EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2015

14 outubro 2014

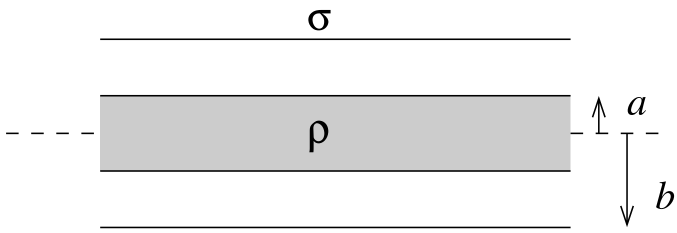
Parte 1

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não escreva nada no formulário.
  Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. a) Um cilíndrico dielétrico maciço, de comprimento infinito e raio a, possui uma densidade de carga volumétrica uniforme e positiva ρ. Uma casca cilíndrica, também dielétrica, de raio $b > a$, com eixo comum ao cilindro, tem uma densidade de carga superficial uniforme e negativa σ, de forma que a carga total do cilidro mais casca, em certo comprimento, é zero, e portanto $\sigma = -\rho a^2/2b$. Calcule o campo elétrico $\vec{E}(r)$ para as regiões $r < a$, $a < r < b$ e $b < r$ sendo r a distância ao eixo do cilindro.
b) Considere em seguida que o conjunto cilindro mais casca se move para a direita com velocidade $\vec{v}$. O movimento dá origem a uma corrente elétrica $I = \pi a^2 \rho v$ no cilindro maciço, para a direita e uniformemente distribuida na seção reta, de forma que a densidade de corrente fica sendo dada por $\vec{J} = \rho\vec{v}$. Da mesma forma, a casca em movimento dá origem a uma corrente de mesma intensidade I, mas em sentido contrário (para a esquerda). Calcule a indução magnética $\vec{B}$ para as regiões $r < a$, $a < r < b$ e $b < r$.



Q2. O campo elétrico de uma onda plana monocromática no vácuo é dado por

$$\vec{E}(z,t) = (E_1\,\hat{x} + E_2\,\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}.$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são versores cartesianos nas direções x e y, respectivamente, e E_1 e E_2 são constantes.

a) Encontre a indução magnética $\vec{B}(z,t)$.
b) Mostre que o campo elétrico e a indução magnética são ortogonais entre si.
c) Encontre o vetor de Poynting da onda.

Q3. Considere um gás de moléculas diatômicas com frequência de oscilação ω e momento de inércia I. À temperatura ambiente, as energias dos estados moleculares vibracionais são muito maiores do que $k_B T$. Portanto, a maioria das moléculas se encontra no estado vibracional de menor energia. Por outro lado, a energia característica dos estados rotacionais é muito menor do que $k_B T$. A energia rotacional-vibracional $E(n,\ell)$ do estado de uma molécula diatômica é caraterizada pelo número quântico n, para a energia vibracional, e pelo número quântico ℓ, para a energia rotacional.

a) Escreva $E(n,\ell)$ para $n = 0$ e ℓ qualquer.
b) Suponha que uma molécula sofra uma transição de um estado inicial com $n = 0$ e ℓ qualquer para um estado excitado com $n = 1$. Determine as duas energias totais permitidas para a molécula após a transição, lembrando que a regra de seleção impõe $\Delta\ell = \pm 1$. Calcule a diferença de energia entre esses dois estados permitidos e o estado inicial, bem como as respectivas frequências de transição.
c) Considere o estado da molécula no qual $n = 0$ e ℓ qualquer. Sabendo que a degenerescência do estado é $2\ell + 1$, determine a população do estado rotacional-vibracional, $N(E)$, como função de E, a partir da distribuição de Boltzmann.

d) Para $n = 0$, o estado $\ell = 0$ não é o estado mais populado à temperatura ambiente. Para pequenos valores de ℓ, a população do estado aumenta ligeiramente em relação a $\ell = 0$ por causa do aumento da densidade de estados. Para grandes valores de ℓ, a população diminui por causa do fator de Boltzmann. Determine o valor de ℓ para o qual a população é máxima.

Q4. Suponha que um fóton encontre um elétron que está inicialmente em repouso no referencial S, como na figura 1A. Na maioria das vezes, o fóton é simplesmente desviado da trajetória original, mas, ocasionalmente, o evento resulta no desaparecimento do fóton e na criação de um par elétron-pósitron, na presença do elétron original. Suponha que os detalhes da interação que produziu o par sejam tais que as três partículas resultantes se movam para direita, como na figura 1B, com a mesma velocidade u, isto é, que estejam todas em repouso no referencial S$'$, que está se movendo para a direita com velocidade u em relação a S.

a) Escreva as leis de conservação de energia e momento antes e depois da criação do par.

b) Usando a conservação da energia-momento no caso relativístico, obtenha no sistema S$'$ a energia do fóton para que seja criado um par de partículas com energia equivalente à energia de repouso de 2 elétrons.

c) Utilize a relação $m_0^2c^4 = E^2 - p^2c^2$ para obter a relação $u/c = pc/E$.

d) Determine a partir do item (c) a velocidade u com a qual as três partículas se movem no referencial S.

Figura 1: (A) Situação anterior à colisão, no referencial S. (B) Situação após a colisão, no referencial S.

Q5. Um gás ideal contido num recipiente, inicialmente com volume V_A e pressão p_A (estado A), sofre expansão isobárica até atingir o volume V_B (estado B). O gás sofre então uma expansão adiabática, até que sua pressão seja p_C (estado C), de forma que uma contração isobárica (até o estado D) seguida de uma compressão adiabática levem o gás novamente à situação inicial (estado A). Considere dada a razão γ entre os calores específicos do gás a pressão constante e a volume constante.

a) Represente as transformações descritas acima em um diagrama $p-V$, indicando os estados A, B, C e D.

(b) Calcule o calor trocado em cada trecho do ciclo, em termos de p_A, V_A, V_B, p_C e γ.

(c) Determine a eficiência do ciclo, isto é, a razão entre o trabalho realizado pelo gás e o calor absorvido por ele.

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2015

15 outubro 2014

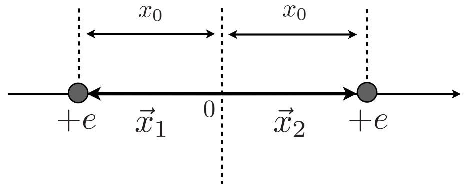
Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não é necessário devolver o formulário.

Boa prova!

Q6. É possível construir armadilhas capazes de confinar íons de massa m e carga q. Em particular, a armadilha pode restringir o movimento dos íons a apenas uma dada direção espacial, x. Assim, considere dois íons de cálcio uma vez ionizado (Ca^+), submetidos a um potencial confinante externo harmônico $U(x) = m\omega^2 x^2/2$. Esses íons interagem adicionalmente através da repulsão coulombiana,



$$F_C = \frac{e^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

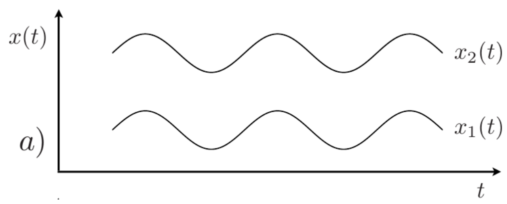
onde x_1 e x_2 são as posições dos íons de cálcio e, por simplicidade, foi definido: $e^2 = q^2/(4\pi\varepsilon_0)$. A figura acima define um sistema de coordenadas conveniente e representa os íons na posição de equilíbrio em que $-x_1 = x_2 = x_0$. O objetivo deste problema é estudar os modos normais dessa cadeia unidimensional constituida pelos dois íons de cálcio.

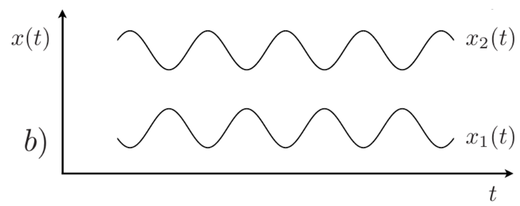
a) Obtenha a posição de equilibrio x_0 em termos de e, m e ω.

b) Escreva as equações de Newton para o movimento de cada íon e obtenha a frequência de oscilação do sistema quando a separação entre os íons for constante. Este é o primeiro modo normal de oscilação dessa cadeia.

c) O segundo modo normal corresponde a um movimento antissimétrico dos íons, em cujo caso o centro de massa está parado em $x = 0$. Obtenha esse segundo modo normal no limite de pequenas oscilações. Obtenha a razão entre as frequências dos dois modos normais de oscilação do sistema.

d) As figuras a) e b) abaixo representam os modos normais de oscilação desse sistema de dois íons. Identifique o primeiro e o segundo modo normal obtidos, respectivamente, nos itens b e c acima. Qual deles tem menor energia?





Q7. Um satélite artificial de massa m está em órbita elíptica em torno da Terra. Admita que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme com raio R e massa M, e denote por G a constante de gravitação universal. Considere conhecidos d e D, as distâncias entre o centro da Terra e o satélite nos pontos de menor e maior afastamento, respectivamente. Uma partícula de massa m_0 menor do que m, choca-se centralmente e de forma completamente inelástica com o satélite no ponto de menor afastamento da Terra. No instante da colisão, o satélite e a partícula tinham velocidades iguais em módulo, mas com sentidos opostos.

a) Obtenha a velocidade v_S do sistema satélite-partícula *imediatamente após* a colisão em termos de v_p, a velocidade no ponto de menor afastamento.

b) Expresse o momento angular do satélite nos pontos de mínimo e máximo afastamento em termos de v_p e de v_a (a velocidade no ponto de maior afastamento), respectivamente, antes da colisão.

c) Obtenha a velocidade v_p, antes da colisão, em termos de M, d, D e G.

d) Obtenha a energia E_S e o momento angular L_S do sistema satélite-partícula, depois da colisão, em termos de m_0 e das grandezas que caracterizam o movimento do satélite antes da colisão.

Q8. Seja o estado do spin de um elétron dado por

$$|\psi\rangle = \alpha\left(|z_+\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}|z_-\rangle\right)$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que os operadores de spin $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ podem ser escritos em termos das matrizes de Pauli como $\hat{\mathbf{S}} = \hbar\,\vec{\sigma}/2$ (veja formulário), onde

$$\begin{aligned} \hat{S}_x|x_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|x_+\rangle, & \hat{S}_x|x_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|x_-\rangle, \\ \hat{S}_y|y_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|y_+\rangle, & \hat{S}_y|y_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|y_-\rangle, \\ \hat{S}_z|z_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle, & \hat{S}_z|z_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle, \end{aligned}$$

a) Qual é o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $|\psi\rangle$ fique normalizado?

b) Qual é a probabilidade de se medir $-\hbar/2$ para o spin na direção z?

c) Qual é a probabilidade de se medir $+\hbar/2$ para o spin na direção x?

d) Qual é o valor esperado do spin no plano $y = 0$ em uma direção de 45^0 entre os eixos x e z?

Q9. Seja o operador $\hat{A}$ associado a um certo observável físico A de um sistema satisfazendo $[\hat{A},\hat{H}] \neq 0$, onde $\hat{H}$ é um operador hamiltoniano independente do tempo. Sejam agora os autovetores normalizados, ϕ_+, ϕ_-, e autovalores correspondentes, a_+, a_- $(a_+ \neq a_-)$ de $\hat{A}$:

$$\hat{A}\phi_+ = a_+\phi_+, \qquad \hat{A}\phi_- = a_-\phi_-,$$

com

$$\phi_+ = \frac{u_+ + u_-}{\sqrt{2}}, \qquad \phi_- = \frac{u_+ - u_-}{\sqrt{2}}$$

onde

$$\hat{H}u_+ = E_+u_+, \qquad \hat{H}u_- = E_-u_-$$

a) Calcule o valor esperado de $\hat{A}$ no estado ϕ_+.

b) Calcule a projeção de $\hat{H}u_+$ no estado u_-.

c) Admitindo que o sistema esteja inicialmente em um estado arbitrário, $\psi(0)$ escreva quanto valerá o estado $\psi(t)$ em um instante posterior como função de $\hat{H}$.

d) Calcule o valor esperado do observável A no instante $t = \hbar\pi/[3(E_+ - E_-)]$ admitindo que o sistema esteja inicialmente no estado $\psi(0) = \phi_+$ e $E_+ \neq E_-$.

Q10. Considere N osciladores harmônicos tridimensionais clássicos não-interagentes, de massa m e frequência angular ω, em contato com um reservatório térmico à temperatura T.

a) Escreva a hamiltoniana do sistema e obtenha a função de partição canônica.

b) Obtenha o valor médio da energia por oscilador. Qual a capacidade térmica do sistema?