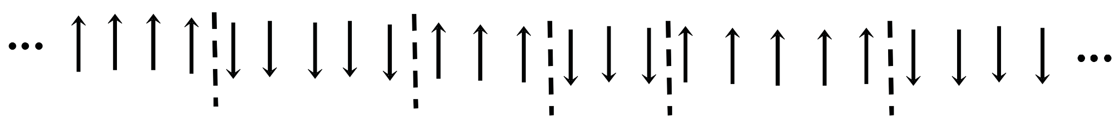
Q5. Imagine que um material magnético unidimensional possa ser modelado como uma cadeia linear de $N + 1$ spins. Cada spin interage com os seus primeiros vizinhos de tal maneira que a energia do sistema seja $E = n\epsilon$, onde n é o número de paredes de domínio separando regiões de spin $\uparrow$ das regiões de spin $\downarrow$, como representado na figura abaixo, sendo as paredes de domínio indicadas por linhas tracejadas. A energia por parede de domínio é ϵ. Considere $N \gg 1$ e $n \gg 1$.

(a) Determine de quantas maneiras as n paredes de domínio podem ser arranjadas.

(b) Determine a entropia $S(E)$ do sistema contendo n paredes de domínio.

(c) Determine a energia interna E como função da temperatura, $E(T)$. Expresse seu resultado em termos de N, ϵ, T e constantes físicas apenas.

(d) Esboçe a função $E(T)$, indicando os valores de E para $T = 0$ e $T \to \infty$.



Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2011

Parte 2 — 29/09/2010

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Coloca-se uma esfera metálica descarregada, de raio R, numa região do espaço inicialmente preenchida por um campo elétrico dado por $\vec{E}_i = E_0\ \hat{k}$. Escolha a origem do sistema de coordenadas no centro da esfera.

(a) Esboce as linhas do campo elétrico em toda a região do espaço. Justifique o esboço utilizando argumentos físicos.

(b) Determine o campo elétrico $\vec{E}_f(\vec{r})$ em toda a região do espaço. Em particular, encontre os campos para os pontos em que $|\vec{r}| \gg R$ e $|\vec{r}| \approx R$ e verifique se eles são consistentes com o esboço no item (a).

(c) Ache a densidade de carga na esfera. Se a esfera possuir raio igual a 10 cm e $E_0 = 100$ N/C, calcule as cargas acumuladas nos hemisférios norte e sul da esfera.

(d) Suponha que a esfera metálica seja substituída por uma esfera dielétrica. Discuta **qualitativamente** o que ocorre neste caso e esboce as linhas do campo elétrico em toda a região do espaço.

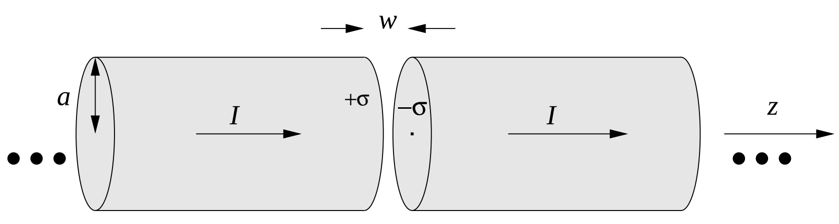
Q7. Considere o arranjo hipotético ilustrado na figura abaixo, em que um fio sólido de raio a estendido ao longo do eixo z conduz uma corrente elétrica I, uniformemente distribuída sobre a sua seção transversal, que é mantida constante. A pequena lacuna no fio, de largura $w \ll a$, forma um capacitor de placas paralelas. A carga no capacitor é zero no instante $t = 0$.

(a) Encontre o vetor campo elétrico na lacuna em função da distância ρ a partir do eixo z e do tempo t, além dos parâmetros I,w e a. Despreze os efeitos de borda.

(b) Encontre o vetor campo magnético na lacuna em função de ρ e t e dos parâmetros I,w e a.

(c) Calcule a densidade de energia eletromagnética u_{em} e o vetor de Poynting na lacuna, indicando explicitamente a sua direção e o seu sentido.

(d) Determine a energia total U_{em} na lacuna em função do tempo. Compare a taxa de variação de U_{em} com o tempo e o fluxo de energia por unidade de tempo (fluxo de potência), obtido fazendo-se a integral de superfície do vetor de Poynting.



Q8. Considere uma partícula de massa m na presença de um potencial harmônico $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, onde ω é a frequência angular do oscilador e x é a coordenada da partícula (1-dim).

(a) São dadas as funções de onda estacionárias correspondentes ao estado fundamental ψ_0 e ao primeiro estado excitado ψ_1:

$$\psi_0(x) = A \ \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \ , \qquad \psi_1(x) = B \ x \ \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \ ,$$

onde A e B são constantes de normalização. Calcule A e B supondo que as funções de onda sejam reais.

(b) Seja E_0 a energia do estado fundamental. Sabemos que $E_1 = E_0 + \hbar\omega$ para o primeiro estado excitado, já que o quantum de energia do oscilador é $\hbar\omega$. Usando a equação de Schrödinger, encontre a energia E_0.

(c) Para os estados estacionários, o valor médio da posição $\langle x \rangle$ é sempre nulo. Construa uma função de onda não estacionária como combinação linear de ψ_0 e ψ_1 com coeficientes reais, tal que o valor médio $\langle x \rangle$ seja o maior possível. Em outras palavras, considere o estado normalizado

$$\psi(x) = \sqrt{1-\beta^2} \ \psi_0(x) + \beta \ \psi_1(x) \ ,$$

com $0 \leq \beta^2 \leq 1$ e determine o coeficiente β que maximiza o valor de $\langle x \rangle$.

(d) Suponha que a função de onda construída no item anterior descreva o estado do oscilador harmônico no tempo $t = 0$. Escreva a função de onda do estado para um tempo $t > 0$ arbitrário, supondo que nenhuma medição foi feita sobre o sistema. Para esse estado, avalie o valor médio da posição $\langle x \rangle(t)$ em função do tempo.

Q9. Seja uma partícula com momento angular $l = 1$.

(a) Na representação onde as matrizes de $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L_z}$ são diagonais, obtenha a matriz da componente $\mathbf{L_x}$. Lembre que a matriz de $\mathbf{L_x}$ deve representar um operador hermitiano. Sugerimos usar os operadores escada $\mathbf{L}_\pm$.

(b) Calcule os autovalores de $\mathbf{L_x}$.

(c) Encontre o autovetor de $\mathbf{L_x}$ com o maior autovalor.

(d) Suponha agora que você encontrou o maior autovalor numa medição de $\mathbf{L_x}$. Calcule as probabilidades de medir respectivamente $+\hbar$, 0 e $-\hbar$ numa medição posterior de $\mathbf{L_z}$.

Q10. Um mol de um gás ideal monoatômico se encontra na temperatura T e ocupa um volume V. A energia interna por mol de um gás ideal é dada por $u = c_V T$, onde c_V é o calor específico molar, que é considerado constante. Responda as questões abaixo:

(a) Considere a situação em que o gás se encontra em contato com um reservatório térmico na temperatura T e sofre uma expansão quase-estática reversível na qual o seu volume passa de V para $2V$. Calcule o trabalho realizado pelo gás durante a sua expansão.

(b) Ainda com relação ao processo físico descrito no item (a), determine o calor trocado pelo gás com o reservatório térmico.

(c) Determine as variações de entropia do gás e do reservatório térmico no processo descrito no item (a).

(d) Considere agora a situação em que o gás está isolado e sofre uma expansão livre na qual o seu volume passa de V para $2V$. Determine as variações de entropia do gás e do universo durante o processo de expansão livre.