EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2018

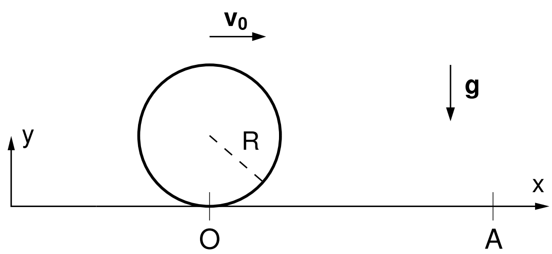
03 de abril de 2018

Parte 1

Esta prova contém questões de mecânica clássica, mecânica quântica, física moderna e termodinâmica. Todas as questões têm o mesmo peso.

Boa prova!

Q1. Um disco fino homogêneo de raio R e massa m move-se ao longo de uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o disco e a superfície horizontal é μ. No instante inicial (ver figura abaixo), a coordenada x do centro do disco está em O, a velocidade do seu centro de massa é $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{x}}$ e a velocidade angular de rotação (em torno do eixo que passa pelo centro e é normal ao disco) é nula. **Apenas quando atinge o ponto A o disco passa a rolar sem deslizar:** enquanto a coordenada x do seu centro percorre o trecho de O até A, a força de atrito cinético age de forma a mudar tanto a velocidade do centro de massa quanto a velocidade angular de rotação. Considere que o plano do disco se mantém paralelo ao plano xy e a aceleração da gravidade é $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$.



(a) Indique esquematicamente todas as forças que atuam sobre o disco no trecho OA.
(b) Determine os **módulos** das acelerações linear a e angular α do disco em termos de R, μ e g no trecho OA. O momento de inércia do disco em relação ao eixo que passa pelo seu centro e é normal ao plano do disco é $I = mR^2/2$.
(c) Determine os **módulos** das velocidades linear v e angular ω do disco para o trecho OA como funções do tempo.
(d) Escreva a relação entre os **módulos** das velocidades linear v e angular ω do disco quando ele passa a rolar sem deslizar (ponto A). Em seguida, determine o instante de tempo t_A em que a coordenada x do centro do disco atinge o ponto A. Expresse sua resposta em termos de v_0, μ e g.

Q2. Considere uma partícula de massa m que se movimenta na superfície interna de um cone cuja ponta é a origem do sistema de coordenadas e cujo eixo é o semi-eixo $z > 0$. A equação da superfície do cone em coordenadas cilíndricas (ρ, φ e z) é $z = \rho$. A partícula está sob a ação do campo gravitacional $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Escreva a lagrangiana da partícula em termos de ρ, φ, $\dot{\rho}$ e $\dot{\varphi}$.
(b) Determine as equações de movimento da partícula.
(c) Calcule o **vetor** momento angular da partícula $\mathbf{L}$ em termos das coordenadas cilíndricas ρ, φ e z e dos vetores unitários $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$. Determine qual componente de $\mathbf{L}$ é conservada.
(d) A partir das equações de movimento derivadas no item (b), mostre que a partícula pode apresentar uma órbita circular de raio ρ_0. Determine a frequência angular dessa órbita em termos de g e ρ_0.

Q3. Um **positrônio** é um estado ligado entre um elétron (carga $-e$ e massa m_e) e um anti-elétron (pósitron). A aplicação do modelo de Bohr para este sistema supõe órbitas clássicas circulares do elétron e do pósitron.

(a) Supondo órbitas circulares e trabalhando no referencial do centro de massa, calcule a expressão clássica do momento angular L do sistema em função de e, m_e, ϵ_0 e a distância R entre o elétron e o pósitron.
(b) Aplique a regra de quantização de Bohr ao positrônio e deduza a expressão para os valores

R_n ($n = 1{,}2{,}3{,}...$) dos raios permitidos das órbitas, em termos do raio de Bohr.
(c) Calcule as energias permitidas pela regra de Bohr E_n ($n = 1{,}2{,}3{,}...$) em elétron-volts.
(d) Considere agora uma transição do primeiro estado excitado ($n = 2$) para o estado fundamental ($n = 1$) do positrônio (inicialmente em repouso no referencial do laboratório), seguida da emissão de um fóton. Calcule a velocidade do centro de massa v_{cm} do positrônio no referencial do laboratório após a transição. Considere que $v_{\mathrm{cm}} \ll c$ e despreze a energia cinética de recuo do positrônio em relação à energia do fóton.

Q4. Considere um sistema quântico cujo espaço de Hilbert é gerado por uma **base ortonormal** de 3 estados, $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$, que são todos auto-estados degenerados de um observável D com auto-valores iguais a δ. A atuação do hamiltoniano H do sistema nos estados da base é

$$\begin{aligned} H|1\rangle &= \Omega|1\rangle + \Omega|3\rangle, \\ H|2\rangle &= \Omega|2\rangle + \Delta|3\rangle, \\ H|3\rangle &= \Omega|1\rangle + \Delta|2\rangle + \Omega|3\rangle, \end{aligned}$$

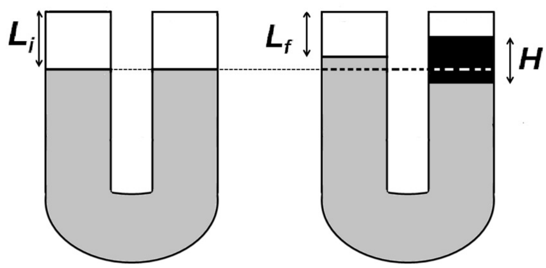
onde Ω e Δ são constantes reais com dimensão de energia.

(a) Escreva a matriz que representa H na base descrita acima.
(b) O observável D pode ser medido simultaneamente com a energia? Justifique sua resposta.
(c) Determine os auto-valores e auto-vetores do hamiltoniano.
(d) No instante $t = 0$, o sistema está no estado

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{\Delta}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}}|1\rangle - \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}}|2\rangle.$$

Encontre o estado $|\psi(t)\rangle$ do sistema para $t > 0$.

Q5. Um tubo em forma de U (figura à esquerda) com seção transversal de área de 20 cm^2 e paredes diatérmicas (isto é, que permitem a passagem de calor) contém água (região cinza, densidade de $1{,}0 \times 10^3$ $\mathrm{kg/m^3}$) e encontra-se aberto em suas extremidades à pressão atmosférica de aproximadamente $1{,}0 \times 10^5$ $\mathrm{N/m^2}$ e a uma temperatura de $3{,}0 \times 10^2$ K, conforme a figura. Na extremidade direita, um êmbolo móvel, impermeável, sem atrito com as paredes e de espessura e massa desprezíveis é ajustado **na superfície do líquido**. A boca da outra extremidade é então vedada, aprisionando uma coluna de ar de altura $L_i = 5{,}0$ cm. Um líquido denso X (região preta) é introduzido lentamente sobre o êmbolo, empurrado-o para baixo e, consequentemente, comprimindo o ar confinado na outra extremidade **em temperatura constante** (figura à direita). Quando a altura da coluna do líquido X é $H = 5{,}0$ cm, a altura da coluna de ar na outra extremidade é $L_f = 4{,}5$ cm. Suponha que o ar se comporte como um gás ideal.



(a) Qual é a pressão na coluna de ar aprisionado após a compressão?
(b) Qual foi o trabalho realizado sobre o ar aprisionado?
(c) Qual foi a quantidade de calor trocada entre o ar aprisionado e o ambiente?
(d) Ache a densidade do líquido X.

EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2018

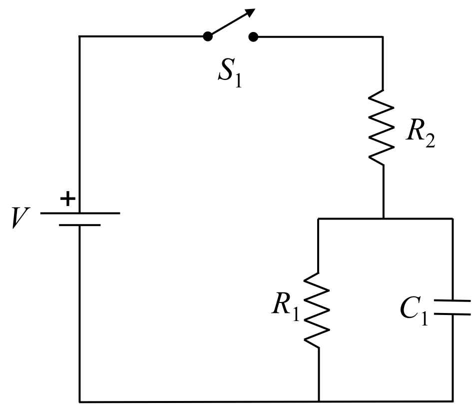
04 de abril 2018

Parte 2

Esta prova contém questões de eletromagnetismo, mecânica quântica, física moderna e mecânica estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.

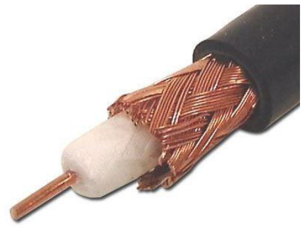
Boa prova!

Q6. Considere o circuito representado na figura. Inicialmente, o capacitor está descarregado. No instante $t = 0$ a chave S_1 é fechada.



(a) Quais são os valores da corrente que passa pelo resistor de resistência R_1 em $t = 0$ e após um longo tempo?
(b) Qual é a carga no capacitor de capacitância C_1 após um longo tempo?
(c) Faça três gráficos esquemáticos das diferenças de potencial como funções do tempo entre as extremidades dos resistores de resistências R_1 e R_2 e do capacitor de capacitância C_1 a partir de $t = 0$, indicando claramente os valores máximos e mínimos.
(d) Depois de permanecer ligada por um longo tempo, a chave S_1 é desligada em $t = t_d$. Quanto tempo então decorre para que a carga do capacitor caia para uma fração $1/e$ do seu valor em $t = t_d$? ($e \approx 2.718$ é a base dos logaritmos naturais)

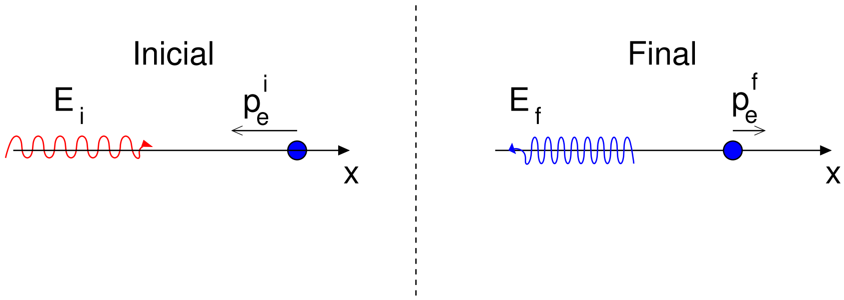
Q7. Um guia de ondas muito usado em laboratórios é o cabo coaxial. Ele consiste de um fio condutor interno rodeado por um isolante (branco) dentro de uma malha condutora, protegida por um encapamento isolante (preto), como mostrado na foto da esquerda. Ele pode ser modelado como um fio metálico interno de raio a dentro de um dielétrico com permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ e uma casca metálica cilíndrica de raio interno b, como indicado na figura da direita. A corrente percorre o fio interno numa direção e a casca cilíndrica na direção contrária.



(a) Use a simetria do problema e a lei de Gauss para obter a capacitância por unidade de comprimento do cabo em termos de ϵ, μ, a e b.
(b) Use a simetria do problema e a lei de Ampère para obter a auto-indutância por unidade de comprimento do cabo em termos de ϵ, μ, a e b. Dica: calcule a energia armazenada no campo magnético em um comprimento finito do cabo e iguale o resultado a $LI^2/2$, onde L é a auto-indutância e I é a corrente pelo cabo.

Q8. O processo de **espalhamento Compton inverso** é um dos mecanismos para a produção de fótons de alta energia a partir da colisão entre elétrons relativísticos e fótons de baixa energia. Um exemplo é o caso de elétrons de altas energias que se propagam pelo espaço e podem colidir com fótons da radiação cósmica de fundo, gerando fótons na região de raios-X.

(a) Supondo que a radiação cósmica de fundo apresenta a distribuição espectral de um corpo negro a uma temperatura $T = 2{,}9$ K, estime o comprimento de onda correspondente ao máximo da distribuição.
(b) Calcule a frequência (em Hz) e a energia (em eV) de um fóton cujo comprimento de onda corresponde ao calculado no item (a).



Considere o processo de espalhamento Compton inverso entre um elétron e um fóton esquematizado na figura acima. A energia do fóton incidente é E_i. Após a colisão, o elétron (ainda em movimento) tem energia final *menor* do que a inicial enquanto o fóton resultante é mais energético ($E_f > E_i$).

(c) Calcule a energia E_f do fóton após o espalhamento em termos de E_i , do fator γ relativístico do elétron incidente e da energia de repouso do elétron $m_e c^2$.
(d) Considere que o fóton incidente faz parte da radiação cósmica de fundo [com energia calculada no item (b)] e o elétron tenha inicialmente uma energia de 250 MeV. Calcule a energia do fóton espalhado em eV com dois algarismos significativos. Você pode utilizar $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ para $x \ll 1$.

Q9. Considere a dinâmica quântica unidimensional (eixo x) de uma partícula de massa m sujeita a um potencial de poço finito dado por ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x < a, \\ V_0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > a. \end{cases}$$

Nos itens abaixo considere a situação em que a energia E é tal que $E < V_0$.

(a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo nas três regiões do espaço e suas soluções gerais.
(b) Quais são as condições de contorno que a função de onda deve satisfazer em $x = 0$ e $x = a$?
(c) Existe uma probabilidade não nula de encontrar a partícula no intervalo entre $x = a$ e $x = a + b$, onde $b > 0$? Justifique sua resposta.
(d) Em uma medida de energia total da partícula, é possível encontrar **qualquer** valor pertencente ao intervalo $[0, V_0]$? Justifique sua resposta.
(e) Determine os autovalores de energia no caso do poço infinito, ou seja, se $V_0 \to \infty$.

Q10. Considere um sistema formado por N átomos localizados e independentes. Cada átomo tem quatro estados quânticos possíveis: o primeiro estado tem energia 0, o segundo e terceiro estados são degenerados com energia 2ε e o quarto e último estado tem energia 3ε ($\varepsilon > 0$). O sistema encontra-se em equilíbrio à temperatura T.

(a) Calcule a energia livre de Helmholtz do sistema.
(b) Calcule a energia interna por partícula do sistema.
(c) Calcule a entropia do sistema.
(d) Obtenha a entropia por partícula do sistema nos limites $T \to 0$ e $T \to \infty$. Interprete fisicamente os resultados.