# EUF

# Exame Unificado
# das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2015

14 de abril 2015

Parte 1

---

## Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não escreva nada no formulário.
  Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

---

**Boa prova!**

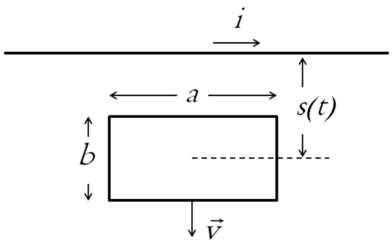
Q1. Uma espira condutora retangular (comprimento $a$, largura $b$ e resistência $R$) situa-se nas vizinhanças de um fio reto infinitamente longo que é percorrido por uma corrente $i$ para a direita, conforme a figura. A espira afasta-se do fio com uma velocidade constante $\vec{v}$, de forma que a distância do centro da espira ao fio é dada por $s(t) = s_0 + vt$. Calcule:

a) o módulo do campo magnético produzido pela corrente num ponto situado a uma distância $r$ do fio. Indique a direção e o sentido do campo na região delimitada pela espira;

b) o fluxo magnético na região delimitada pela espira para um dado valor de $s(t)$;

c) a força eletromotriz induzida na espira para uma certa distância $s(t)$;

d) a corrente induzida na espira, $i_{ind}$. Indique o sentido da mesma.




Q2. Um meio condutor tem condutividade elétrica $\sigma$, permeabilidade magnética $\mu_0$ e permissividade elétrica $\epsilon = K\epsilon_0$, em que $K$ é a constante dielétrica real. A equação de onda para o campo elétrico neste meio é dada por $\nabla^2\vec{E} - K\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$, sendo $\frac{1}{c^2} = \mu_0\epsilon_0$.

a) Mostre que a função de onda plana monocromática $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \tilde{q}z)}$ é solução da equação diferencial acima. Encontre a relação entre o número de onda complexo, $\tilde{q}$, e a frequência angular, $\omega$, para que $\vec{E}(z,t)$ seja solução. Mostre também que $\tilde{q}$ se torna real no caso de um meio isolante.

b) Encontre a constante dielétrica complexa, $\tilde{K}$, usando a relação entre o número de onda e a constante dielétrica, $\tilde{q}^2 = \tilde{K}\frac{\omega^2}{c^2}$. Verifique que a parte real de $\tilde{K}$ é igual a $K$ , como esperado, e explicite a parte imaginária de $\tilde{K}$.

c) Faça a aproximação para baixas frequências na expressão da constante dielétrica complexa do item (b) e calcule o índice de refração complexo, $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{K}}$ . Mostre que as partes real e imaginária de $\tilde{n}$ são iguais neste caso.

d) A profundidade de penetração da onda no meio condutor, $\delta$, é dada pelo inverso da parte imaginária do número de onda, $q_i$, ou seja, $\delta = 1/q_i$. Lembre-se de que $\tilde{q} = \tilde{n}\frac{\omega}{c}$ e calcule a profundidade de penetração para a prata (Ag) na região de micro-ondas ($f = \frac{\omega}{2\pi} = 10\text{GHz}$), para a qual vale a aproximação do item (c). A condutividade da prata nesta faixa de frequências é $\sigma_{Ag} = 3 \times 10^{+7}(\Omega m)^{-1}$. Aproxime o resultado do cálculo e obtenha a ordem de grandeza de $\delta_{Ag}$ (1 m, 10 cm, 1 cm ...).

Q3. Considere 2 fótons que se propagam, ao longo do eixo $x$, em sentidos opostos. As energias dos fótons são 5 MeV e 2 MeV, respectivamente.

a) Calcule a velocidade relativa entre os fótons.

b) Qual é o valor da energia total do sistema?

c) Qual é momento total do sistema?

d) Calcule a energia de repouso do sistema.

Q4. Um fóton de raio-X com comprimento de onda $\lambda = 10^{-10}$ m, é retroespalhado em um experimento Compton, ou seja, o ângulo de espalhamento é de $180^o$ em relação ao eixo de incidência.

a) Calcule a frequência do fóton retroespalhado.

b) Quais são a direção e o sentido do momento do elétron ejetado no espalhamento, em relação à do fóton incidente?

c) Qual é o módulo da velocidade do elétron ejetado no espalhamento?

Q5. Um recipiente cilíndrico de seção reta circular $A$ e base fixa foi posicionado verticalmente sobre uma superfície plana e preenchido com um gás ideal. Sobre sua extremidade superior, aberta, foi perfeitamente ajustado um êmbolo circular móvel de massa $M$. Suponha que o êmbolo permaneça orientado horizontalmente e só deslize para cima e para baixo, sem atrito, em contato com a parede interna do cilindro. Considere dada a razão $\gamma$ entre os calores específicos do gás a pressão constante e a volume constante.

a) Calcule a pressão de equilíbrio para o gás no recipiente, sendo $p_0$ a pressão atmosférica.

b) Escreva a expressão para a variação da pressão $p$ em termos da variação do volume $V$ decorrente de um pequeno deslocamento do êmbolo. Suponha que, para pequenos deslocamentos do êmbolo, os estados do gás sejam descritos por um processo quase-estático adiabático.

c) Determine a força adicional exercida sobre o êmbolo quando o mesmo tiver um deslocamento $dx$ em relação à posição de equilíbrio.

d) Obtenha a frequência angular para pequenas oscilações do êmbolo a partir da posição de equilíbrio, em termos de $V$, $A$, $M$, $p_0$ e $\gamma$.

# EUF

# Exame Unificado
# das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2015

15 abril 2015

Parte 2

---

## Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- Não é necessário devolver o formulário.

---

**Boa prova!**

Q6. Uma partícula de massa $m$ está submetida a uma força central conservativa cuja energia potencial é dada por $U(r) = k\left(r^2 - a^2\right) \mathrm{e}^{-b\,r^2}$, em que $r$ é a coordenada radial esférica, e $k$, $a$ e $b$ são constantes reais e positivas.

a) Determine as unidades das constante $k$, $a$ e $b$ no SI (Sistema Internacional de Unidades).

b) Esboce um gráfico da função $U(r)$, determinando seus pontos de máximo e mínimo em função dos parâmetros dados.

c) Determine as faixas de energia $E$ da partícula para as quais (i) a partícula está em órbitas ligadas e (ii) não ligadas. (iii) Determine as condições, se existem, para a existência de órbitas com raio constante.

d) Determine a força que age sobre a partícula, diga quais as situações de equilíbrio, se existirem, e, em caso afirmativo determine a frequência de oscilação da partícula para movimentos radiais próximos do(s) ponto(s) de equilíbrio estável.

Q7. Uma partícula de massa $m$ está confinada sobre uma superfície esférica de raio fixo $a$, e nenhuma força externa age sobre a mesma.

a) Determine a lagrangiana da partícula usando coordenadas apropriadas no espaço tridimensional ($\mathbb{R}^3$) e estabeleça a equação de vínculo.

b) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, encontre as equações de movimento e determine a força de vínculo, i.e., determine o multiplicador de Lagrange e interprete o resultado.

c) Estabeleça as constantes do movimento da partícula.

d) Supondo, agora, que o raio da esfera varia no tempo com a função $a(t) = a_0\,(1 + \cos\omega t)$, com $a_0$ e $\omega$ constantes, determine as constantes de movimento da partícula.

Q8. Seja uma partícula livre de massa $m$ confinada a uma circunferência de perímetro $L$.

a) Escreva a equação de Schroedinger correspondente.

b) Calcule a função de onda *normalizada* $\psi = \psi(t,x)$, onde $x$ é a posição da partícula ($0 \leq x < L$), supondo que ela tenha valores bem definidos de momento e energia: $p$ e $E$, respectivamente.

c) Supondo que a partícula esteja em um auto-estado de energia, quais são os dois menores autovalores correspondentes (não nulos)?

d) Seja uma partícula em um auto-estado de energia com o menor valor não nulo de energia. Escreva sua função de onda para que tenha uma densidade de probabilidade de ser encontrada entre $x$ e $x + \delta x$ igual a $(2/L)[\cos(2\pi x/L)]^2$. (Lembrar que $(\cos x)^2 = (\cos 2x + 1)/2$.)

Q9. Seja um sistema composto por um par **A** e **B** de spins 1/2 descrito pelo estado

$$|\psi\rangle = \alpha\left(|z_+^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_-^{\mathbf{B}}\rangle - |z_-^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_+^{\mathbf{B}}\rangle\right)$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x|x_\pm^{\mathbf{A}}\rangle &= \pm\frac{\hbar}{2}|x_\pm^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle x_\pm^{\mathbf{A}}|x_\pm^{\mathbf{A}}\rangle = 1, &(1)\\
\hat{S}_y|y_\pm^{\mathbf{A}}\rangle &= \pm\frac{\hbar}{2}|y_\pm^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle y_\pm^{\mathbf{A}}|y_\pm^{\mathbf{A}}\rangle = 1, &(2)\\
\hat{S}_z|z_\pm^{\mathbf{A}}\rangle &= \pm\frac{\hbar}{2}|z_\pm^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle z_\pm^{\mathbf{A}}|z_\pm^{\mathbf{A}}\rangle = 1, &(3)
\end{aligned}$$

(e analogamente para **B**) e onde escrevemos os operadores de spin como

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

na base de auto-estados de $\hat{S}_z$:

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Responda:

a) Qual é o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $|\psi\rangle$ esteja normalizado?

b) Qual é a probabilidade de se medir na direção $z$: $-\hbar/2$ para o spin **A** e $+\hbar/2$ para o spin **B**?

c) Qual é a probabilidade de se medir na direção $x$: $+\hbar/2$ para o spin **A** e $-\hbar/2$ para o spin **B**?

d) Qual é a probabilidade de se medir na direção $z$ $-\hbar/2$ para o spin **A** e na direção $x$ $+\hbar/2$ para o spin **B**?

Q10. Considere um sistema composto por um número grande $N$ de moléculas distinguíveis, que não interagem entre si. Cada molécula tem dois estados de energia possíveis: 0 e $\epsilon > 0$.

a) Obtenha a densidade de entropia $S/N$ do sistema como função apenas da energia média por molécula $E/N$, de $\epsilon$ e da constante de Boltzmann $k_B$.

b) Considerando o sistema em equilíbrio térmico à temperatura inversa $\beta = 1/k_B T$, calcule $E/N$.

c) Qual o valor máximo para $E/N$ no caso acima? Compare com o valor máximo dessa grandeza caso fosse possível que todos os elementos do sistema estivessem no estado de energia máxima.