Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2013

Parte 1 — 16/10/2012

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

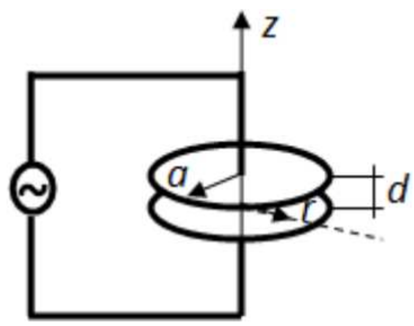
Boa prova!

Q1. Considere uma esfera sólida, uniformemente carregada, de carga Q e raio R.

(a) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto à distância r do centro da esfera, nos casos $r > R$ e $r \leq R$.
(b) Obtenha a força $d\vec{F}$ sobre um elemento de volume dV da esfera, localizado na posição $\vec{r}$.
(c) Determine agora, por integração, a força total $\vec{F}$ que age sobre o hemisfério superior da esfera.

Q2. Um capacitor de placas planas paralelas é formado por dois discos circulares de raio a, separados entre si de uma distância $d \ll a$, no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador de corrente alternada de frequência ω, que produz uma carga uniforme na placa do capacitor, dada por $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$. São desprezados efeitos de borda. Supondo baixas frequências, de forma que $\omega a/c \ll 1$ (onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é a velocidade da luz), o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas pode ser considerado uniforme. Considere um sistema de coordenadas cilíndricas, (r,θ,z), com eixo z passando pelo centro das placas, conforme indicado na figura.

(a) Calcule a expressão para o campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas.
(b) Calcule o campo magnético $\vec{B}$, em função do raio r, na região entre as placas do capacitor.
(c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$.
(d) Usando a aproximação de baixas frequências, mostre que é satisfeita a conservação de energia, expressa pela condição $\nabla \cdot \vec{S} + \partial u/\partial t = 0$, onde $u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu_0)$ é a densidade de energia contida no campo eletromagnético.



Q3. Uma partícula de massa m confinada em um poço de potencial unidimensional possui função de onda dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -L/2 \\ A \cos \dfrac{3\pi x}{L} & \text{para } -L/2 < x < L/2 \\ 0 & \text{para } x > L/2 \end{cases}$$

(a) Calcule a constante de normalização A.
(b) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo entre $-L/4 < x < L/4$.
(c) Através da solução da equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula no referido poço de potencial, ache a energia correspondente à função de onda, em termos de m, L e h.
(d) Calcule o comprimento de onda do fóton emitido na transição desta partícula para o estado fundamental, em termos de m, L e h.

Q4. O decaimento dos múons obedece à seguinte equação diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t)$$

onde $N(t)$ é o número de múons presentes no instante de tempo t e $dN(t)/dt$ representa a taxa de variação de múons no mesmo instante de tempo t. A constante de proporcionalidade R é chamada de constante de decaimento. O tempo de vida médio do múon é $\overline{t} = 2\mu$s, isto é, neste intervalo de tempo $N(\overline{t})/N(0) = 1/e \approx 1/2{,}73$. Sendo a velocidade dos múons na direção da superfície da Terra igual a $0{,}998c$, responda:

(a) No sistema inercial de referência do múon, qual o valor de R para o decaimento de múons?
(b) Sem considerar correções relativísticas, estime quantos múons seriam detectados ao nível do mar, correspondentes a 10^8 múons detectados a 9 km de altitude.
(c) Considere agora a previsão relativística e repita a estimativa do item (b).

Q5. Um gás ideal monoatômico de N moléculas de massa m está em equilíbrio térmico a uma temperatura absoluta T. O gás está contido em uma caixa cúbica de aresta L, cujos lados de baixo e de cima estão paralelos à superfície da Terra. Considere o efeito do campo gravitacional sobre as moléculas. A aceleração da gravidade é g. Determine:

(a) a função de partição de uma molécula do gás;
(b) a energia cinética média de uma molécula do gás;
(c) a energia potencial média de uma molécula do gás;
(d) a energia potencial média de uma molécula do gás no caso em que $mgL/k_BT \ll 1$. Faça o cálculo até 2ª ordem da razão mgL/k_BT.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2013

Parte 2 — 17/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Nao destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q6. Um equilibrista de massa m está inicialmente parado na extremidade de uma barra larga, horizontal, homogênea, de comprimento D e massa $M = 3m$. A barra gira em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. O equilibrista começa então a caminhar sobre a barra, em direção ao eixo de rotação, com velocidade constante. Considere o período inicial de rotação do sistema igual a T_0.

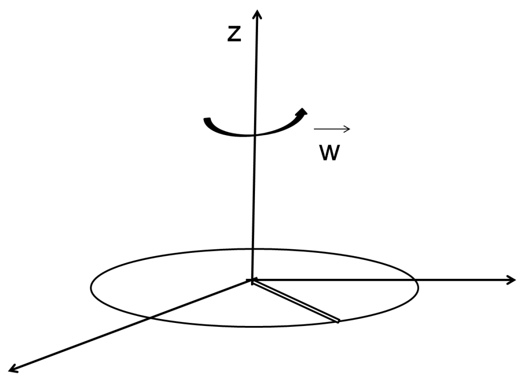
(a) Determine o torque das forças que atuam sobre o equilibrista em relação ao centro da barra.
(b) Determine o momento angular do sistema quando o equilibrista atinge o centro da barra. Determine o período de rotação do sistema nessa situação.
(c) Determine as energias nas posições inicial e final do sistema. Nesse movimento, a energia do sistema variou?

Considere o equilibrista como uma massa puntiforme.

Dado: $I_{CM}(\text{barra}) = \dfrac{1}{12} M D^2$

Q7. Uma partícula de massa m se encontra no interior de um cano oco, liso, estreito e longo que gira num plano horizontal com velocidade angular ω constante. O eixo fixo de rotação passa por uma das extremidades do cano, como mostra a figura.

(a) Escreva a Lagrangiana da partícula.
(b) Obtenha as equações de Lagrange do movimento da partícula.
(c) Determine o movimento da partícula, considerando que inicialmente ela é lançada do centro de rotação com velocidade $\vec{v}_0$.
(d) Obtenha a função Hamiltoniana (H) do movimento dessa partícula e as equações de Hamilton do movimento.
(e) Dentre as grandezas físicas H e E (energia), quais são conservadas? Justifique sua resposta.



Q8. Considere um oscilador harmônico (em uma dimensão, x) de massa m e frequência ω. No instante $t = 0$, o estado do oscilador é $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n|\phi_n\rangle$ onde os $|\phi_n\rangle$ são os estados estacionários, isto é, $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, sendo H a hamiltoniana e $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ com $n = 0,1,2,\ldots$

(a) Considerando que os estados $|\phi_n\rangle$ são normalizados, determine a condição que os coeficientes c_n devem satisfazer para que o estado $|\psi(0)\rangle$ seja também normalizado. Calcule, então, a probabilidade $\mathcal{P}$ de que uma medida da energia do oscilador, feita num instante t posterior, dê um resultado maior que $2\hbar\omega$.

(b) Se apenas c_0 e c_1 são diferentes de zero, dê a expressão para o valor esperado da energia, $\langle H\rangle$, em termos de c_0 e c_1. Com a condição $\langle H\rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_0|^2$ e $|c_1|^2$.

(c) O vetor de estado $|\psi(0)\rangle$ está definido a menos de um fator de fase global, o que nos permite escolher c_0 real e positivo. Fazendo isso, escrevendo $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$ e mantendo a condição $\langle H\rangle = \hbar\omega$, determine θ_1 de modo que $\langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Observação: Lembremos que o efeito do operador posição X sobre os estados estacionários do oscilador harmônico é

$$X|\phi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\sqrt{n+1}\,|\phi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}\,|\phi_{n-1}\rangle\right]$$

entendendo-se que o segundo termo acima é nulo para $n = 0$.

(d) Com $|\psi(0)\rangle$ determinado conforme o item anterior, escreva $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ e calcule $\langle X\rangle(t)$.

Q9. Sejam $\vec{L}$,$\vec{R}$ e $\vec{P}$ os operadores do momento angular, da posição e do momento linear, respectivamente.

(a) Usando as relações de comutação $[L_i,L_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}L_k$, mostre que

$$\vec{L}\times\vec{L} = i\hbar\vec{L}$$

(b) Com a definição $\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P}$ e usando $[R_i,P_j] = i\hbar\delta_{ij}$, mostre que

$$[L_i,R_j] = i\hbar\sum_k \epsilon_{ijk}R_k$$

(c) Sabendo que os operadores $\vec{R}$ e $\vec{P}$ são hermitianos, isto é, $R_i^\dagger = R_i$ e $P_i^\dagger = P_i$, mostre que as componentes do operador do momento angular $\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P}$ também são operadores hermitianos.

Observação: Nas expressões acima, ϵ_{ijk} é o tensor completamente antissimétrico, isto é:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se houver índices iguais;} \\ +1 & \text{se } ijk \text{ for 123, 231 ou 312;} \\ -1 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Se precisar, use a identidade $\sum_{i,j}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.

Q10. A radiação em uma cavidade ressonante pode ser vista como um gás de fótons cuja pressão sobre as paredes de uma cavidade de volume V é dada por

$$P = \frac{aT^4}{3} \, ,$$

onde a é uma constante. A energia interna desse gás é dada pela equação $U = aT^4V$. Considere que inicialmente a temperatura da cavidade seja T_0 e seu volume V_0.

(a) Determine o trabalho realizado em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.

(b) Determine o calor fornecido em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.

(c) Usando a relação

$$đQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV \, ,$$

determine a equação que descreve um processo adiabático em termos das variáveis V e T.

(d) Determine o trabalho realizado em um processo adiabático no qual o volume da cavidade é duplicado. Expresse o resultado em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.