Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

2º Semestre/2013

Parte 1 — 23/04/2013

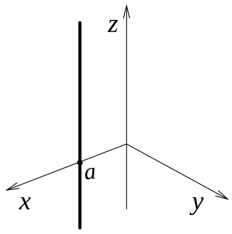
Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q1. Considere um fio infinitamente longo disposto paralelamente ao eixo z, interceptando o plano $z = 0$ em $x = a$ e $y = 0$, conforme mostra a figura. O fio está carregado com densidade linear de carga elétrica λ uniforme.



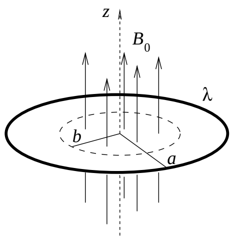
(a) Determine o potencial elétrico $V(x,y,z)$ em todo o espaço, de forma que o potencial seja zero no eixo z. Sugestão: pode-se calcular o potencial a partir do campo elétrico do fio longo, que é obtido de forma simples usando a lei de Gauss.

(b) Considere agora, além do fio, um condutor plano infinito (aterrado) ocupando o plano $x = 0$. Calcule $V(x,y,z)$ para a região $x > 0$ do espaço. Sugestão: utilize o método das imagens.

(c) Qual a densidade superficial de carga $\sigma(y,z)$ induzida no condutor plano em $x = 0$?

(d) Calcule a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y,z)\, dy$ e discuta o resultado obtido.

Q2. Um fio carregado com densidade linear de carga elétrica $\lambda > 0$ está colado (formando um anel) na borda de um disco isolante de raio a, que pode girar ao redor de seu eixo vertical sem atrito. O comprimento do fio é exatamente $2\pi a$. Apenas na região central do disco, até um raio $b < a$, age um campo magnético uniforme $\mathbf{B_0}$ vertical para cima.



(a) O campo magnético é agora desligado. Obtenha a expressão para o torque devido à força eletromotriz induzida no fio, em termos da variação temporal do campo magnético, $d\mathbf{B}/dt$. A partir deste resultado, calcule o momento angular final do disco (módulo e direção).

(b) Considerando como dado o momento de inércia I do sistema disco+fio, calcule o campo magnético (módulo e direção) produzido no centro do disco pelo anel de carga na situação final acima.

Q3. Um feixe de luz com comprimento de onda 480 nm no vácuo e de intensidade 10 W/m^2 incide sobre um catodo de 1 cm^2 de área no interior de uma célula fotoelétrica. A função trabalho do metal é 2,2 eV. As respostas devem ser dadas com dois algarismos significativos.

(a) Calcule a energia dos fótons incidentes em Joules e em elétron-volts.

(b) Calcule o número de fótons por segundo incidentes na placa metálica.

(c) Se a eficiência da conversão fotoelétrica é de 20% (apenas 20% dos fótons arrancam elétrons do metal), calcule a corrente elétrica máxima, através da célula, quando uma *ddp* é aplicada entre o catodo e o anodo.

(d) Calcule o comprimento de onda máximo dos fótons incidentes acima do qual não ocorre o efeito fotoelétrico.

Q4. Uma partícula de massa m executa oscilações harmônicas, em uma dimensão, num potencial $U(x) = m\omega^2 x^2/2$. Considere a partícula num estado cuja função de onda é $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$, onde A e b são constantes.

(a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para este potencial.

(b) Determine o valor de b para que $\psi(x)$ seja solução desta equação de Schrödinger, e o valor da energia associada a esta função de onda.

(c) Calcule a constante de normalização A.

(d) Classicamente, esta partícula oscilaria dentro do intervalo simétrico $[-x_{\max}, x_{\max}]$, onde $x_{\max} = [\hbar/m\omega]^{1/2}$. Calcule, usando a Mecânica Quântica, a probabilidade de se encontrar esta partícula no intervalo $[-x_{\max}, x_{\max}]$. Compare este resultado com o esperado pela Mecânica Clássica.

Q5. Um cilindro de paredes externas impermeáveis, rígidas e adiabáticas, fechado em ambas as extremidades, é munido de uma parede de separação interna impermeável, móvel, adiabática e ideal (sem fricção), que o divide em dois compartimentos (A e B). Cada um deles é preenchido com um mol de um gás ideal monoatômico. Inicialmente a pressão, o volume e a temperatura (P_0, V_0, T_0) são idênticos em ambos os lados da parede interna. Uma certa quantidade de calor é introduzida de forma quase-estática no compartimento A até que sua pressão atinja o valor $P_{\mathrm{A}} = 32P_0$.

(a) A partir das equações de estado do gás ideal monoatômico $U = \frac{3}{2}NRT = \frac{3}{2}PV$ e de sua entropia $S/N = \frac{3}{2}R\ln T + R\ln V +$ constante, demonstre que, ao longo de um processo isentrópico em um sistema fechado, $P^3V^5 =$ constante.

(b) Obtenha os volumes finais V_{A} e V_{B} dos dois compartimentos em termos do volume inicial V_0.

(c) Obtenha as temperaturas finais T_{A} e T_{B} dos dois compartimentos em termos da temperatura inicial T_0, verificando que $T_{\mathrm{A}} = 15T_{\mathrm{B}}$.

(d) Obtenha as variações de entropia do gás nos dois compartimentos, ΔS_{A} e ΔS_{B}. Qual é o sinal da variação da entropia total do sistema?

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

2$^{\underline{o}}$ Semestre/2013

Parte 2 — 24/04/2013

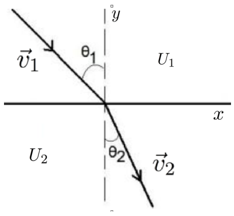
Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q6. Uma partícula de massa m move-se com velocidade $\vec{v}_1$ no semi-plano superior até ser desviada ao atingir o semi-plano inferior, onde passa a se propagar com velocidade $\vec{v}_2$, conforme ilustrado na figura abaixo. Observa-se experimentalmente as seguintes características: *i*) a partícula passa do meio 1 ao meio 2 desde que $v_1 > v_{min}$; *ii*) a partícula se move de modo retilíneo e uniforme em cada um dos semi-planos; *iii*) o ângulo de saída θ_2 é diferente do ângulo de entrada θ_1, o que nos faz presumir que em cada meio a partícula esteja sob ação de diferentes potenciais U_1 e U_2.



(a) Com base no experimento, esboce o gráfico do potencial U em função de y para x fixo (justificando o gráfico).

(b) Determine v_2 em termos de v_1, de m e dos potenciais U_1 e U_2. Qual é a velocidade v_{min} acima da qual observa-se a passagem da partícula do meio 1 para o meio 2?

(c) Determine o índice de refração $\operatorname{sen}\theta_1/\operatorname{sen}\theta_2$ em termos de m, v_1 e dos potenciais em cada meio.

Q7. Uma partícula de massa m desenvolve movimento unidimensional sob ação do potencial abaixo (c é uma constante)

$$U(x) = \frac{1}{2}x^4 - cx^2.$$

(a) Esboce os gráficos de $U(x)$ e dos respectivos espaços de fase ($\dot{x}$ versus x para todas as energias possíveis) nos seguintes casos : *i*) $c > 0$, *ii*) $c = 0$ e *iii*) $c < 0$.

(b) Por meio da energia total E, identifique todos os movimentos periódicos possíveis e seus respectivos pontos de inversão (onde a velocidade é nula) para cada um dos casos do item (a).

(c) Determine a dependência do período de oscilações com a energia total E para $c = 0$.

Q8. Uma partícula de massa m está num potencial tal que a equação de Schrödinger (com $\hbar = 1$) no espaço dos momentos é

$$\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - a\nabla_p^2\right)\bar{\psi}(\vec{p},t) = i\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}(\vec{p},t)$$

onde

$$\nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}.$$

(a) Escreva a equação de Schrödinger no espaço das coordenadas.

(b) Qual é o potencial $V(r)$, $r = |\vec{r}|$?

(c) Qual é a força, $\vec{F}(\vec{r})$, sobre a partícula?

Q9. Os operadores de spin de uma partícula de spin-1 (um tripleto) podem ser representados no espaço complexo $\mathcal{C}^3$ pelas matrizes

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que as relações de comutação $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z$, e permutações cíclicas em x,y,z, são satisfeitas.

(b) Se uma medida da componente z do spin é feita, quais são os possíveis resultados? Encontre os respectivos autovetores.

(c) Se o estado da partícula é dado pelo vetor

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix},$$

quais são as probabilidades de se obter cada um dos resultados possíveis das medidas do spin ao longo do eixo-z?

(d) A partir do resultado do item c), qual é a probabilidade de se encontrar a partícula em qualquer um desses estados?

Q10. Considere um oscilador harmônico unidimensional modificado, definido pela função hamiltoniana

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

onde $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ para $x \geq 0$, $V(x) = \infty$ para $x < 0$. Ele encontra-se em equilíbrio térmico com um reservatório de calor a temperatura T.

(a) Justifique, em termos da paridade das autofunções do problema quântico, por que, devido às condições impostas, apenas os valores inteiros ímpares de n são permitidos para as autoenergias deste oscilador, $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$.

(b) Para a versão quântica, obtenha a função de partição canônica z deste oscilador e a energia livre de Helmholtz associada f.

(c) Obtenha a energia interna média deste oscilador a partir de $u = -\partial \ln z / \partial \beta$.

(d) A partir da definição da energia interna média no ensemble canônico, $u \equiv \langle \epsilon_n \rangle$, demonstre a expressão $u = -\partial \ln z / \partial \beta$.

(e) Mostre que a função de partição canônica clássica deste oscilador é dada por $z_{\text{class}} = (2\beta\hbar\omega)^{-1}$. Determine a energia interna média clássica associada, $u_{\text{class}} \equiv \langle \mathscr{H} \rangle_{\text{class}}$.