EUF

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2019

02 de abril de 2019

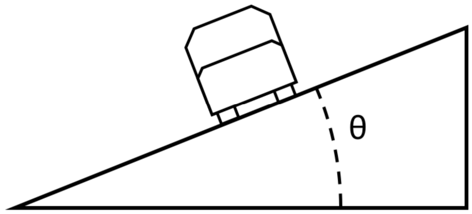
Parte 1

Esta prova contém questões de mecânica clássica, física moderna, mecânica quântica e termodinâmica. Todas as questões têm o mesmo peso.

Informações úteis para a solução desta prova podem ser encontradas no formulário fornecido.

Boa prova!

Q1. Um carro se move numa pista circular inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. A figura abaixo mostra o plano transversal ao movimento do carro. O módulo da aceleração da gravidade é g.



(a) Indique esquematicamente todas as forças que atuam no carro, se o atrito for desprezível.
(b) Ainda desprezando o atrito, encontre o módulo da velocidade com a qual o carro se move, se ele descreve um círculo de raio R.
(c) **A partir deste item, considere que haja atrito entre os pneus do carro e a pista e que o coeficiente de atrito estático seja μ.** Se o carro se move com a velocidade máxima possível sem derrapar, indique esquematicamente todas as forças que atuam no carro.
(d) Qual é o módulo da velocidade máxima com a qual o carro é capaz de fazer a curva de raio R sem derrapar?
(e) Suponha agora que $\sin\theta > \mu\cos\theta$ e que o carro se mova bem mais lentamente. Indique esquematicamente todas as forças que atuam no carro nesse caso. Determine a velocidade mínima com a qual o carro consegue descrever o círculo de raio R sem derrapar.

Q2. Considere um pêndulo constituído por um pequeno corpo de massa m suspenso por uma mola de massa desprezível e constante elástica k. O comprimento de equilíbrio da mola (sem nenhuma massa pendurada) é l. Considere que o movimento do pêndulo esteja sempre contido num plano vertical fixo. Utilize coordenadas generalizadas tais que o comprimento da mola seja $l + r\,(t)$ e o ângulo desta com a vertical seja $\theta\,(t)$.

(a) Escreva a energia cinética do sistema em termos de r, θ e suas derivadas temporais.
(b) Escreva a energia potencial do sistema em termos de r, θ e suas derivadas temporais.
(c) Escreva a lagrangiana do sistema.
(d) Escreva as equações de Euler-Lagrange para r e θ.
(e) Considere agora o movimento puramente vertical do pêndulo, ou seja, $\theta(t) = 0$ para todo t. Encontre a solução geral (em termos de duas constantes arbitrárias) da equação de Euler-Lagrange para r.

Q3. Raios cósmicos que atingem a atmosfera terrestre dão origem a uma cascata de partículas com diversas energias, entre elas os múons. Múons são instáveis e decaem espontaneamente segundo a lei $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$, onde $N(t)$ e N_0 são os números de múons nos instantes t e $t = 0$, respectivamente, e τ é o tempo de vida do múon, cujo valor é $\tau = 2{,}0\ \mu$s, quando medido no seu referencial próprio. Um detector D_1 de múons seletivo em velocidade é montado no topo de uma montanha a $2{,}94 \times 10^3$ m acima do nível do mar. O detector é ajustado para detectar partículas com velocidade $v = 0{,}98c$. Num certo intervalo de tempo, são detectados $1{,}5 \times 10^3$ múons. Em um outro detector semelhante D_2, montado ao nível do mar, faz-se a mesma medida (mesma velocidade e mesmo intervalo de tempo) e obtém-se um número de múons que é ordens de grandeza maior que o valor esperado segundo a física não relativística.

(a) Determine o número de múons que seria esperado no detector D_2, segundo a física não relativística.

(b) Explique *qualitativamente* por que o número observado no detector D_2 é maior que a expectativa não relativística.
(c) Calcule a contagem de múons no detector D_2: (i) do ponto de vista de um observador no referencial preso ao detector e (ii) do ponto de vista de um observador no referencial próprio dos múons.
(d) Considere um referencial inercial S, no qual tanto os múons quanto o detector D_2 estão em movimento, aproximando-se com velocidades de módulos iguais. Do ponto de vista de um observador no referencial S, o número de múons observado no detector D_2 é menor, maior ou igual ao do item (c)? Justifique sua resposta.

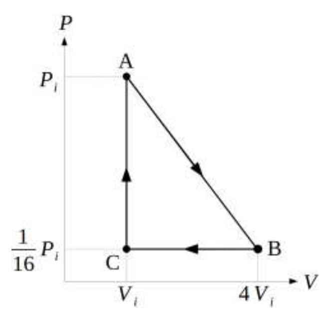
Q4. A função de onda que descreve a dinâmica quântica unidimensional de uma partícula de massa m como função do tempo t na presença de um potencial confinante é

$$\Psi(x,t) = C\left(x^2 - \frac{\hbar}{4am}\right) e^{-a\left[(mx^2/\hbar)+5it\right]},$$

onde C e a são constantes reais positivas com dimensões apropriadas.

(a) Através de análise dimensional, determine a dimensão física da constante C.
(b) A partícula está em um autoestado de energia? Se sim, qual é o autovalor de energia correspondente? Justifique suas respostas.
(c) Determine os desvios padrão da posição x e do momento linear p da partícula, sabendo que os valores esperados de x^2 e p^2 para este estado são $\langle \hat{x}^2 \rangle = C^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{32} \left(\frac{\hbar}{am}\right)^{7/2}$ e $\langle p^2 \rangle = 40\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\hbar^2}{C^2} \left(\frac{am}{\hbar}\right)^{7/2}$. Os desvios padrão são consistentes com o princípio de incerteza? Justifique sua resposta.
(d) Determine a função energia potencial da partícula.

Q5. Uma amostra de 1,0 mol de gás ideal monoatômico (capacidades térmicas molares $C_V = 3R/2$ e $C_p = 5R/2$) é submetida ao processo termodinâmico cíclico mostrado no diagrama de pressão versus volume da figura abaixo. O ciclo é percorrido no sentido horário. As pressões e os volumes nos pontos A, B e C são mostrados na figura e todas as transformações sofridas pelo gás são reversíveis, seguindo as linhas retas contínuas AB, BC e CA. Dê suas respostas em termos da constante universal dos gases R e da pressão P_i e do volume V_i do gás no ponto A.



(a) Encontre as temperaturas T_A, T_B e T_C do gás nos pontos A, B e C.
(b) Encontre o calor total trocado entre a vizinhança e o gás a cada ciclo, Q_{ciclo}.
(c) Calcule o calor trocado entre a vizinhança e o gás entre os pontos A e B, Q_{AB}.
(d) Calcule a variação da entropia do gás entre os pontos A e B, $\Delta S_{AB} = S_B - S_A$.

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2019

03 de abril 2019

Parte 2

Esta prova contém questões de eletromagnetismo, física moderna, mecânica quântica e mecânica estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.

Informações úteis para a solução desta prova podem ser encontradas no formulário fornecido.

Boa prova!

Q6. Um capacitor de placas paralelas condutoras tem suas duas placas perpendiculares à direção z. Uma das placas, localizada em $z = 0$, tem um potencial elétrico $V = 0$, enquanto a outra placa, localizada em $z = d$, tem um potencial elétrico $V = V_0$, onde V_0 é uma constante. No espaço entre as placas, preenchido por um dielétrico com permissividade elétrica ϵ, a densidade de carga elétrica livre é dada por

$$\rho_F(z) = \rho_0\, e^{-\alpha z},$$

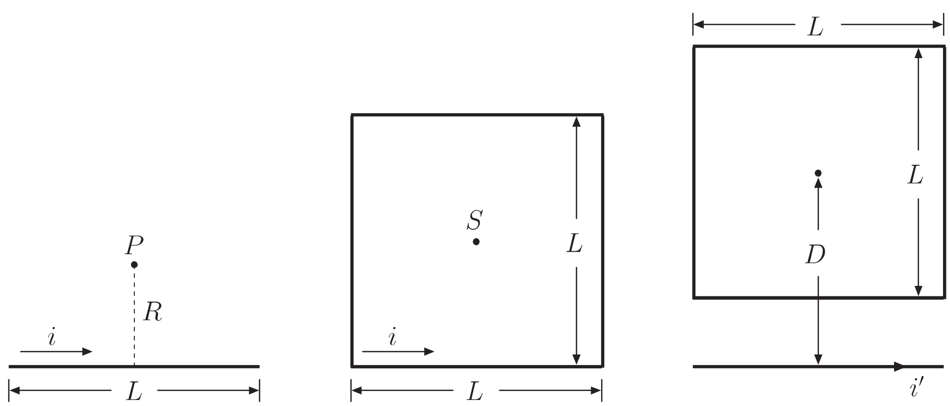
onde ρ_0 e α são constantes. Despreze os efeitos de borda.

(a) Mostre que o potencial entre as placas é da forma

$$V(z) = A + Bz - \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2}\, e^{-\alpha z},$$

onde A e B são constantes.
(b) Determine as constantes A e B a partir das condições de contorno.
(c) Determine o **vetor** campo elétrico entre as placas.

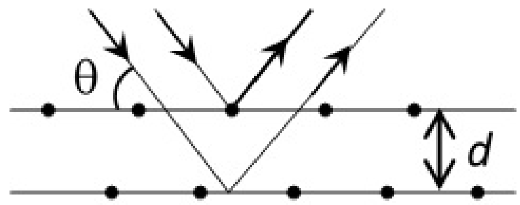
Q7. (a) Um segmento retilíneo de fio, de comprimento L, transporta uma corrente i. Calcule o módulo do campo magnético B, produzido pelo segmento no ponto P, localizado a uma distância R do segmento e equidistante de suas extremidades, como mostra a Figura (a).



(a) (b) (c)

(b) Use o resultado do item (a) e obtenha B quando $R \ll L$. Compare o resultado com o módulo do campo magnético gerado por um fio muito longo.
(c) Considere agora uma espira quadrada de fio, de lado L, transportando uma corrente i, como na Figura (b). Calcule o módulo do campo magnético B no ponto S, localizado no centro da espira.
(d) Uma espira quadrada de fio, de lado L e sem nenhuma corrente, é colocada próxima a um fio infinitamente longo que transporta uma corrente i'. A distância do fio longo ao centro da espira é D, como mostrado na Figura (c). Determine a intensidade do fluxo magnético gerado pelo fio através da espira.

Q8. Um feixe de nêutrons formando uma onda de matéria de comprimento de onda λ incide sobre um cristal fazendo um ângulo $\theta \in [0,\pi/2]$ com os planos cristalinos. A distância entre dois planos cristalinos adjacentes é d, como mostrado na figura. A energia de repouso do nêutron é $E_n^0 = 940$ MeV.



(a) Deduza a expressão que relaciona λ, θ e d e que descreve a reflexão de Bragg.
(b) Um cristal tem planos cristalinos separados por $d = 1{,}1$ Å. Usando nêutrons com energia cinética $K = 1{,}9$ eV, em quantos valores diferentes de θ é observada a reflexão de Bragg?
(c) Explique como um cristal pode ser usado como filtro para selecionar velocidades de nêutrons a partir de um feixe com uma distribuição larga de velocidades.
(d) As relações $E = h\nu$ e $p = h/\lambda$ também são válidas no regime relativístico, sendo E a energia relativística total da partícula, p o seu momento linear e λ e ν o comprimento de onda e a frequência da onda de matéria associada, respectivamente. Encontre a **velocidade de fase** de uma onda de matéria associada a nêutrons relativísticos em termos de E_n^0 e λ. O resultado é maior, menor ou igual à velocidade da luz no vácuo? Encontre também a **velocidade de grupo** da onda, compare com a velocidade de fase e comente os resultados.

Q9. Considere um oscilador harmônico quântico unidimensional de massa m e frequência angular ω, descrito pelo hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

onde $\hat{x}$ e $\hat{p}_x$ são os operadores canônicos conjugados de posição e momento linear da partícula, respectivamente. Os autoestados de energia são denotados por $|n\rangle$ $(n = 0,1,\ldots)$, com os correspondentes autovalores $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Esse problema também pode ser formulado em termos de operadores não hermitianos $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, sendo $\hat{a}^\dagger$ o adjunto hermitiano de $\hat{a}$ e

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x.$$

Verifica-se que a ação desses operadores sobre os autoestados de energia satisfaz as relações

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

(a) Obtenha a relação de comutação entre $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ e reescreva o hamiltoniano em termos de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$. Por que o operador $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ é denominado *operador número*?
Considere agora um **oscilador harmônico bidimensional**, cujo hamiltoniano é dado por

$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2\hat{y}^2$$

(b) Apresente argumentos que justifiquem o fato de que os autoestados de energia do problema bidimensional podem ser escritos como $|n_x,n_y\rangle \equiv |n_x\rangle\otimes|n_y\rangle$, com $|n_x\rangle$ e $|n_y\rangle$ sendo autoestados

de osciladores harmônicos unidimensionais de frequências angulares ω_x e ω_y, respectivamente. Obtenha os autovalores de energia $E_{n_x n_y}$ do problema bidimensional.
(c) Suponha que o estado da partícula no instante $t = 0$ seja dado por

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(|n_x = 2{,}n_y = 0\rangle + 2|n_x = 1{,}n_y = 1\rangle\Big).$$

Escreva o estado $|\psi(t)\rangle$ para um tempo genérico $t > 0$. Se uma medição da energia total do sistema for feita em um instante $t' > 0$, qual é a probabilidade de o estado logo após a medição apresentar valor esperado de $\hat{p}_x^2$ dado por $\langle p_x^2\rangle = 5m\hbar\omega_x/2$?
(d) Para o caso do potencial isotrópico ($\omega_x = \omega_y \equiv \omega$), determine o grau de degenerescência do n-ésimo estado excitado.

Q10. Um sistema de N partículas distinguíveis não interagentes é descrito pelo hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i. \tag{1}$$

A energia de cada partícula ε_i só pode assumir dois valores: $\varepsilon_i = 0$ ou $\varepsilon_i = \Delta > 0$. Portanto, cada microestado do sistema é descrito pelo conjunto de valores $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N)$.

(a) Se o sistema possui energia total E, que é um múltiplo inteiro de Δ, o número total de microestados possíveis é

$$\Omega(E,N) = \frac{N!}{(E/\Delta)!(N - E/\Delta)!}. \tag{2}$$

Com base no postulado fundamental da mecânica estatística, qual é a probabilidade de se encontrar o sistema em um microestado específico?
(b) Calcule a entropia por partícula do sistema $s = S/N$ como função da energia por partícula $u = E/N$ no regime $N \gg 1$. Utilize a aproximação $\ln N! \approx N \ln N - N$, válida para $N \gg 1$.
(c) Determine a temperatura do sistema como função de u. Existe algum intervalo de valores de u em que a temperatura é negativa?
(d) Calcule o calor específico do sistema. Existe algum regime em que o calor específico é negativo?