EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2017

04 de abril de 2017

Parte 1

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código.
- Esta prova contém problemas de:
  mecânica clássica, mecânica quântica, física moderna e termodinâmica.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na folha correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação. Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **Não escreva nada no formulário.**
  Devolva tanto o caderno de questões quanto o formulário ao fim da prova. O formulário será utilizado novamente na prova de amanhã.

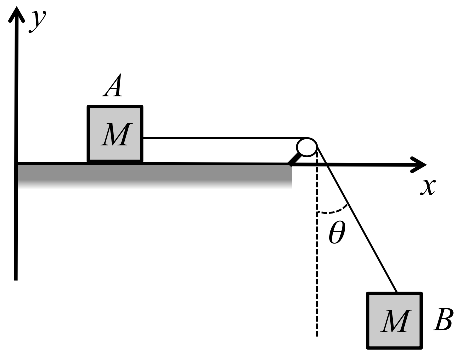
Boa prova!

Q1. A aceleração da gravidade g pode ser medida com razoável precisão usando-se um pêndulo simples que consiste de um corpo de massa m preso a um fio de massa desprezível e comprimento l .

(a) Encontre a expressão do período do pêndulo em função dos seus parâmetros.

(b) Um grupo de estudantes foi ao laboratório para obter uma medida precisa da aceleração da gravidade no local. Para isso construiu um pêndulo simples com uma massa metálica presa ao teto do laboratório por um fio fino. A massa metálica tem a forma de uma esfera de raio $r = 8{,}00 \pm 0{,}05$ cm e massa $m = 10{,}0 \pm 0{,}1$ kg presa ao fio de forma que em repouso o centro de massa da esfera fica a $4{,}00 \pm 0{,}02$ m do teto. A massa do fio é $7{,}4 \pm 0{,}2$ g. O período de oscilação foi medido para diferentes deslocamentos iniciais laterais entre $5{,}0 \pm 0{,}1$ e $10{,}0 \pm 0{,}1$ cm. Os estudantes determinaram que nesse intervalo de deslocamentos laterais o período não depende da posição inicial, dentro da incerteza experimental e que o pêndulo realizou 10 oscilações completas em $40{,}0 \pm 0{,}5$ s. Determine o valor de g encontrado, com a incerteza experimental. Considere, se necessário, $\pi^2 = 9{,}86960$.

Q2. Dois corpos, cada um de massa M, estão ligados por uma corda uniforme inextensível de comprimento l. O corpo A está sobre uma mesa uniforme e o corpo B está pendurado na lateral, a corda passando por uma polia de raio desprezível sem atrito, como mostrado na figura. Despreze o atrito entre A e a mesa.



(a) Encontre a aceleração comum dos corpos, se o ângulo θ é **mantido constante e igual a zero** e a massa da corda é desprezível.

(b) Considere agora o movimento mais geral em que o ângulo θ também pode variar. Suponha que θ é sempre menor que $\pi/2$ e que o corpo B nunca toca na mesa. Escreva a Lagrangiana do sistema e as equações de movimento (**não tente resolver as equações**). Mostre que recuperamos o resultado do item (a) se fizermos $\theta = 0$.

(c) Suponha agora que θ é novamente mantido constante e igual a zero, mas a corda tem massa **não desprezível** m. Escreva a Lagrangiana do sistema e as equações de movimento. Não é necessário resolver as equações.

Q3. Uma partícula com massa de repouso m e energia total relativística igual a duas vezes sua energia de repouso, colide frontalmente com uma partícula idêntica (mesma massa de repouso m), inicialmente em repouso. Após a colisão forma-se uma única partícula possuindo massa de repouso M (colisão totalmente inelástica). Nos itens abaixo, expresse suas respostas **em termos de** c **e** m.

(a) Calcule o módulo v da velocidade da partícula incidente antes da colisão.
(b) Usando conservação de energia-momento,

(i) determine o módulo V da velocidade da partícula resultante em termos da velocidade v da partícula incidente. Use o resultado do item (a) para obter o valor numérico de V/c.
(ii) determine a massa M da partícula resultante.

(c) Calcule a energia cinética da partícula resultante.

Q4. Considere a equação de Schrödinger uni-dimensional **independente do tempo** para energias E no intervalo $[0,U_0]$ ($U_0 > 0$) de uma partícula de massa m num potencial de poço quadrado dado por

$$V(x) = \begin{cases} U_0, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } 0 < x < L, \\ U_0, & \text{se } x > L. \end{cases}$$

(a) O espectro de energias E é discreto ou contínuo? Por quê?
(b) Escreva a forma geral da função de onda nas 3 regiões do potencial.
(c) Escreva a equação cuja solução dá o espectro de energias. Não é necessário resolver essa equação.
(d) O que acontece com o espectro de energias no limite em que $L \to 0$?

Q5. O motor de Stirling é uma máquina térmica cujo ciclo é composto por dois processos isotérmicos e dois processos isocóricos (isovolumétricos). Considere que 1 mol de um gás *monoatômico ideal* ($C_V = 3R/2$) atravesse um ciclo de Stirling formado pelos seguintes processos consecutivos: (1) compressão isotérmica até 1/3 do volume inicial V_0 à temperatura T_0; (2) aquecimento a volume constante até o dobro da temperatura inicial T_0; (3) expansão isotérmica até o volume inicial V_0; (4) resfriamento isovolumétrico até a temperatura inicial T_0.

(a) Esboce o ciclo acima num diagrama P x V (pressão por volume).
(b) Determine a variação da energia interna do gás nos processos 1 e 2 em termos de R e T_0.
(c) Determine o trabalho realizado pelo gás no processo 3 em termos de R e T_0.
(d) Determine o rendimento dessa máquina.

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2017

05 de abril 2017

Parte 2

Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**
  Ela deverá ser identificada apenas através do código.
- Esta prova contém problemas de:
  eletromagnetismo, mecânica quântica, física moderna e mecânica estatística.
  Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.
  O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na folha correspondente do caderno de respostas.**
  As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação. Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **Não escreva nada no formulário.**
  Devolva tanto o caderno de questões quanto o formulário ao fim da prova.

Boa prova!

Q6. Dois aros circulares finos encontram-se no plano xy de um sistema de coordenadas, ambos com centro na origem. Um aro tem raio b e uma densidade linear de carga elétrica $-\lambda < 0$ e o outro tem raio $2b$ e uma densidade linear de carga elétrica $2\lambda > 0$.

(a) Calcule o potencial eletrostático $V(z)$ no ponto $P = (0,0,z)$.
(b) Calcule o vetor campo elétrico $\mathbf{E}(z)$ no ponto $P = (0,0,z)$.
(c) Escreva a equação da segunda lei de Newton para uma partícula de carga $q > 0$ e massa m, restrita a se mover ao longo do eixo z e sujeita ao campo elétrico do item (b). Além da força elétrica, nenhuma outra força atua sobre a partícula.
(d) Calcule a frequência de pequenas oscilações para a partícula do item (c) na vizinhança de $z = 0$. Dica: linearize a força em torno de $z = 0$.

Q7. Uma onda eletromagnética plana monocromática que se propaga no vácuo com polarização circular é descrita, **em notação complexa**, pelo campo elétrico $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)}(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})$, onde $\omega = ck$ é a frequência angular, c é a velocidade da luz no vácuo, k é o número de onda, E_0 é uma amplitude real e $i = \sqrt{-1}$.

(a) Encontre o campo elétrico *real* (físico) $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$.
(b) Encontre o campo magnético *real* (físico) $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ usando as equações de Maxwell. Se preferir, utilize $\nabla \to i\mathbf{k}$.
(c) Calcule a densidade de momento linear da onda eletromagnética $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
(d) Calcule a densidade de momento angular da onda eletromagnética $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}$. Dica: use coordenadas cilíndricas $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$.

Q8. Um elétron com energia cinética $E_{\text{cin}} = 22$ eV colide com um átomo de hidrogênio que se encontra inicialmente no estado fundamental. Apenas uma parte da energia do elétron incidente é transferida para o átomo, que passa para um estado excitado com número quântico n. Decorrido um intervalo de tempo Δt após a colisão, o átomo decai para o estado fundamental, emitindo um fóton com energia igual a 10,2 eV.

(a) Usando a aproximação não relativística, determine o comprimento de onda de de Broglie λ do elétron incidente.
(b) Determine o número quântico n do estado excitado do átomo de hidrogênio.
(c) Calcule a incerteza na energia do fóton emitido sabendo que $\Delta t = 10^{-8}$ s.
(d) Justifique a aproximação não relativística utilizada no item (a).

Q9. Considere um sistema quântico cujo espaço de Hilbert é gerado por uma **base ortonormal** de 3 estados $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$. Um estado genérico do sistema pode ser representado nessa base através de um vetor coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, onde x, y e z são coeficientes complexos. A Hamiltoniana do sistema, por sua vez, pode ser representada nessa mesma base através de uma matriz quadrada complexa

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & M_{23} \\ 0 & - & E_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Qual é o valor do único elemento da matriz H que está faltando? Qual é o valor da parte imaginária de E_3?

(b) Um certo observável A atua sobre os estados da base da seguinte forma

$$\begin{aligned} A|1\rangle &= 2|1\rangle, \\ A|2\rangle &= 2|2\rangle, \\ A|3\rangle &= |3\rangle. \end{aligned}$$

Escreva a matriz que representa A nessa base. Este observável pode ser medido simultaneamente com a energia? Justifique.

(c) Quais são os autovalores de energia do sistema?

(d) Suponha que $E_1 = 1$, $E_2 = E_3 = 3$ e $M_{23} = 1$ e que o sistema seja preparado no instante $t = 0$ no estado $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Encontre o estado para $t > 0$.

Q10. Considere um sistema formado por N íons magnéticos localizados de spin 1 em contato com um reservatório térmico à temperatura T. O sistema é descrito de forma simplificada pelo Hamiltoniano

$$H = D \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 - h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i,$$

onde σ_i é a projeção z (adimensional) do spin i, que pode assumir os valores $0, +1$ e -1, $h > 0$ é um campo magnético externo e $D > 0$ é um termo de anisotropia.

(a) Determine a função de partição do sistema.

(b) Determine a energia livre de Helmholtz por íon como função da temperatura.

(c) Determine a energia interna por íon como função da temperatura.

(d) Suponha agora que $h = 0$. Determine o calor específico como função da temperatura.