EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2019

02 de outubro de 2018

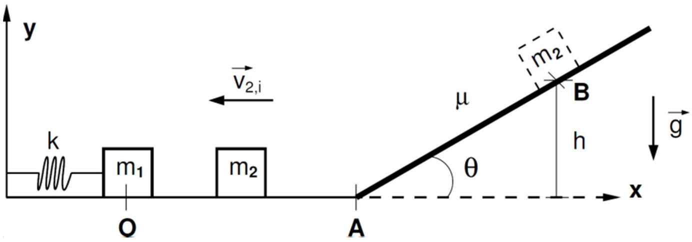
Parte 1

Esta prova contém questões de mecânica clássica, mecânica quântica, física moderna e termodinâmica. Todas as questões têm o mesmo peso.

Boa prova!

Q1. A figura abaixo mostra esquematicamente um sistema formado pelo bloco 1, de massa $m_1 = 2m$, conectado a uma mola de constante elástica k e massa desprezível, e pelo bloco 2, de massa $m_2 = m$. No instante inicial o bloco 1 está em repouso, a mola encontra-se relaxada, e o bloco 2 movimenta-se em direção ao bloco 1 com velocidade $\vec{v}_{2,i} = -v_0\,\hat{x}$, sendo $v_0 > 0$. Os dois blocos colidem elasticamente e o bloco 1 passa a oscilar após a colisão. Há atrito entre os blocos e a superfície **<u>apenas no trecho inclinado AB</u>** e o módulo da aceleração da gravidade vale g.

(a) Determine, em termos de v_0, os **<u>vetores</u>** velocidade dos blocos 1 e 2 imediatamente após a colisão ($\vec{v}_{1,f}$ e $\vec{v}_{2,f}$). Assuma que a mola não afeta o processo de colisão.



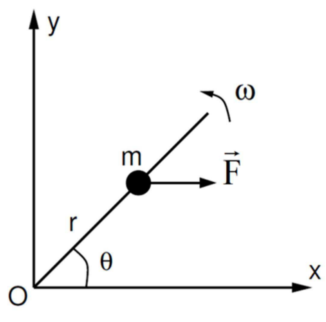
(b) Determine a amplitude x_m do movimento oscilatório do bloco 1 após a colisão em termos de m, k e v_0.

(c) Após a colisão, o bloco 2 movimenta-se em direção ao plano inclinado e atinge o repouso permanente no ponto B. Determine o coeficiente de atrito cinético μ entre o bloco 2 e o trecho inclinado AB em termos de g, v_0, da altura h e do ângulo θ.

(d) Indique esquematicamente todas as forças que atuam no bloco 2 quando ele se encontra em repouso no ponto B.

Q2. Uma barra longa e de massa desprezível movimenta-se no plano xy girando em torno do eixo z com velocidade angular constante ω, como mostrado na figura abaixo. Uma partícula de massa m pode deslizar sem atrito ao longo da barra, e sofre a ação de uma força externa $\vec{F} = m\gamma\hat{x}$, sendo γ uma constante positiva.

(a) Determine a energia potencial $V(\vec{r})$ associada à força $\vec{F}$. Considere a origem O como sendo o ponto de energia potencial nula.



(b) Determine a equação do vínculo em termos das coordenadas polares, r e θ, e do tempo t. Qual é a origem física da correspondente força de vínculo?

(c) Escreva a Lagrangiana da partícula em termos da coordenada r, da sua derivada temporal $\dot{r}$, e do tempo t. Em seguida, determine a correspondente equação de movimento.

(d) Considere o caso em que $\gamma = 0$ e determine a solução geral da equação de movimento calculada no item (c). Em seguida, determine a componente radial $r(t)$ da posição da partícula em função do tempo. Inicialmente, $r(t=0) = a$ e $\dot{r}(t=0) = 0$.

Q3. Considere o problema quântico de uma partícula de massa m que se movimenta no plano xy dentro de uma caixa bidimensional retangular, de forma que suas coordenadas x e y estão limitadas aos intervalos $0 \le x \le a$ e $0 \le y \le b$ (o potencial é nulo dentro da caixa e infinito fora).

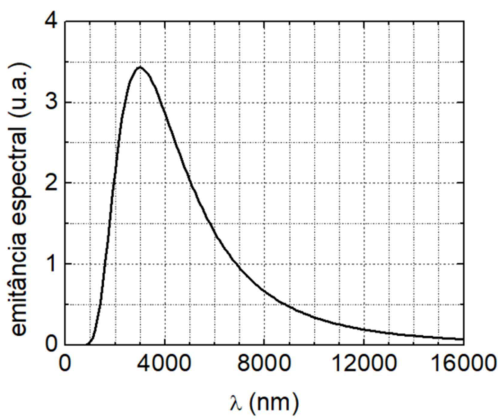
(a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a função de onda da partícula.

(b) Encontre as autofunções e autovalores de energia. Para isso, escreva a solução na forma $\Psi_{n_x n_y}(x,y) = \psi_{n_x}(x)\,\phi_{n_y}(y)$, sendo n_x e n_y números quânticos pertencentes aos números naturais não nulos $\mathbb{N}^*$ $\left(n_x, n_y = 1,2,3\ldots\right)$. Normalize as autofunções $\Psi_{n_x n_y}(x,y)$.

(c) Suponha agora que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se no estado dado por $\Phi(x,y) = C\,\Psi_{11}(x,y) + D\,\Psi_{12}(x,y)$, onde C e D são constantes reais. Que resultados poderiam ser obtidos em uma medida da energia da partícula nesse instante e quais as suas probabilidades?

(d) O estado descrito pela função de onda do item (c) é um estado estacionário? Em caso negativo, encontre a função de onda $\Phi(x,y,t)$ para um instante $t > 0$ qualquer.

Q4. O gráfico da figura abaixo representa a emitância espectral, $e(\lambda)$, de um corpo negro a uma temperatura T_1 como função do comprimento de onda λ. A energia radiada por unidade de tempo e por unidade de área do corpo, na faixa de comprimentos de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$, é dada por $e(\lambda)d\lambda$. No gráfico, λ é dado em nanometros ($1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$) e a emitância espectral é dada em unidades arbitrárias.



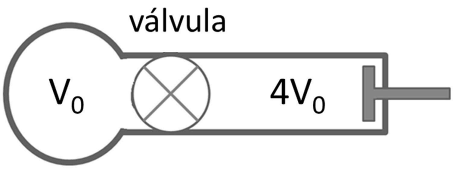
(a) Com base no gráfico, estime a temperatura T_1.

(b) Calcule a energia total radiada por unidade de tempo e por unidade de área desse corpo negro. Expresse o resultado em W/m^2.

(c) A partir do gráfico, calcule aproximadamente a energia radiada por unidade de tempo e por unidade de área do corpo, na faixa de comprimentos de onda entre $6000\,\text{nm}$ e $8000\,\text{nm}$. Expresse o resultado em W/m^2.

(d) Considere agora um segundo corpo negro a uma temperatura $T_2 = 3T_1$. Determine o comprimento de onda de máxima emitância espectral desse segundo corpo (em nm).

Q5. A figura abaixo ilustra dois compartimentos separados por uma válvula. O compartimento da esquerda, de volume V_0, contém 2 moles de um gás ideal na pressão P_0. O compartimento da direita, de volume $4V_0$, está inicialmente vazio. Ao abrir a válvula, o gás sofre uma expansão livre (adiabática e sem realização de trabalho) e passa a ocupar os dois compartimentos.



Gás	$\gamma = c_P/c_V$
Monoatômico	1,67
Diatômico	1,40
Poliatômico	1,30

(a) Qual é a pressão do gás após a expansão livre?

(b) Determine a variação da entropia do gás no processo de expansão livre.

(c) Após a expansão livre, o gás é comprimido num processo adiabático e quase-estático até o volume inicial V_0. Ao final desse processo, a pressão do gás é $P = 5^{2/5} P_0$. O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico?

(d) Determine a razão U_f/U_i entre a energia interna final, U_f (após a compressão), e a inicial, U_i (antes da expansão livre).

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2019

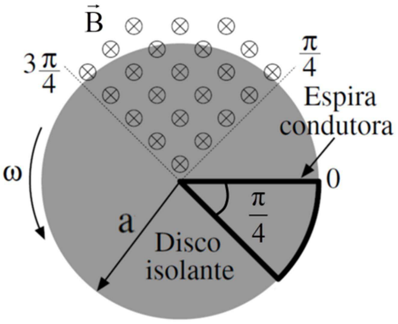
03 de outubro de 2018

Parte 2

Esta prova contém questões de eletromagnetismo, mecânica quântica, física moderna e mecânica estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.

Boa prova!

Q6. Um disco de raio a feito de um material isolante gira em torno do seu eixo de simetria com velocidade angular ω constante. Uma espira de cobre, na forma de um setor circular de ângulo $\pi/4$ e mesmo raio a, está presa à superfície do disco como mostra a figura abaixo. A resistência elétrica da espira é R. Um campo magnético externo de módulo B, perpendicular ao disco e entrando no plano da figura, está presente na região do espaço delimitada pelos ângulos fixos $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$.



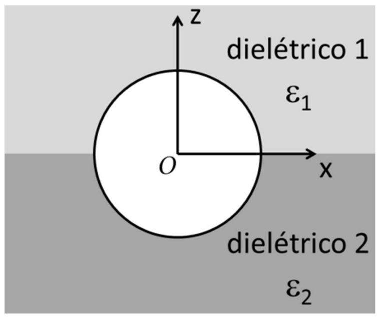
(a) Calcule o módulo da corrente elétrica induzida na espira quando esta entra ou sai da região de campo magnético.

(b) Convencionando como positiva a corrente que circula na espira no sentido horário, faça o gráfico da corrente induzida como função do tempo para o intervalo de tempo de uma revolução do disco. Considere como instante inicial aquele ilustrado na figura.

(c) Calcule a energia total dissipada na espira em um ciclo.

(d) Calcule o torque da força magnética sobre a espira, com relação ao centro do disco, quando ela entra na região de campo magnético. Além do módulo, determine a direção e o sentido do **vetor** torque.

Q7. Uma esfera condutora maciça de raio R está carregada e imersa simetricamente entre dois dielétricos de permissividades elétricas ε_1 e ε_2, conforme ilustrado na figura abaixo. Resolvendo-se a equação de Laplace, pode-se mostrar que o potencial eletrostático fora da esfera ($r > R$) é dado por $V(\vec{r}) = A/r$, sendo A uma constante e $r = |\vec{r}|$. Expresse as suas respostas em termos de A, R, ε_1, ε_2, e da posição $\vec{r}$.



(a) Calcule o potencial eletrostático $V(\vec{r})$ e o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ no interior da esfera ($r < R$).

(b) Calcule o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ e o deslocamento elétrico $\vec{D}(\vec{r})$ fora da esfera ($r > R$), em cada dielétrico (dielétrico 1 e dielétrico 2).

(c) Quais são as densidades superficiais de carga livre na superfície da esfera condutora adjacente a cada um dos dielétricos?

(d) Há carga de polarização na interface entre os dois dielétricos? Se sim, quanto vale a densidade superficial dessa carga? Se não, justifique.

Q8. Um sistema físico hipotético pode ter seus estados quânticos descritos em uma base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. O Hamiltoniano do sistema isolado é dado por:

$$\hat{H}_0 = E_1 |1\rangle\langle 1| + E_2 |2\rangle\langle 2| + E_1 |3\rangle\langle 3|,$$

sendo E_1 e E_2 grandezas reais com dimensões de energia.

Na presença de uma perturbação externa, o Hamiltoniano torna-se

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + W|1\rangle\langle 3| + W|3\rangle\langle 1|,$$

sendo que W também é uma grandeza real com dimensão de energia.

(a) Escreva $\hat{H}$ em forma matricial na base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

(b) Encontre os autovalores $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ e os correspondentes autovetores $(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle)$ de $\hat{H}$.

(c) Escreva o Hamiltoniano não perturbado $\hat{H}_0$ na base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$.

(d) Como se pode observar, há degenerescência nos autovalores de energia na ausência da perturbação externa. Para quais valores não nulos de W também existe degenerescência na presença da perturbação externa?

Q9. O acelerador de partículas LHC ("Large Hadron Collider") produz feixes de prótons com velocidades relativísticas e energias (medidas no referencial do laboratório, S) da ordem de teraelétron-volts ($1,0\ \text{TeV} = 1,0 \times 10^{12}\ \text{eV}$).

(a) Um próton possui energia relativística total igual a $5,0\,\text{TeV}$, medida no referencial S do laboratório. Calcule a velocidade desse próton (no referencial S) considerando-se que a sua energia de repouso é igual a $1,0\ \text{GeV} = 1,0 \times 10^{9}\ \text{eV}$.
<u>Dica</u>: Como a velocidade do próton é muito próxima à velocidade da luz no vácuo, c, use $v = (1-\Delta)c$ e encontre o valor de Δ. Lembre-se que $\sqrt{1-\varepsilon} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ se $\varepsilon \ll 1$.

(b) Um próton A, com energia relativística total E_A, colide frontalmente com outro próton B com a mesma energia e viajando em sentido contrário no referencial S. Suponha que esta colisão produza uma partícula X não vista anteriormente através da reação $A + B \Rightarrow X$. Calcule a massa de repouso da partícula X em termos de E_A.

(c) Em outro experimento, um próton C, com fator relativístico γ (medido no referencial do laboratório S) e massa de repouso m_0, colide frontalmente com outro próton D inicialmente em repouso. Suponha que esta colisão produza uma partícula Y através da reação $C + D \Rightarrow Y$. Calcule a massa de repouso de Y em termos de γ e m_0.

Q10. Um sistema de N íons magnéticos está em contato com um reservatório térmico a uma temperatura T. Seja σ_i, com $i = 1, 2, ..., N$, a variável que representa a projeção do spin do i-ésimo íon na direção z em unidades apropriadas. A variável σ_i pode assumir os valores $+1$ ou -1. Considere que N seja um número par. O sistema é descrito pelo Hamiltoniano

$$H = -J \sum_{k=1}^{N/2} \sigma_{2k-1}\sigma_{2k} - \mu_B h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i .$$

Segundo esse Hamiltoniano, cada íon possui momento magnético μ_B e está acoplado a um campo magnético externo h. Nele, vemos ainda que o primeiro íon só interage com o segundo, o terceiro só com o quarto, e assim sucessivamente, através de um acoplamento J.

(a) Calcule a função de partição para o caso $N = 2$, ou seja, para um único par de íons.
Sugestão: Determine primeiramente as energias associadas a cada um dos microestados (σ_1, σ_2).

(b) Generalize sua resposta calculando agora a função de partição para um sistema de N íons magnéticos. Ou seja, calcule a função de partição para um sistema contendo $N/2$ pares de íons.

(c) Calcule o momento magnético total médio do sistema de N íons em função dos parâmetros externos h e T, e das constantes J e μ_B.

(d) Qual o valor do momento magnético total médio no limite de $h \to 0$? Esse sistema pode representar um material ferromagnético? Justifique a sua resposta.