EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2018

03 de outubro de 2017

Parte 1

Esta prova contém questões de mecânica clássica, mecânica quântica, física moderna e termodinâmica. Todas as questões têm o mesmo peso.

Boa prova!

Q1. Uma partícula de massa m movimenta-se num plano vertical (plano xz, sendo x a direção horizontal e z a direção vertical) sob a ação da força gravitacional $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{z}}$, onde g é a aceleração da gravidade. No instante inicial $t = 0$, a partícula está na origem e sua velocidade é $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\theta)\hat{\mathbf{x}} + (v_0 \sin\theta)\hat{\mathbf{z}}$, onde $v_0 > 0$ e $0 < \theta < \pi/4$.
(a) Escreva as equações de movimento para as componentes x e z da posição da partícula.
(b) Determine as componentes $v_x(t)$ e $v_z(t)$ da velocidade da partícula como funções do tempo.
(c) Determine as componentes $x(t)$ e $z(t)$ da posição da partícula como funções do tempo.
(d) Determine o **vetor** momento angular $\mathbf{L}(t)$ da partícula em relação à origem como função do tempo.
(e) Determine o **vetor** torque $\mathbf{N}(t)$ em relação à origem associado à força gravitacional $\mathbf{F}_g$ (como função do tempo) e encontre a relação entre $\mathbf{L}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

Q2. Uma partícula de massa m movimenta-se em duas dimensões (plano xy) sob a ação de duas forças conservativas cujos potenciais são

$$U_1(y) = \lambda y \qquad \text{e} \qquad U_2(r) = \frac{1}{2}kr^2,$$

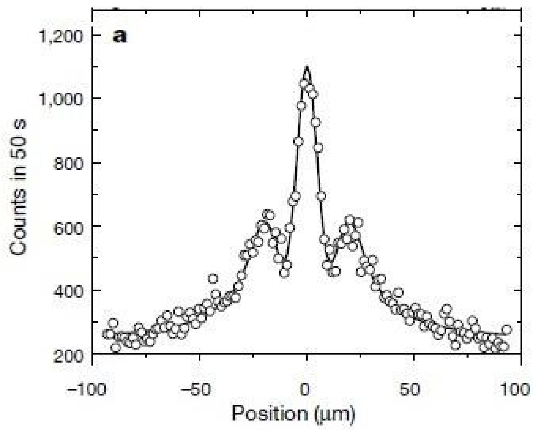
onde λ e k são constantes positivas e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância da partícula à origem do sistema de coordenadas.
(a) Determine o **vetor** força $\mathbf{F}_2$ associada ao potencial $U_2(r)$.
(b) Escreva a lagrangiana da partícula utilizando coordenadas polares no plano r e θ e determine as equações de movimento correspondentes.
(c) Encontre a hamiltoniana do sistema. Lembre-se de que a hamiltoniana deve ser escrita em termos das coordenadas r e θ e dos seus momentos canonicamente conjugados.
(d) Encontre o **vetor** momento angular $\mathbf{L}$ em termos das coordenadas polares r e θ. Determine sob qual condição o momento angular da partícula é conservado.

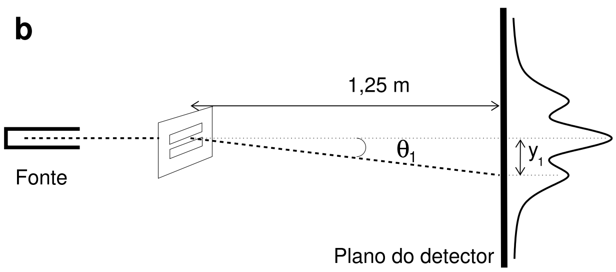
Q3. Considere a dinâmica quântica de um feixe de partículas de massa m que se movem exclusivamente ao longo do eixo x de um sistema de coordenadas, no sentido de x positivo. Elas estão sujeitas a um potencial degrau ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ V_0, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) Se a energia total E de cada partícula é tal que $E > V_0$, encontre a forma geral da solução da equação de Schrödinger independente do tempo nas duas regiões do potencial.
(b) Segundo a Mecânica Clássica, quando $E > V_0$ todas as partículas passam pelo degrau de potencial. Segundo a Mecânica Quântica, entretanto, algumas partículas são refletidas. Qual é o percentual de partículas refletidas pelo degrau de potencial para $E > V_0$?
(c) Considere agora que $E < V_0$. Qual é a forma geral da solução da equação de Schrödinger independente do tempo para $x > 0$?
(d) Determine a probabilidade de reflexão quando $E = V_0/2$.

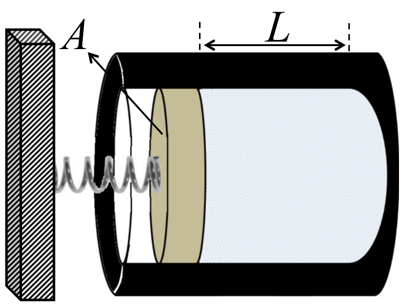
Q4. A figura **a** abaixo [retirada do artigo *Wave-particle duality of* C_{60} *molecules* de M. Arndt *et al.*, Nature **401**, 680 (1999)] mostra o padrão de difração obtido pela passagem de um feixe de moléculas de fulereno (C_{60}) por uma grade de difração. Ela mostra a contagem de moléculas no detector versus a posição vertical y (em μm) medida a partir da interseção da direção do feixe com o plano do detector, como mostrado esquematicamente na figura **b**. O plano do detector estava a uma distância de 1,25 m da grade de difração.





(a) A partir dos dados do gráfico, estime a posição y_1 do primeiro pico ao lado do máximo central de difração e determine o ângulo θ_1 correspondente.
(b) Ao ver o padrão de difração, uma estudante supôs que se tratava de um padrão de interferência de uma onda eletromagnética passando por uma fenda dupla. Ela foi informada de que o espaçamento entre as fendas era de 100 nm. A partir dessas hipóteses e com base no ângulo do primeiro pico obtido no item (a), calcule o comprimento de onda λ da onda incidente.
(c) Sabendo que a velocidade de cada molécula de C_{60} no feixe é de 220 m/s, calcule o módulo do momento linear da molécula. A massa molar do carbono é 12 g/mol.
(d) Utilizando o resultado do item (c), calcule o comprimento de onda de de Broglie de uma molécula de C_{60} no feixe.

Q5. Uma região cilíndrica de seção transversal $A = 5 \times 10^{-3}$ m^2 e cujo comprimento é inicialmente $L = 25$ cm é ocupada por 5×10^{-2} mol de um gás monoatômico ideal ($c_V = 3R/2 = 12{,}5\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$). Uma das bases do cilindro é um êmbolo móvel sem atrito acoplado a uma mola de constante elástica 400 N/cm inicialmente não deformada e fixa num anteparo imóvel, como mostrado na figura. O gás está em equilíbrio, isolado termicamente, a uma temperatura de 300 K e uma pressão externa de 1 atm $= 1\times10^5$ N/m^2. Fornece-se então quase-estaticamente uma certa quantidade de calor Q ao gás e ele se expande, empurrando o êmbolo e comprimindo a mola de 2 cm.



(a) Determine a pressão final do gás.
(b) Determine a temperatura final do gás.
(c) Determine o trabalho realizado pelo gás.
(d) Determine o calor Q fornecido ao gás.

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2018

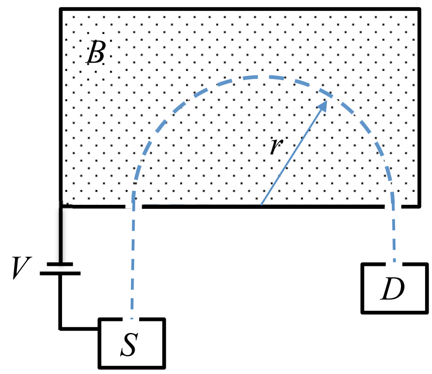
04 de outubro 2017

Parte 2

Esta prova contém questões de eletromagnetismo, mecânica quântica, física moderna e mecânica estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.

Boa prova!

Q6. Um espectrômetro de massa simples pode ser construído como esquematizado na figura. Um feixe de íons positivos de massa m e carga q (linha pontilhada) sai de uma fonte S, é acelerado pela diferença de potencial elétrico V e penetra por uma fenda de entrada numa câmara onde há um campo magnético uniforme B saindo perpendicularmente do plano do papel. Após percorrer uma trajetória semicircular de raio r, o feixe sai pela fenda de saída e é detectado por um detector D se a massa for compatível com a trajetória. Dessa forma, é possível selecionar íons pelo valor de sua massa, ajustando o valor de B. As fendas de entrada e de saída da câmara são iguais. Todo o sistema está em vácuo. Despreze a interação gravitacional do feixe.



(a) Determine o módulo da velocidade dos íons ao passarem pela fenda de saída em termos de V, m e q.
(b) Determine m em função de V, B, r e q.
(c) A resolução das medidas de massa do aparelho é limitada pelo tamanho da fenda de saída, que determina o erro do raio r. Considere uma situação em que $r = 10$ cm, $V = 4{,}0 \times 10^3$ V, $B = 1{,}00$ T e que cada íon tem um elétron a menos que o átomo neutro correspondente. Se as fendas têm tamanho 100 μm, qual é a resolução das medidas de massa?
(d) É possível usar esse aparelho para distinguir os isótopos de carbono ^{12}C de ^{14}C? Justifique.

Q7. Considere a propagação de ondas eletromagnéticas num meio linear, homogêneo e isotrópico com condutividade elétrica σ, permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ, na ausência de fontes de cargas elétricas livres (ρ_F=0).

(a) Escreva as equações de Maxwell para os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ no meio, em termos de σ, ϵ e μ.
(b) Encontre a equação diferencial que envolve apenas o campo elétrico $\mathbf{E}$.
(c) Considere uma solução do tipo onda plana $\mathbf{E}\,(x,t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$ e obtenha a relação entre k e ω em termos de σ, ϵ e μ.
(d) Com relação ao resultado do item (c), interprete fisicamente a diferença entre os casos $\sigma \neq 0$ e $\sigma = 0$.

Q8. Considere um sistema quântico cujo espaço de Hilbert é gerado por uma **base ortonormal** de 3 estados, $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$. O hamiltoniano do sistema pode ser representado nessa base através da matriz quadrada

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

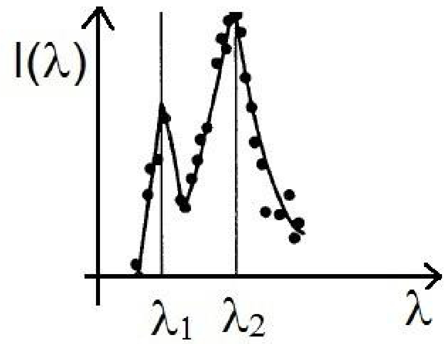
(a) Quando o sistema é preparado através de um certo protocolo experimental P_1, medidas da sua energia retornam o valor E_0 com probabilidade 1. Qual é o estado preparado por P_1?

(b) Quando prepara-se o sistema através de outro protocolo experimental P_2, as medidas de energia retornam E também com probabilidade 1. Quais são todos os estados possíveis preparados pelo protocolo P_2?
(c) No instante $t = 0$, é ligada uma perturbação externa de tal forma que o hamiltoniano do sistema se torna, na mesma base acima,

$$H = H_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W \\ 0 & W & 0 \end{pmatrix}.$$

Quais são os auto-valores e auto-vetores da energia na presença da perturbação externa?
(d) Antes de $t = 0$, o sistema havia sido preparado no estado $|2\rangle$. Qual é o estado do sistema após a ligação da perturbação externa, ou seja, para $t > 0$?

Q9. A figura abaixo mostra a intensidade dos raios-X espalhados $I(\lambda)$ com comprimento de onda λ por um alvo de grafite no famoso experimento de Compton de 1923. Os raios-X são detectados a um ângulo θ fixo em relação à direção de incidência no alvo. Parte dos fótons sofre espalhamento elástico (sem perda de energia) e outra parte sofre espalhamento Compton. Como resultado, nota-se que $I(\lambda)$ apresenta dois picos em comprimentos de onda λ_1 e $\lambda_2 > \lambda_1$.



(a) Qual o comprimento de onda dos raios X incidentes e o dos raios X que sofreram espalhamento Compton? Justifique sua resposta.

Considere um evento de espalhamento Compton em que a energia do fóton incidente no alvo é de 23 keV e o ângulo de espalhamento é $\theta = 60^o$.

(b) Calcule o comprimento de onda do fóton incidente.
(c) Calcule o comprimento de onda do fóton espalhado.
(d) Calcule a energia cinética do elétron após o espalhamento.

Q10. Considere um gás de $N \gg 1$ partículas pontuais **clássicas** de massa m em uma caixa cúbica ($0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$ e $0 \le z \le L$) nas proximidades da superfície da Terra. As partículas estão sujeitas ao potencial gravitacional $V(z) = mgz$, onde g é a aceleração gravitacional e z é a altura da partícula em relação à superfície da Terra. O gás encontra-se em equilíbrio à temperatura T.

(a) Escreva a hamiltoniana de uma única partícula na caixa como função de suas coordenadas e das componentes do momento linear p_x, p_y e p_z.
(b) Encontre a função de partição do sistema de N partículas **clássicas**.
(c) Suponha que $mgL \ll k_B T$ e encontre a função de partição nesse regime. Você pode usar a seguinte aproximação: $e^{-x} \approx 1 - x$, se $x \ll 1$.
(d) Obtenha a pressão do gás no regime do item (c) em função de N, T e $V = L^3$.