Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2012

Parte 1 – 04/10/2011

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

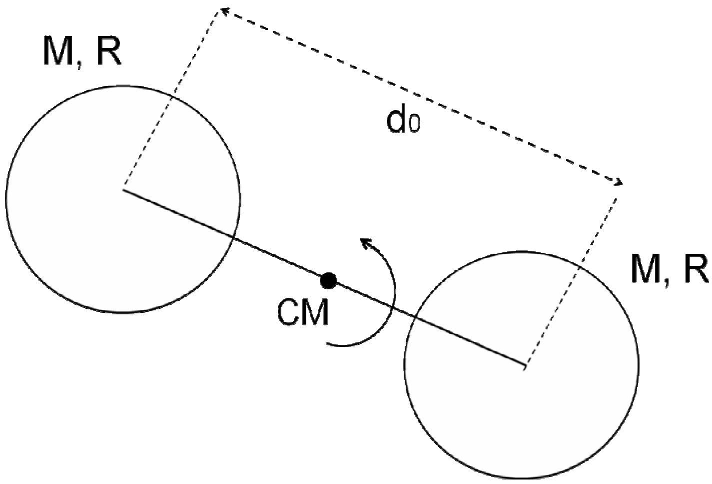
Q1. Duas esferas ocas, ambas de massa M e raio R, que estão girando em torno do centro de massa (CM) do sistema com um período inicial T_0, são mantidas distantes $d_0 = 8R$ uma da outra por um fio ideal que passa pelos respectivos centros, conforme ilustra a figura abaixo. Num dado instante um motor, colocado dentro de uma das esferas, começa a enrolar o fio lentamente, aproximando uma esfera da outra. Considere que o momento de inércia do motor seja desprezível quando comparado ao das esferas. Desconsidere efeitos da gravidade e expresse todos os seus resultados em termos de M, R e T_0. Dado: o momento de inércia da casca esférica em relação a um eixo que passa pelo seu centro é $\frac{2}{3}MR^2$.

(a) Determine o momento angular desse sistema em relação ao seu centro de massa, antes do motor ser ligado.

(b) Calcule a velocidade angular de rotação, ω_f, no instante em que uma esfera encosta-se à outra.

(c) Calcule a variação da energia cinética do sistema até esse instante.

(d) Qual foi o trabalho realizado pelo motor para fazer com que as esferas se encostem?



Q2. Um pêndulo simples consiste de uma massa m pendurada a partir de um ponto fixo por uma barra estreita de massa desprezível, inextensível, de comprimento l. Seja g a aceleração da gravidade local e θ o ângulo entre o pêndulo e a direção vertical. No que segue, faça sempre a aproximação de pequenos ângulos.

(a) Escreva a equação de movimento desprezando o atrito. Obtenha a frequência natural ω do pêndulo.

(b) Determine $\theta(t)$ para as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = 0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = \Omega$.

(c) Escreva a equação do movimento do pêndulo na presença de uma força de atrito viscoso dada por $F_R = 2m\sqrt{gl}\,\frac{d\theta}{dt}$.

(d) Na situação do item (c), determine $\theta(t)$ para as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$.

Q3. Parte I – Na tentativa de observar o efeito fotoelétrico, um cientista do final do século XIX realiza um experimento onde utiliza pulsos (1 ms de duração) de luz monocromática, com comprimento de onda 414 nm e três diferentes potências, dadas respectivamente por P_0, $3P_0$ e $5P_0$, onde $P_0 = 300\ \mathrm{keV/s}$. Ele escolhe para seu experimento três superfícies metálicas cujas funções trabalho são conhecidas: Li (2,3 eV), Be (3,9 eV) e Hg (4,5 eV).

(a) Determine para quais superfícies metálicas e potências poderá ocorrer a emissão de fotoelétrons.

(b) Calcule o número máximo de fotoelétrons que poderia ser emitido pelo pulso de potência $3P_0$ em cada superfície.

Parte II – Para preencher com elétrons as subcamadas de um átomo usa-se a seguinte regra: as subcamadas que têm o menor valor de $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{l}$ são preenchidas antes; se duas subcamadas têm o mesmo valor de $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{l}$, preenche-se antes a subcamada com menor valor de $\boldsymbol{n}$.

(c) Use esta regra para escrever a configuração eletrônica do Sc, que é o átomo com número atômico mais baixo que apresenta um elétron em uma subcamada d.

(d) Quais são os valores possíveis do momento angular orbital e de sua componente z para um elétron na subcamada d do Sc?

Q4. Considere um elétron que se encontra confinado dentro de um poço de potencial unidimensional $V(x)$ dado por

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ 0 & , 0 < x < d \\ +\infty & , x > d \end{cases} .$$

(a) Escreva a equação de Schrödinger para este elétron e as condições de contorno que devem ser satisfeitas pelas funções de onda.

(b) Obtenha as funções de onda normalizadas e determine os valores das energias permitidas para este elétron.

Admita agora que este elétron se encontre no estado quântico cuja função de onda dentro do poço é dada por

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{d}}\, sen\left(\frac{3\pi x}{d}\right) .$$

(c) Determine o número quântico n do estado ocupado por este elétron e seu comprimento de onda nesse estado.

(d) Determine a probabilidade de encontrar este elétron entre $x = 0$ e $x = d/6$.

Q5. Considere um sistema formado por duas partículas distinguíveis, 1 e 2. Cada uma delas deve estar em um de dois compartimentos, A e B. A energia de uma partícula é zero quando ela se encontra no compartimento A, e ε quando no compartimento B. Quando as duas partículas estão no mesmo compartimento, há um custo energético adicional Δ. O sistema está em equilíbrio com um banho térmico à temperatura T.

(a) Quais são as possíveis configurações do sistema? Determine a energia de cada uma delas.

(b) Calcule a função de partição Z.

(c) Qual é a probabilidade de cada configuração?

(d) Calcule a energia média do sistema.

(e) Obtenha a entropia do sistema em termos de Z.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2012

Parte 2 – 05/10/2011

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração da prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas serão desconsideradas**.
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Um cabo coaxial é composto por um longo cilindro reto condutor de raio a e uma fina casca cilíndrica condutora de raio b e concêntrica ao cabo interno. Os dois condutores transportam correntes iguais e opostas de intensidade i.

(a) Determine o módulo do campo magnético na região entre os dois condutores $(a < r < b)$.

(b) Determine o módulo do campo magnético na região externa ao cabo coaxial $(r > b)$.

(c) Encontre o módulo do campo magnético no interior do cilindro interno $(r < a)$ se a corrente está distribuída uniformemente na seção transversal do mesmo.

(d) Calcule a energia armazenada no campo magnético por unidade de comprimento do cabo.

Q7. Um capacitor esférico isolado possui carga $+Q$ sobre o condutor interno (raio r_a) e carga $-Q$ sobre o condutor externo (raio r_b). A seguir, a metade inferior do volume entre os dois condutores é preenchida por um líquido de constante dielétrica relativa K, conforme indicado na seção reta da figura abaixo.

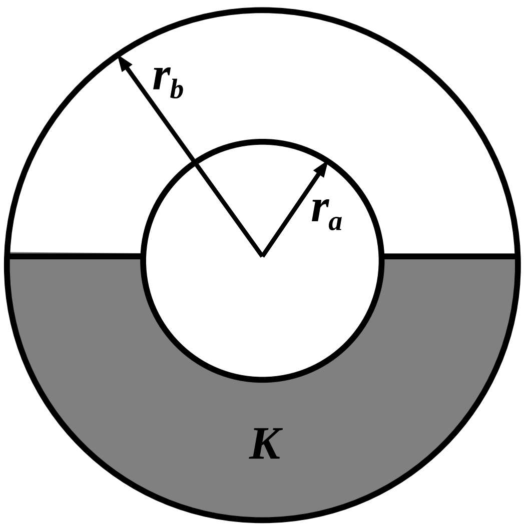
(a) Calcule o módulo do campo elétrico no volume entre os dois condutores em função da distância r ao centro do capacitor. Forneça respostas para a metade superior e para a metade inferior desse volume.

(b) Determine a densidade superficial de cargas livres sobre o condutor interno e sobre o condutor externo.

(c) Calcule a densidade superficial de cargas de polarização sobre as superfícies interna (r_a) e externa (r_b) do dielétrico.

(d) Qual é a densidade de carga de polarização sobre a superfície plana do dielétrico? Explique.

(e) Determine a capacitância do sistema.



Q8. A equação de Schrödinger independente do tempo para o problema unidimensional de uma partícula de massa m sujeita a um potencial de oscilador harmônico é

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi_n(x)=E_n\psi_n(x), \quad n=0,1,2,\ldots$$

onde ω é a frequência angular do oscilador. Um método para se resolver essa equação consiste em expressá-la em termos do operador

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x+\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}\right)$$

e de seu conjugado hermitiano.

(a) A função de onda do estado fundamental do oscilador satisfaz a equação diferencial $a\,\psi_0(x)=0$. Resolva esta última equação e determine $\psi_0(x)$ a menos de uma constante multiplicativa.

(b) Calcule essa constante normalizando $\psi_0(x)$.

(c) Obtenha o valor da energia do estado fundamental desse oscilador.

(d) Suponha, agora, que o oscilador seja perturbado pelo potencial

$$V(x)=V_0\exp\left(-x^2/b^2\right) \quad ,$$

onde V_0 e b são constantes reais. Usando teoria de perturbações de primeira ordem, calcule o deslocamento de energia do estado fundamental.

Q9. Uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ tem momento de dipolo magnético $\vec{\mu}=\gamma\vec{S}$, onde γ é uma constante real e $\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ é o operador de spin, sendo

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

as matrizes de Pauli. Se essa partícula está imersa num campo magnético uniforme $\vec{B}$, o hamiltoniano que governa a dinâmica do spin é $H=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. No que segue, suponha que o campo magnético esteja na direção do eixo Oz.

(a) Dê a forma explícita do operador hamiltoniano como uma matriz 2 x 2, em termos de γ, $\hbar$ e B.

(b) Escreva as expressões para os estados estacionários como vetores-coluna normalizados e indique suas respectivas energias.

(c) No instante inicial, $t = 0$, a partícula é preparada no estado de spin

$$\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{(com } \alpha \text{ real).}$$

Qual será o estado de spin, $\chi(t)$, num instante t posterior?

(d) Nesse instante posterior é feita uma medida de S_x, a componente do spin segundo o eixo Ox. Qual a probabilidade $P_+(t)$ de se obter o valor $+\hbar/2$?

Q10. Considere um mol ($n = 1$) de um gás ideal monoatômico, inicialmente no estado de equilíbrio térmico especificado pela pressão P_0 e pelo volume V_0. Esse gás sofre uma compressão adiabática reversível que o leva a ocupar um volume $V_0/2$. Determine:

(a) a variação de energia interna desse gás devido a essa compressão;

(b) a variação de entropia do gás nessa compressão.

Após essa compressão adiabática, o gás, sempre isolado do resto do universo por paredes adiabáticas, sofre uma expansão completamente livre até o volume original V_0. Determine:

(c) a variação de temperatura do gás devido à expansão livre;

(d) a variação de entropia do gás nessa expansão livre.