EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

05 de abril de 2016

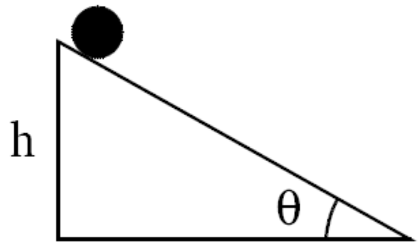
Parte 1

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  mecânica clássica, física moderna, mecânica quântica e termodinâmica.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na folha correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **Não escreva nada no formulário.**
  Devolva tanto o caderno de questões quanto o formulário ao fim da prova. O formulário será utilizado novamente na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. Uma esfera de bronze sólida de massa m e raio r rola sem deslizar ao longo de um plano inclinado após ser solta do repouso de uma altura h. O momento de inércia da esfera em relação a um eixo que passa pelo seu centro é $I = 2mr^2/5$ e a aceleração da gravidade é g. O plano inclinado forma um ângulo θ com a horizontal, como mostra a figura.



(a) Há atrito entre a esfera e o plano inclinado? Como você chegou a essa conclusão?
(b) Há conservação de energia mecânica? Justifique sua resposta levando em consideração o respondido no item (a).
(c) Utilizando considerações de energia, determine a velocidade com que a esfera atinge a base do plano inclinado.
(d) Obtenha a velocidade na base do plano inclinado já calculada no item (c) utilizando agora considerações de dinâmica (ou seja, aplicando a segunda lei de Newton).

Q2. Considere uma massa m presa à extremidade de uma haste inextensível de massa desprezível e comprimento l. A outra extremidade da haste está presa a um ponto fixo e o sistema haste-massa move-se em um plano vertical num local onde a aceleração da gravidade é g.

(a) Escreva a Lagrangiana do sistema.
(b) Obtenha a equação de movimento que descreve o sistema.
(c) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e classifique-os quanto à estabilidade, justificando suas respostas.
(d) Encontre a frequência de pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável.

Q3. No processo Compton de espalhamento relativístico, um fóton de energia-momento $(E_0, \vec{p}_0)$ incide sobre um elétron de massa m em repouso. É observado um fóton emergente em uma direção que forma um ângulo θ com a direção de incidência, com energia-momento $(E, \vec{p})$.
(a) Denotando o momento do elétron espalhado por $\vec{p}_e$, escreva as equações para a conservação de energia-momento.
(b) Obtenha a relação

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2}\left(1 - \cos\theta\right).$$

(c) Supondo que o comprimento de onda do fóton incidente seja λ_0, determine o comprimento de onda do fóton espalhado quando $\theta = \pi/2$.
(d) Nas mesmas condições do item anterior, qual é a energia cinética do elétron espalhado? Expresse a resposta em termos de λ_0, $\lambda_C \equiv h/(mc)$ e constantes universais.

Q4. Considere a dinâmica quântica unidimensional de uma partícula de massa m sob a ação de um potencial harmônico. Seu Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

onde ω é a frequência angular do oscilador e

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}.$$

Os auto-estados $|n\rangle$ $(n = 0,1,\ldots)$ do Hamiltoniano são não-degenerados, são auto-estados do operador número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ e satisfazem as relações

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ , \qquad \hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ .$$

(a) Calcule os elementos de matriz dos operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ na base dos auto-estados do Hamiltoniano.
(b) Calcule o valor esperado do operador $\hat{x}^2$ para um auto-estado qualquer $|n\rangle$.
(c) Calcule a razão entre a energia total média e a energia potencial média para um auto-estado qualquer $|n\rangle$.
(d) Use a equação de movimento dos operadores na representação de Heisenberg

$$i\hbar\frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} = \left[\hat{O}_H(t),\hat{H}\right]\ ,$$

onde $\hat{O}_H\,(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{O}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$, para obter a evolução temporal do operador $\hat{a}_H\,(t)$.

Q5. Uma máquina térmica de um gás ideal monoatômico funciona de acordo com um ciclo que tem inicialmente uma expansão adiabática partindo de um estado A de volume V_0 até um estado B cujo volume é rV_0 (com $r > 1$). O processo é seguido por uma contração isotérmica de B até o estado C, que possui o mesmo volume de A. Finalmente, o ciclo se completa por uma compressão isovolumétrica de C até A.
(a) Represente no diagrama $P - V$ o ciclo realizado por esta máquina térmica.
(b) Calcule (i) o trabalho total realizado pelo gás e (ii) o calor injetado no gás, ambos durante um ciclo completo. Deixe sua resposta em função de r, $\gamma \equiv c_P/c_V$ e das temperaturas extremas $T_{\max}$ e $T_{\min}$, que são, respectivamente, as temperaturas máxima e mínima entre as quais o ciclo opera. Lembre-se de que $c_P - c_V = R$.
(c) Determine o rendimento do ciclo.
(d) Escreva o rendimento do ciclo apenas em função de $T_{\max}$ e $T_{\min}$ (caso já não o tenha feito no item (c)). Considere o caso em que $T_{\max} = 2T_{\min} > 0$. Determine a razão entre o rendimento desta máquina e o rendimento de um ciclo de Carnot. Qual tem o maior rendimento? Isso faz sentido com o que se espera da segunda lei da termodinâmica? Justifique sua resposta.

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

06 de abril 2016

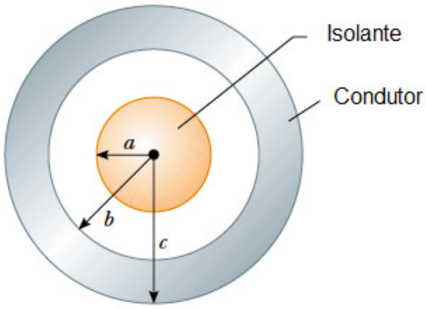
Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
- Esta prova contém problemas de:
  eletromagnetismo, mecânica quântica, física moderna e mecânica estatística.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na folha correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **Não escreva nada no formulário.**
  Devolva tanto o caderno de questões quanto o formulário ao fim da prova.

Boa prova!

Q6. Uma esfera isolante sólida de raio a tem densidade de carga uniforme ρ e carga total Q. Uma esfera oca condutora não carregada, cujos raios interno e externo são b e c, respectivamente, é concêntrica à esfera isolante, como mostra a figura abaixo.



(a) Determine a magnitude do campo elétrico nas regiões:
(i) $r < a$; (ii) $a < r < b$; (iii) $b < r < c$ e (iv) $r > c$.
(b) Ache a carga induzida por unidade de área nas superfícies interna e externa do condutor.
(c) Esboce o gráfico da magnitude do campo elétrico E versus r. Identifique em seu gráfico cada uma das regiões citadas no item (a).

Q7. Considere as equações de Maxwell na forma diferencial e resolva cada item abaixo.

(a) Derive, mostrando todos os passos, as equações de onda no vácuo em sua forma vetorial para os campos elétrico e magnético. Lembre-se:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \nabla^2\mathbf{V} \quad \text{e} \quad \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{V}) = 0$$

(b) Escreva a equação de onda para uma função escalar qualquer $f(\vec{r},t)$ e, comparando com as expressões obtidas no item (a), determine a velocidade de propagação para ambos os campos.
(c) Uma possível solução da equação obtida no item (a) é a solução do tipo onda plana linearmente polarizada. Suponha um campo eletromagnético do tipo onda plana linearmente polarizada que esteja se propagando na direção $\hat{z}$. Considerando que ω é a frequência angular, k o número de onda, E_0 e B_0 as amplitudes dos campos elétrico e magnético, respectivamente, escreva explicitamente qual é o módulo e a direção de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em função da posição e do tempo.
(d) Partindo agora das equações de Maxwell na presença de cargas e correntes, derive a equação que relaciona as densidades de carga e de corrente elétrica (equação da continuidade). Que lei de conservação é expressa matematicamente por esta equação?

Q8. Considere uma partícula de spin 1/2 sob a ação de um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. O Hamiltoniano para este problema é dado por

$$\hat{H} = -\gamma B \hat{S}_z,$$

onde γ é uma constante. Sejam os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ tais que $\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm(\hbar/2) |\pm\rangle$.

(a) Quais são os auto-valores do Hamiltoniano?
(b) No instante $t = 0$ a partícula se encontra no estado $|\psi(0)\rangle = [|+\rangle - |-\rangle]/\sqrt{2}$. Calcule o estado da partícula em um instante $t > 0$ qualquer.
(c) Calcule a média dos operadores $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ para qualquer instante $t \geq 0$. Lembre-se de que $\hat{S}_x |\pm\rangle = (\hbar/2) |\mp\rangle$ e $\hat{S}_y |\pm\rangle = \pm i(\hbar/2) |\mp\rangle$.
(d) Qual é o menor valor de $t > 0$ para o qual o estado volta a ser igual ao estado inicial?

Q9. Se dois eventos no espaço-tempo são separados espacialmente pelo vetor $\Delta x\ \hat{x} + \Delta y\ \hat{y} + \Delta z\ \hat{z}$ e temporalmente por Δt, o intervalo invariante entre eles, cujo valor independe do referencial inercial, é definido como

$$\Delta s^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2.$$

(a) Eventos (1) e (2) ocorrem em posições **distintas** (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2), respectivamente, de um dado referencial inercial (S) e são tais que o intervalo invariante é positivo. Existe um referencial inercial onde tais eventos ocorrem em um mesmo ponto do espaço? Justifique.
(b) Nas mesmas condições do item (a), o evento (2) poderia ter sido causado pelo evento (1)? Justifique sua resposta considerando a propagação de um sinal de (1) para (2) com velocidade $\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$.
(c) Um relógio está em repouso em um referencial (S′) que se move com velocidade $\vec{V}$ em relação a (S).

(i) Qual é o sinal do intervalo invariante entre eventos que caracterizam duas posições sucessivas dos "ponteiros do relógio" (desconsidere as dimensões espaciais do relógio)?

(ii) Obtenha a relação entre o intervalo de tempo próprio $\Delta t'$ (medido em S′) e o intervalo de tempo Δt medido em (S).

(d) A separação espacial entre uma fonte F e um detector D de partículas é $L\hat{x}$, no referencial do laboratório (referencial S). Considere os eventos E_F e E_D, de produção e detecção de uma partícula, respectivamente. Suponha que essa partícula se mova de F a D com velocidade constante $\vec{V} = V_0\hat{x}$ no referencial do laboratório.

(i) Quais são as separações no espaço Δx e no tempo Δt entre E_F e E_D no referencial do laboratório?

(ii) Seja L' a distância entre F e D no referencial da partícula. Quais são as separações no espaço $\Delta x'$ e no tempo $\Delta t'$ entre E_F e E_D no referencial da partícula?

(iii) Determine a relação entre L' e L.

Q10. Num modelo para um cristal sólido podemos supor que os N átomos sejam equivalentes a $3N$ osciladores harmônicos clássicos, unidimensionais, independentes, de massa m, que oscilam com a mesma frequência angular ω em torno de sua posição de equilíbrio. A uma distância x desta posição a energia potencial é dada por $U = m\omega^2 x^2/2$. Conhecendo-se alguns dados experimentais, é possível estimar, em termos da distância inter-atômica a baixas temperaturas d, a raiz do deslocamento quadrático médio dos átomos quando ocorre a fusão. A resolução dos itens abaixo permite fazer esta estimativa. Suponha que o sólido se encontre em equilíbrio térmico a uma temperatura absoluta T.
(a) Considere que o número de estados numa célula do espaço de fase (x,p) seja dado por $(dxdp)/h$, onde h é a constante de Planck. Obtenha a função de partição para o oscilador harmônico, $Z(T,\omega)$.
(b) Calcule o número médio de osciladores cuja posição se encontra entre x e $x + dx$.
(c) Obtenha uma expressão para a energia potencial média, $\langle U \rangle$ por oscilador unidimensional. Compare o resultado com o valor esperado pelo teorema da equipartição.
(d) Seja x_0^2 o deslocamento quadrático médio em torno do equilíbrio quando o sólido se funde e seja $f = x_0/d$. Usando $\langle U \rangle = m\omega^2 x_0^2/2$, estime f para um dado elemento cuja massa atômica é $m = 1.0 \times 10^{-25}$ kg, a temperatura de fusão é $T_F = 1400$ K, $d = (10/3)$ Å $= (10/3) \times 10^{-10}$ m e a frequência é tal que $\hbar\omega/k_B = 300$ K.