

EUF

Exame Unificado das Pós-Graduações em Física*

Centro Acadêmico de Física†
 Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará, 66075-110, Belém, PA, Brasil
 (Dated: 16 de agosto de 2015)

Este material é constituído do conteúdo e dos problemas do Exame Unificado das Pós-Graduações em Física (EUF). Ele contém problemas de: Mecânica Clássica, Eletromagnetismo, Física Moderna, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso. A prova é dividida em duas etapas, cada etapa em um dia. O tempo de duração de cada etapa é de 4 horas. A bibliografia recomendada se encontra ao final deste documento. Mais informações na página do Exame Unificado: <http://www.ifsc.usp.br/~posgraduacao/inf/exameUnificado2.php>

Parte I

Conteúdo

As provas versarão sobre cinco áreas gerais dos Programas de Graduação em Física, a saber, Mecânica Clássica, Eletromagnetismo, Física Moderna, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Física Estatística. Os tópicos de cada área e a bibliografia recomendada são os seguintes:

MECÂNICA CLÁSSICA

Leis de Newton. Movimento unidimensional. Oscilações lineares. Movimento em duas e três dimensões. Gravitação newtoniana. Cálculo variacional. Equações de Lagrange e de Hamilton. Forças centrais. Sistemas de partículas. Referenciais não inerciais. Dinâmica de corpos rígidos. Oscilações acopladas.

- Referências: [1-5]

ELETROMAGNETISMO

Campos eletrostáticos no vácuo e nos materiais dielétricos. Resolução das equações de Poisson e Laplace. Campos magnéticos, correntes estacionárias e materiais não magnéticos. Força eletromotriz induzida e energia magnética. Materiais magnéticos. Equações de Maxwell. Propagação de ondas eletromagnéticas. Reflexão e Refração. Radiação. Eletromagnetismo e Relatividade.

- Referências: [6-10]

FÍSICA MODERNA

Fundamentos da relatividade restrita. Mecânica relativística das partículas. Propagação da luz e a relatividade newtoniana. Experimento de Michelson e Morley. Postulados da teoria da relatividade restrita. As transformações de Lorentz. Causalidade e simultaneidade. Energia e momento relativísticos. Radiação térmica, o problema do corpo negro e o postulado de Planck. Fótons e as propriedades corpusculares da radiação. O modelo de Rutherford e o problema da estabilidade dos átomos. O modelo de Bohr. Distribuição de Boltzmann da energia. Átomos, Moléculas e Sólidos.

- Referências: [11-18]

MECÂNICA QUÂNTICA

Introdução às ideias fundamentais da teoria quântica. O aparato matemático da mecânica quântica de Schrödinger. Formalização da Mecânica Quântica. Postulados. Descrição de Heisenberg. O oscilador harmônico unidimensional. Potenciais Unidimensionais. A equação de Schrödinger em três dimensões. Momento angular. Forças centrais e o átomo de Hidrogênio. Spinors na teoria quântica não-relativística. Adição de momentos angulares. Teoria de perturbação independente do tempo. Partículas idênticas.

- Referências: [19-23]

TERMODINÂMICA E FÍSICA ESTATÍSTICA

Sistemas termodinâmicos. Variáveis e equações de estado, diagramas PVT. Trabalho e primeira lei da termodinâmica. Equivalente mecânico do calor. Energia interna, entalpia, ciclo de Carnot. Mudanças de fase. Segunda lei da termodinâmica e entropia. Funções termodinâmicas. Aplicações práticas de termodinâmica. Teoria cinética dos gases. Descrição Estatística de um Sistema Físico. Ensemble Microcanônico. Ensemble Canônico. Gás Clássico no Formalismo Canônico. Ensemble Grande Canônico. Gás Ideal Quântico. Gás Ideal de Fermi. Condensação de Bose-Einstein.

- Referências: [24-29]

* Solicitamos que qualquer erro encontrado seja comunicado para correção deste material ; Agradecemos ao discente Ygor Pará Silva, diretor do CAFÍS durante a gestão 2014/2015, pela iniciativa da elaboração deste material

† cafisufpa@gmail.com URL: cafisufpa.wix.com/cafis

Parte II

Problemas

MECÂNICA CLÁSSICA

2015-2

Q6. Uma partícula de massa m está submetida a uma força central conservativa cuja energia potencial é dada por $U(r) = k(r^2 - a^2)e^{-br^2}$, em que r é a coordenada radial esférica, e k , a e b são constantes reais e positivas.

- Determine as unidades das constantes k , a e b no SI (Sistema Internacional de Unidades).
- Esboce um gráfico da função $U(r)$, determinando seus pontos de máximo e mínimo em função dos parâmetros dados.
- Determine as faixas de energia E da partícula para as quais
 - a partícula está em órbitas ligadas
 - a partícula está em órbitas não ligadas
- Determine a força que age sobre a partícula, diga quais as situações de equilíbrio, se existirem, e, em caso afirmativo, determine a frequência de oscilação da partícula para movimentos radiais próximos do(s) ponto(s) de equilíbrio estável.

Q7. Uma partícula de massa m está confinada sobre uma superfície esférica de raio fixo a , e nenhuma força externa age sobre a mesma.

- Determine a lagrangiana da partícula usando coordenadas apropriadas no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3) e estabeleça a equação de vínculo.
- Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, encontre as equações de movimento e determine a força de vínculo, i.e., determine o multiplicador de Lagrange e interprete o resultado.
- Estabeleça as constantes do movimento da partícula.
- Supondo, agora, que o raio da esfera varia no tempo com a função $a(t) = a_0(1 + \cos \omega t)$, com a_0 e ω constantes, determine as constantes de movimento da partícula.

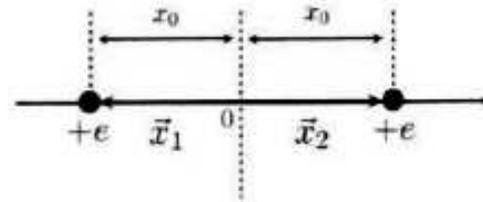
2015-1

Q1. É possível construir armadilhas capazes de confinar íons de massa m a carga q . Em particular, a armadilha pode restringir o movimento dos íons a apenas uma dada direção

espacial, x . Assim, considere dois íons de cálcio uma vez ionizado (Ca^+), submetidos a um potencial confinante externo harmônico $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Esses íons interagem adicionalmente através da repulsão coulombiana,

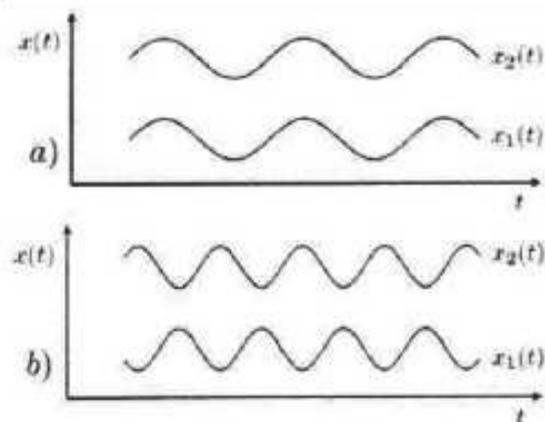
$$F_C = \frac{e^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

onde x_1 e x_2 são as posições dos íons de cálcio e, por simplicidade, foi definido: $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$.



A figura acima define um sistema de coordenadas conveniente e representa os íons na posição de equilíbrio em que $-x_1 = x_2 = x_0$. O objetivo deste problema é estudar os modos normais dessa cadeia unidimensional constituída pelos dois íons de cálcio.

- Obtenha a posição de equilíbrio x_0 em termos de e , m e ω .
- Escreva as equações de Newton para o movimento de cada íon e obtenha a frequência de oscilação do sistema quando a separação entre os íons for constante. Este é o primeiro modo normal de oscilação dessa cadeia.
- O segundo modo normal corresponde a um movimento antissimétrico dos íons, em cujo caso o centro de massa está parado em $x = 0$. Obtenha esse segundo modo normal no limite de pequenas oscilações. Obtenha a razão entre as frequências dos dois modos normais de oscilação do sistema.



- As figuras a) e b) acima representam os modos normais de oscilação desse sistema de dois íons. Identifique o primeiro e o segundo modo normal obtidos, respectivamente, nos item b e c acima. Qual deles tem menor energia?

Parte II

Problemas

MECÂNICA CLÁSSICA

2015-2

Q6. Uma partícula de massa m está submetida a uma força central conservativa cuja energia potencial é dada por $U(r) = k(r^2 - a^2)e^{-br^2}$, em que r é a coordenada radial esférica, e k , a e b são constantes reais e positivas.

- Determine as unidades das constantes k , a e b no SI (Sistema Internacional de Unidades).
- Esboce um gráfico da função $U(r)$, determinando seus pontos de máximo e mínimo em função dos parâmetros dados.
- Determine as faixas de energia E da partícula para as quais
 - a partícula está em órbitas ligadas
 - a partícula está em órbitas não ligadas
- Determine a força que age sobre a partícula, diga quais as situações de equilíbrio, se existirem, e, em caso afirmativo, determine a frequência de oscilação da partícula para movimentos radiais próximos do(s) ponto(s) de equilíbrio estável.

Q7. Uma partícula de massa m está confinada sobre uma superfície esférica de raio fixo a , e nenhuma força externa age sobre a mesma.

- Determine a lagrangiana da partícula usando coordenadas apropriadas no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3) e estabeleça a equação de vínculo.
- Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, encontre as equações de movimento e determine a força de vínculo, i.e., determine o multiplicador de Lagrange e interprete o resultado.
- Estabeleça as constantes do movimento da partícula.
- Supondo, agora, que o raio da esfera varia no tempo com a função $a(t) = a_0(1 + \cos \omega t)$, com a_0 e ω constantes, determine as constantes de movimento da partícula.

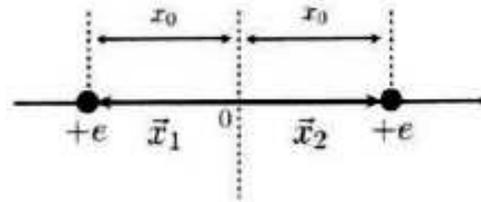
2015-1

Q1. É possível construir armadilhas capazes de confinar íons de massa m a carga q . Em particular, a armadilha pode restringir o movimento dos íons a apenas uma dada direção

espaçial, x . Assim, considere dois íons de cálcio uma vez ionizado (Ca^+), submetidos a um potencial confinante externo harmônico $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Esses íons interagem adicionalmente através da repulsão coulombiana,

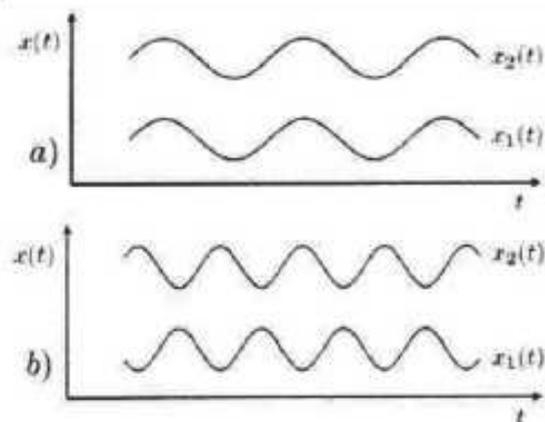
$$F_C = \frac{e^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

onde x_1 e x_2 são as posições dos íons de cálcio e, por simplicidade, foi definido: $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$.



A figura acima define um sistema de coordenadas conveniente e representa os íons na posição de equilíbrio em que $-x_1 = x_2 = x_0$. O objetivo deste problema é estudar os modos normais dessa cadeia unidimensional constituída pelos dois íons de cálcio.

- Obtenha a posição de equilíbrio x_0 em termos de e , m e ω .
- Escreva as equações de Newton para o movimento de cada íon e obtenha a frequência de oscilação do sistema quando a separação entre os íons for constante. Este é o primeiro modo normal de oscilação dessa cadeia.
- O segundo modo normal corresponde a um movimento antissimétrico dos íons, em cujo caso o centro de massa está parado em $x = 0$. Obtenha esse segundo modo normal no limite de pequenas oscilações. Obtenha a razão entre as frequências dos dois modos normais de oscilação do sistema.



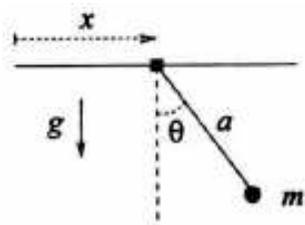
- As figuras a) e b) acima representam os modos normais de oscilação desse sistema de dois íons. Identifique o primeiro e o segundo modo normal obtidos, respectivamente, nos item b e c acima. Qual deles tem menor energia?

Q2. Um satélite artificial de massa m está em órbita elíptica em torno da Terra. Admita que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme com raio R e massa M , e denote por G a constante de gravitação universal. Considere conhecidos d e D , as distâncias entre o centro da Terra e o satélite nos pontos de menor e maior afastamento, respectivamente. Uma partícula de massa m_0 menor do que m , choca-se centralmente e de forma completamente inelástica com o satélite no ponto de menor afastamento da Terra. No instante da colisão, o satélite e a partícula tinham velocidades iguais em módulo, mas com sentidos opostos.

- Obtenha a velocidade v_S do sistema satélite-partícula imediatamente após a colisão em termos de v_p , a velocidade no ponto de menor afastamento.
- Expresse o momento angular do satélite nos pontos de mínimo e máximo afastamento em termos de v_p e de v_a (a velocidade no ponto de maior afastamento), respectivamente, antes da colisão.
- Obtenha a velocidade v_p , antes da colisão, em termos de M , d , D e G .
- Obtenha a energia E_S e o momento angular L_S do sistema satélite-partícula, depois da colisão em termos de m_0 e das grandezas que caracterizam o movimento do satélite antes da colisão

2014-2

Q6. Um pêndulo simples é constituído por uma partícula de massa m suspensa por um fio inextensível de comprimento a a massa desprezível. Seu ponto de suspensão é conectado a um suporte que se movimenta horizontalmente sem atrito como mostrado na figura.



Suponha que o suporte seja muito pequeno e que o pêndulo se movimente apenas no plano vertical. Usando como coordenadas generalizadas x e θ , onde x é a posição horizontal do suporte e θ o deslocamento angular do pêndulo, conforme se vê na figura, o movimento do sistema é descrito pela lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} (a^2 \dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta) + mga \cos \theta.$$

- Obtenha a equação de movimento para a coordenada θ .
- Admitindo que os deslocamentos angulares sejam pequenos e que o suporte esteja sujeito a um movimento harmônico forçado de frequência ω , isto é, descrito

por $x(t) = x_0 \cos \omega t$, obtenha a solução geral $\theta(t)$ da equação de movimento para a coordenada θ .

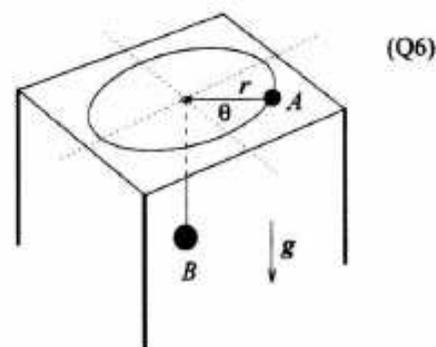
- no caso do item anterior, obtenha a frequência de ressonância ω_R .
- Escreva a solução geral para $\theta(t)$, quando as condições iniciais forem $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ e o suporte movimentar-se com frequência $\omega < \omega_R$.

Q7. Um átomo de trítio pode ser descrito classicamente como um núcleo com carga elétrica $+e$, composto por um próton e dois nêutrons, circundado por um elétron orbital de carga $-e$, o qual percorre uma órbita circular de raio r_0 . Em um processo conhecido como decaimento beta, o núcleo de trítio se transforma em um núcleo de hélio, composto por dois prótons e um nêutron, emitindo um par de partículas que rapidamente escapa do sistema atômico. Como consequência desse processo, o átomo de hélio fica ionizado uma vez, e o elétron orbital passa subitamente para uma nova situação, orbitando agora em torno de um núcleo de carga $+2e$.

- Supondo que o par de partículas que escapa do átomo tenha momento linear total de módulo p , obtenha a velocidade de recuo do átomo de hélio de massa M .
- Obtenha a energia E_a do elétron orbital antes do decaimento beta.
- Calcule a energia E_d do elétron orbital depois do decaimento beta e obtenha a razão $\rho = \frac{E_a}{E_d}$.
- Determine o momento angular total do elétron em função de r_0 e da massa m do elétron. Calcule a maior e a menor distância entre o elétron e o núcleo na nova órbita em termos de r_0 .

2014-1

Q6. Duas partículas, A e B , de massas m e M ($m \neq M$), respectivamente, estão conectadas às extremidades de um fio inextensível de comprimento ℓ e de massa desprezível que passa por um orifício em uma mesa horizontal, como mostrado na figura abaixo. A partícula A move-se sem atrito sobre a mesa enquanto a outra o faz verticalmente sob ação conjunta da gravidade, de aceleração \vec{g} , e da tração do fio (desconsidere também o atrito entre o fio e o orifício).

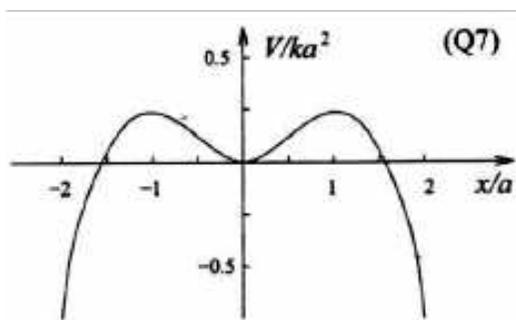


- a) Supondo que a posição inicial de A seja $r = r_0$, que a velocidade inicial deve ser conferida a ela para que B permaneça em repouso abaixo da superfície da mesa?
- b) Obtenhas as equações de movimento, admitindo que a lagrangiana que descreve um movimento arbitrário desse sistema é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m + M) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - M g (r - \ell).$$

- c) Obtenha as grandezas conservadas e dê o significado de cada uma delas.
- d) Se B for ligeiramente e verticalmente deslocada da sua posição, ocorrerão pequenas oscilações no sistema. Obtenha o período dessas oscilações em termos do raio de equilíbrio r_{eq} e das demais grandezas que caracterizam o sistema (m , M , e g).

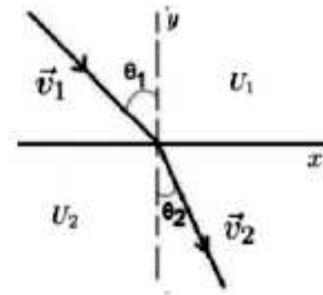
Q7. Uma partícula de massa m está sujeita ao potencial unidimensional $V(x) = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{k}{4a^2} x^4$, mostrado na figura abaixo, onde k e a são constantes positivas.



- a) Determine a força $F(x)$ e obtenha os pontos de equilíbrio, determinando sua natureza
- b) Calcule o período das pequenas oscilações que ocorrem em torno do ponto de equilíbrio estável.
- c) Admita que a partícula esteja em repouso no ponto $x = 0$ e que receba um impulso que lhe confere, instantaneamente, uma velocidade de módulo v na direção de x positivo. Discuta o que ocorre nos seguintes casos: $0 < v \leq a \sqrt{\frac{k}{2m}}$ e $v > a \sqrt{\frac{k}{2m}}$.
- d) Esboce o diagrama de fase do sistema (\dot{x} versus x para energia constante) para os diversos tipos de movimento. Indique claramente a curva que corresponde à transição de movimento periódico, bem como o valor da energia correspondente.

2013-2

Q6. Uma partícula de massa m move-se com velocidade \vec{v}_1 no semi-plano superior até ser desviada ao atingir o semi-plano inferior, onde passa a se propagar com velocidade \vec{v}_2 , conforme ilustrado na figura abaixo.



Observa-se experimentalmente as seguintes características: i) a partícula passa do meio 1 ao meio 2 desde que $v_1 > v_{\min}$; ii) a partícula se move de modo retilíneo e uniforme em cada um dos semi-planos; iii) o ângulo de saída θ_2 é diferente do ângulo de entrada θ_1 , o que nos faz presumir que em cada meio a partícula esteja sob ação de diferentes potenciais U_1 e U_2 .

- a) Com base no experimento, esboce o gráfico do potencial U em função de y para x fixo (justificando o gráfico).
- b) Determine v_2 em termos de v_1 , de m e dos potenciais U_1 e U_2 . Qual é a velocidade v_{\min} acima da qual observa-se a passagem da partícula do meio 1 para o meio 2?
- c) Determine o índice de refração $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$ em termos de m , v_1 e dos potenciais em cada meio.

Q7. Uma partícula de massa m desenvolve movimento unidimensional sob ação do potencial abaixo (c é uma constante)

$$U(x) = \frac{1}{2} x^4 - c x^2.$$

- a) Esboce os gráficos de $U(x)$ e dos respectivos espaços de fase (\dot{x} versus x para todas as energias possíveis) nos seguintes casos: i) $c > 0$, ii) $c = 0$ e iii) $c < 0$.
- b) Por meio da energia total E , identifique todos os movimentos periódicos possíveis e seus respectivos pontos de inversão (onde a velocidade é nula) para cada um dos casos do item (a).
- c) Determine a dependência do período de oscilações com a energia total E para $c = 0$.

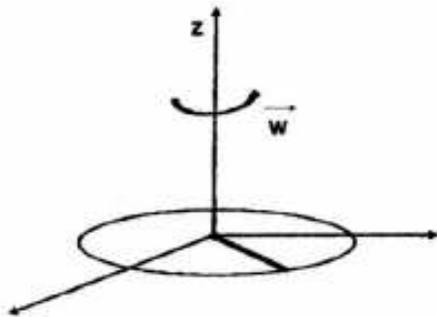
2013-1

Q6. Um equilibrista de massa m está inicialmente parado na extremidade de uma barra larga, horizontal, homogênea, de comprimento D e massa $M = 3m$. A barra gira em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. O equilibrista começa então a caminhar sobre a barra, em direção ao eixo de rotação, com velocidade constante. Considere o período inicial de rotação do sistema igual a T_0 .

Considere o equilibrista como uma massa puntiforme. Dado: I_{CM} (barra) = $\frac{1}{12} M D^2$.

- Determine o torque das forças que atuam sobre o equilibrista em relação ao centro da barra.
- Determine o momento angular do sistema quando o equilibrista atinge o centro da barra. Determine o período de rotação do sistema nessa situação.
- Determine as energias nas posições inicial e final do sistema. Nesse movimento, a energia do sistema variou?

Q7. Uma partícula de massa m se encontra no interior de um cano oco, liso, estreito e longo que gira num plano horizontal com velocidade angular ω constante. O eixo de rotação passa por uma das extremidades do cano, como mostra a figura.



- Escreva a lagrangiana da partícula.
- Obtenha a equação de Lagrange do movimento da partícula.
- Determine o movimento da partícula, considerando que inicialmente ela é lançada do centro de rotação com velocidade \vec{v}_0 .
- Obtenha a função Hamiltoniana (H) do movimento dessa partícula e as equações de Hamilton do movimento.
- Dentre as grandezas físicas H e E (energia), quais são conservadas? Justifique sua resposta.

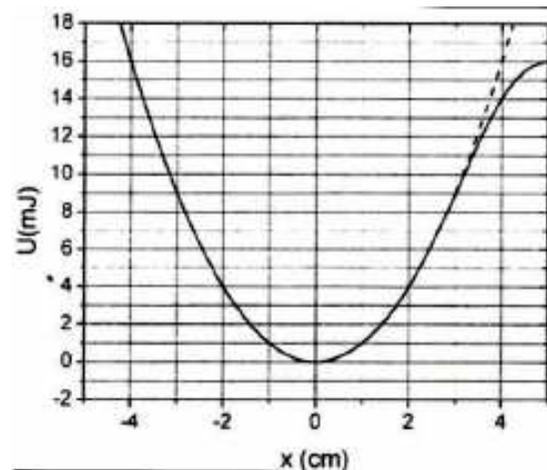
2012-2

Q6. Um corpo celeste de massa m se aproxima do Sol (massa $M \gg m$) seguindo uma trajetória hiperbólica e quando está a uma distância r_0 dele, a sua velocidade é v_0 e faz um ângulo de 30° com o raio vetor ao Sol.

- Calcule o momento angular L e a energia E desse corpo celeste.
- Determine a distância r_p de máxima aproximação do corpo celeste ao Sol, expressando o seu resultado em termos de L e E .
- Quando o corpo celeste atinge a distância r_p de máxima aproximação, sofre um choque com um pequeno asteroide de tal maneira que sua massa não varia, porém ele passa a descrever uma órbita circular de raio r_p no mesmo plano da órbita anterior. Calcule a nova

energia e o novo momento angular do corpo celeste após a colisão, expressando o seu resultado em termos de r_p .

Q7. Uma bola de massa $m = 450g$ está presa a uma mola cuja energia potencial em função da elongação x está mostrada na figura abaixo (linha sólida).



Expresse as respostas no SI.

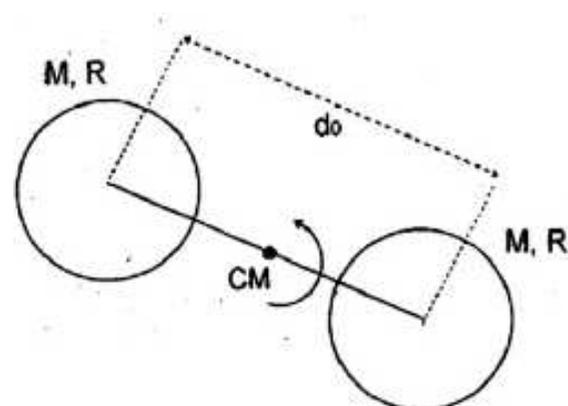
- Determine a constante elástica da mola, para pequenos deslocamentos.
- Esboce um gráfico da força que atua sobre essa bola em função da elongação da mola.

Sabendo que o movimento da bola é unidimensional e sua elongação máxima é de 3cm:

- determine sua velocidade máxima;
- determine a energia cinética da bola nesse movimento para a elongação da mola $x = -2cm$;
- Determine a posição ($x < 0$) em que a bola deve ser solta a partir do repouso para atingir o ponto $x = 5$ com velocidade nula.

2012-1

Q1. Duas esferas ocas, ambas de massa M e raio R , que estão girando em torno do centro de massa (CM) do sistema com um período inicial T_0 , são mantidas distantes $d_0 = 8R$ uma da outra por um fio ideal que passa pelos respectivos centros, conforme ilustra a figura abaixo.



Num dado instante um motor, colocado dentro de uma das esferas, começa a enrolar o fio lentamente, aproximando uma esfera da outra. Considere que o momento de inércia do motor seja desprezível quando comparado ao das esferas. Desconsidere efeitos da gravidade e expresse todos os seus resultados em termos de M , R e T_0 . Dado: o momento de inércia da casca esférica em relação a um eixo que passa pelo seu centro é $\frac{2}{3}MR^2$.

- Determine o momento angular desse sistema em relação ao seu centro de massa, antes do motor ser ligado.
- Calcule a velocidade angular de rotação, ω_f , no instante em que uma esfera encosta-se à outra.
- Calcule a variação da energia cinética do sistema até esse instante.
- Qual foi o trabalho realizado pelo motor para fazer com que as esferas se encostem?

Q2. Um pêndulo simples consiste de uma massa m pendurada a partir de um ponto fixo por uma barra estreita de massa desprezível, inextensível, de comprimento ℓ . Seja g a aceleração da gravidade, faça sempre a aproximação de pequenos ângulos.

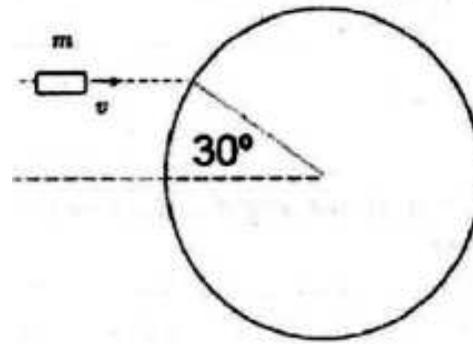
- Escreva a equação de movimento desprezando o atrito. Obtenha a frequência natural ω do pêndulo.
- Determine $\theta(t)$ para as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = 0$ e $\frac{d\theta(0)}{dt} = \Omega$.
- Escreva a equação do movimento do pêndulo na presença de uma forma de atrito viscoso dada por

$$F_R = 2m \sqrt{g\ell} \frac{d\theta}{dt}.$$

- Na situação do item (c), determine $\theta(t)$ para as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta(0)}{dt} = 0$

2011-2

Q1. Uma bala de massa m é disparada com velocidade v contra um disco homogêneo de massa M e raio R , inicialmente parado, que se encontra deitado sobre uma superfície horizontal lisa sem atrito. Suponha que a bala atinja o disco como indicado na figura e fique retida na superfície do disco. Considere que o centro de massa do sistema (disco + bala) após a colisão coincide com o centro do disco. Dado: $I_{disco}^{CM} = \frac{1}{2}MR^2$.



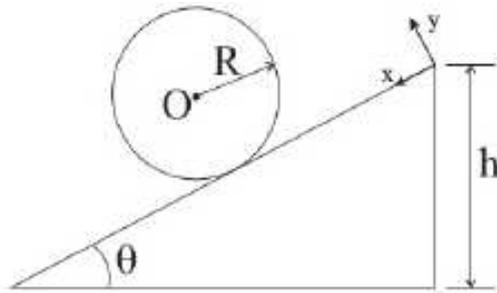
- Qual é a velocidade do centro do disco após a colisão?
- Qual é a velocidade angular do sistema (disco + bala) após a colisão?
- Qual é a variação de energia do sistema devido à colisão?

Q2. Uma partícula de massa m sob a ação da gravidade g constante está vinculada a se mover no interior da superfície de um cone invertido cuja geratriz forma um ângulo α com o eixo do cone. O vértice do cone está na origem e seu eixo ao longo da direção vertical. O atrito pode ser desprezado.

- Determine a energia cinética e a energia potencial da partícula. *Sugestão: utilize coordenadas esféricas*
- Escreva a lagrangiana do sistema e obtenha as equações de movimento.
- Há grandezas físicas conservadas no movimento dessa partícula? Se há, diga quais são essas grandezas, argumentando sobre como chegou à conclusão que são conservadas.
- A partir da definição da hamiltoniana, obtenha sua forma explícita em termos das coordenadas e momentos generalizados, e compare-a com a energia mecânica da partícula.
- Mostre que a partícula em questão pode executar pequenas oscilações radiais em torno de um raio de equilíbrio r_0 e determine sua frequência. Compare o valor obtido com a frequência de revolução no movimento circular.

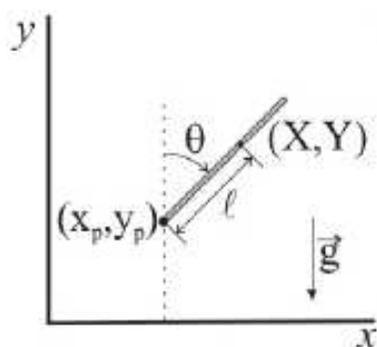
2011-1

Q1. Considere um corpo de massa M de seção transversal circular de raio R que rola sem deslizamento sobre um plano que possui um ângulo de inclinação θ em relação à horizontal, conforme mostra a figura abaixo. O coeficiente de atrito estático entre o corpo e o plano é μ_e . O momento de inércia do corpo em relação a um eixo passando pelo ponto O é I e a aceleração da gravidade é g .



- Desenhe o diagrama de forças para o corpo. Escreva a equação que relaciona a velocidade angular, $\dot{\varphi}$, e rolagamento do corpo e a velocidade de translação, \dot{x} , que caracteriza um rolamento sem deslizamento.
- Determine a aceleração, \ddot{x} , associada à translação do corpo ao longo do plano inclinado, em termos dos parâmetros que constam no enunciado.
- Assuma que o corpo inicia o seu movimento a partir do repouso na origem do sistema de coordenadas cartesianas indicado na figura. Calcule a energia mecânica no início e no final do movimento. A energia mecânica do sistema é conservada?
- Calcule o momento de inércia I considerando que o corpo seja (i) um anel e (ii) um disco. Assuma que as massas dos corpos estão uniformemente distribuídas. Suponha agora que o ângulo θ possa ser variado. A partir de qual θ cessa o movimento de rolamento puro e o corpo começa a deslizar, nos casos (i) e (ii) acima? Deixe a resposta em termos de μ_c .

Q2. Considere o pêndulo invertido da figura abaixo, composto por uma barra de massa M e momento de inércia I_0 em relação ao seu centro de massa, cujas coordenadas são (X, Y) . A barra pode girar livremente no plano xy em torno de um eixo de rotação que passa pela posição (x_p, y_p) , a uma distância do centro de massa. A aceleração da gravidade é g .



- Escreva as equações para a energia cinética e potencial do sistema em termos de X , Y e θ .

Para os itens (b), (c) e (d) assuma que um agente externo faz o eixo de rotação oscilar horizontalmente com frequência angular ω , ou seja, tem-se $y_p(t) = 0$ e $x_p(t) = A \cos(\omega t)$.

- Escreva a lagrangiana do sistema em termos da coordenada generalizada θ .
- Escreva a equação de movimento para a lagrangiana do item (b).

- Considere que o sistema executa pequenas oscilações (θ pequeno). Mostre que neste caso, $\theta(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ é uma solução para o problema. Determine α e β .

2010-2

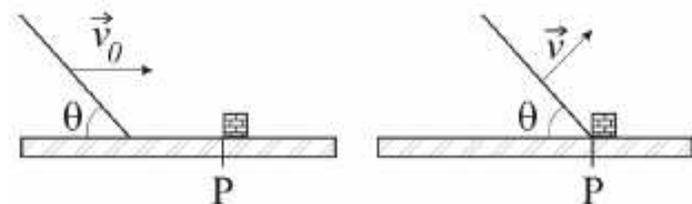
Q1. A interação entre dois átomos de massas m_1 e m_2 , que formam uma molécula, pode ser descrita pelo potencial de Lennard-Jones dado por

$$V(x) = A \left[\left(\frac{b}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{b}{x} \right)^6 \right],$$

onde A e b são parâmetros positivos e x a separação interatômica. Trate o problema classicamente e despreze qualquer tipo de rotação da molécula.

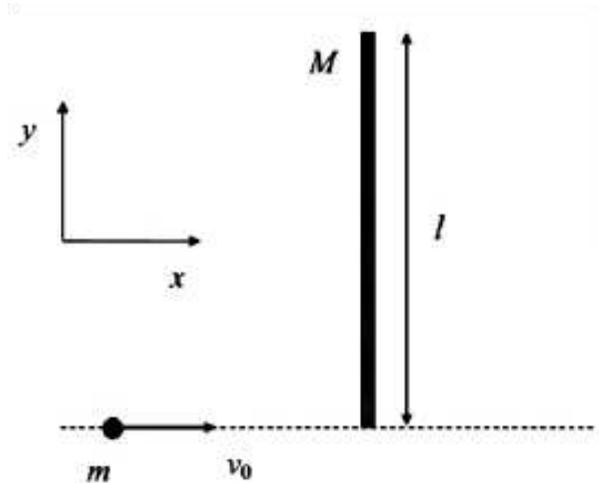
- Determine a posição de equilíbrio em função de A e b .
- Calcule a menor energia para dissociar a molécula.
- Mostre que o equilíbrio é estável e calcule a frequência de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.
- Desenhe um gráfico do potencial de Lennard Jones indicando os parâmetros obtidos nos itens (a) e (b).

Q2. Atualmente, a totalidade dos atletas de alto nível de salto em altura utiliza uma técnica para o salto batizada de “Salto Fosbury”. Suponha que nesse salto o atleta possa ser aproximado por uma barra rígida de comprimento ℓ , inclinada por um ângulo θ e movendo-se com uma velocidade v_0 para a direita conforme mostra a figura abaixo. No momento do “salto” essa barra começa a girar em torno do ponto P . A barra possui uma massa m homogeneamente distribuída.



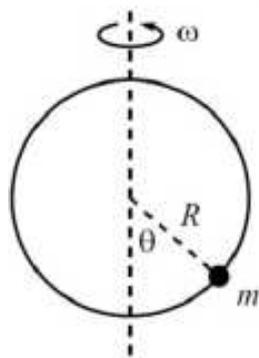
- Calcule o momento de inércia da barra em relação à sua extremidade.
- A conservação de uma grandeza física permite que a barra obtenha uma componente vertical para a velocidade do seu centro de massa. Qual é essa grandeza física?
- Calcule a componente vertical v_y da velocidade do seu centro de massa imediatamente após atingir o ponto P .
- Qual é a altura máxima atingida pelo seu centro de massa em relação ao solo.

Q1. Uma partícula de massa m colide com uma barra fina e homogênea inicialmente em repouso, de momento de inércia $I = M l^2/12$ relativo ao seu centro de massa, sendo M a sua massa e l o seu comprimento. Antes da colisão, a partícula move-se perpendicularmente à barra com velocidade v_0 . A partícula colide elasticamente com a extremidade da barra, conforme ilustra a figura abaixo



- Escreva as equações que expressam as grandezas físicas conservadas na colisão.
- Determine o vetor velocidade de translação do centro de massa da barra imediatamente após a colisão.
- Determine o vetor velocidade angular de rotação da barra imediatamente após a colisão.
- Determine o vetor velocidade da partícula imediatamente após a colisão.

Q2. Uma partícula de massa m pode se mover sem atrito num aro de raio R , como mostrado na figura abaixo. O aro gira com velocidade angular constante ω em torno do eixo vertical, como mostra a figura abaixo. Considere a aceleração da gravidade g .



- Determine a energia cinética da partícula em função de θ , $\dot{\theta}$, R , m , e ω .
- Determine a lagrangiana da partícula, adotando energia potencial nula no ponto correspondente a $\theta = 0$.
- Determine a equação de movimento da partícula.
- Determine os pontos de equilíbrio.

Q1. Um disco uniforme, de seção reta circular de raio R , massa M e momento de inércia I (com relação ao eixo perpendicular ao plano do disco e que passa pelo seu centro), encontra-se preso a uma mola de constante k , massa desprezível e um certo comprimento de repouso, como é mostrado na figura abaixo. O disco rola sobre a superfície sem deslizar e seu movimento está confinado ao plano da figura.



- Escreva a equação para a energia mecânica do sistema em função da velocidade do centro de massa e da distensão da mola.
- Obtenha a equação de movimento para o centro de massa do disco.
- Determine a frequência angular de oscilação do centro de massa do disco.

Q2. Uma partícula de massa m move-se em um potencial $V(r) = -\frac{C}{3r^3}$, sendo C uma constante positiva. Considere que a partícula possua momento angular L diferente de zero.

- Escreva a equação para a energia mecânica da partícula em termos da distância r à origem, da sua derivada temporal \dot{r} , do momento angular L , da massa m e da constante C .
- Considerando os termos que só dependem de r na energia mecânica como um potencial efetivo $V_{ef}(r)$, esboce o gráfico de $V_{ef}(r)$.
- Existem órbitas circulares para essa partícula? Em caso afirmativo, determine o raio de cada uma dessas possíveis órbitas e discuta a estabilidade das mesmas.
- Calcule a energia mecânica mínima, E_{min} , acima da qual a partícula vinda do infinito é capturada pelo potencial, ou seja, não retorna mais para o infinito.

Q1. Uma partícula de massa m acha-se sob a ação de uma força cuja energia potencial é dada por

$$U(x) = ax^2 - bx^3,$$

onde a e b são constantes positivas.

- Obtenha a expressão para a força que atua sobre essa partícula.

- b) Calcule os pontos de equilíbrio indicando se eles são estáveis ou instáveis.
- c) Calcule a frequência de pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável.
- d) Qual deve ser o valor mínimo da energia cinética da partícula quando esta se encontra em $x = 0$ para que ela não fique confinada na região em torno da origem?

Q2. Um pêndulo simples consiste de um corpo de dimensões desprezíveis e massa m amarrado a um fio de massa desprezível e comprimento ℓ . O pêndulo encontra-se sob a ação da gravidade e pode oscilar num plano vertical. Este pêndulo está amarrado a um ponto de fixação que se desloca com aceleração constante a ao longo de uma reta horizontal no plano de oscilação. Adote um sistema de coordenadas tal que x seja horizontal, apontando na direção e sentido de \vec{a} e y seja vertical apontando para baixo. Considere que o ponto de fixação se encontra em $x = y = 0$ com velocidade $v_x = v_y = 0$ em $t = 0$.

- a) Escreva a Lagrangeana que descreve o movimento do pêndulo em função dos parâmetros dados no problema e do ângulo θ formado entre o fio e a vertical.
- b) Obtenha a equação de movimento do pêndulo.
- c) Encontre o valor inicial do ângulo θ que mantém o pêndulo com essa inclinação fixa durante todo o movimento.

2008-2

Q1. Considere uma partícula de massa m movendo-se sob a ação do potencial

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx^4}{4a^2}$$

onde k e a são constantes positivas. Suponha que o movimento seja unidimensional e despreze as forças de atrito.

- a) Escreva a equação de movimento.
- b) Faça um esboço do gráfico de $V(x)$ e descreva os tipos de movimentos possíveis.
- c) Mostre que a função $h(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$ é uma constante do movimento. Encontre a solução $x(t)$ para o caso $h = \frac{ka^2}{4}$ e $x(0) = 0$.

Q2. Considere um pêndulo plano formado por uma haste inextensível de comprimento ℓ e massa desprezível tendo na sua extremidade uma partícula pontual de massa m .

- a) Escreva as equações de movimento da partícula em coordenadas polares r e θ .
- b) Suponha que o pêndulo seja lançado de $\theta(0) = \theta_0$ com $\dot{\theta}(0) = 0$. Calcule o valor máximo que a tensão na haste atinge durante o movimento.

- c) Encontre $\theta(t)$ na aproximação de pequenas oscilações supondo $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$
- d) Esboce um gráfico mostrando como o período do movimento da partícula varia com a sua energia.

2008-1

Q1. Considere um corpo de massa m preso a uma mola de constante elástica k e sujeito a uma força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Suponha que o movimento da massa seja unidimensional e despreze as forças de atrito.

- a) Escreva a equação de movimento.
- b) Obtenha a solução geral da equação homogênea, $x_h(t)$, e uma solução particular da equação não-homogênea, $x_{nh}(t)$.
- c) Escreva a solução total $x(t)$ e imponha as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$.
- d) Obtenha $x(t)$ no limite $\omega \rightarrow \omega_0$, onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

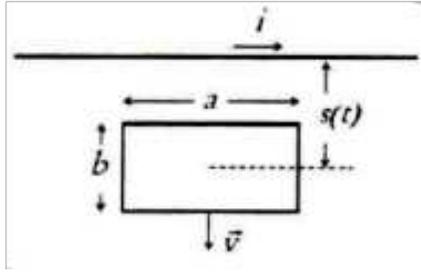
Q2. Considere uma partícula de massa m movendo-se sob a ação do potencial central $V(r) = k \left(\frac{r}{r_0}\right)^4$ onde k e r_0 são constantes positivas. Em coordenadas polares o movimento radial é dado pela equação $m\ddot{r} = -\frac{dV_{ef}}{dr}$ onde $V_{ef} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ e $L = mr^2\dot{\theta}$ é o momento angular perpendicular ao plano do movimento.

- a) Faça um esboço do potencial efetivo.
- b) Encontre a distância a da partícula ao centro de forças para que seu movimento seja uma órbita circular com momento angular $L = 2r_0\sqrt{mk}$. Calcule o valor das energias cinética, potencial e total nesta órbita.
- c) Calcule o período de rotação deste movimento circular.
- d) Se a partícula em órbita circular sofrer uma pequena perturbação que não altere o valor de L ela começará a oscilar em torno da órbita original. Calcule o período de pequenas oscilações radiais deste movimento.

ELETROMAGNETISMO

2015-2

Q1. Uma espira condutora retangular (comprimento a , largura b e resistência R) situa-se nas vizinhanças de um fio reto infinitamente longo que é percorrido por uma corrente i para a direita, conforme a figura.



A espira afasta-se do fio com uma velocidade constante \vec{v} , de forma que a distância do centro da espira ao fio é dada por $s(t) = s_0 + vt$. Calcule:

- o módulo do campo magnético produzido pela corrente num ponto situado a uma distância r do fio. Indique a direção e o sentido do campo na região delimitada pela espira;
- o fluxo magnético na região delimitada pela espira para um dado valor de $s(t)$;
- a força eletromotriz induzida na espira para uma certa distância $s(t)$;
- a corrente induzida na espira, i_{ind} . Indique o sentido da mesma.

Q2. Um meio condutor tem condutividade elétrica σ , permeabilidade magnética μ_0 e permissividade elétrica $\epsilon = K\epsilon_0$, em que K é a constante dielétrica real. A equação de onda para o campo elétrico neste meio é dada por

$$\nabla^2 \vec{E} - K \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0,$$

sendo $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$.

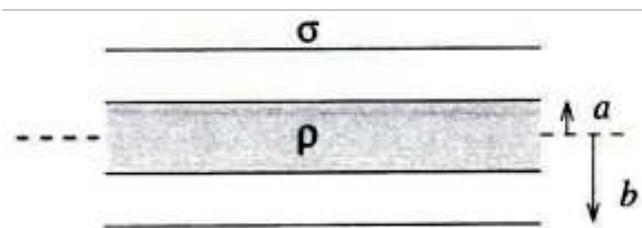
- Mostre que a função de onda plana monocromática $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \tilde{q}z)}$ é solução da equação diferencial acima. Encontre a relação entre o número de onda complexo, \tilde{q} , e a frequência angular, ω , para que $\vec{E}(z, t)$ seja solução. Mostre também que \tilde{q} se torna real no caso de um meio isolante.
- Encontre a constante dielétrica complexa, \tilde{K} , usando a relação entre o número de onda e a constante dielétrica, $\tilde{q}^2 = \tilde{K} \frac{\omega^2}{c^2}$. Verifique que a parte real de \tilde{K} é igual a K , como esperado, e explicita a parte imaginária de \tilde{K} .
- Faça a aproximação para baixas frequências na expressão da constante dielétrica complexa do item (b) e calcule o índice de refração complexo, $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{K}}$. Mostre que as partes real e imaginária de \tilde{n} são iguais neste caso.
- A profundidade de penetração da onda no meio condutor, δ , é dada pelo inverso da parte imaginária do número de onda, q_i , ou seja, $\delta = \frac{1}{q_i}$. Lembre-se

de que $\tilde{q} = \tilde{n} \frac{\omega}{c}$ e calcule a profundidade de penetração para a prata (Ag) na região de micro-ondas ($f = \frac{\omega}{2\pi} = 10\text{GHz}$), para a qual vale a aproximação do item (c). A condutividade da prata nesta faixa de frequências é $\sigma_{Ag} = 3 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$. Aproxime o resultado do cálculo e obtenha a ordem de grandeza de δ_{Ag} (1 m, 10cm, 1 cm ...)

2015-1

Q1. Questão

- Um cilindro dielétrico maciço, de comprimento infinito e raio a , possui uma densidade de carga volumétrica uniforme e positiva ρ . Uma casca cilíndrica, também dielétrica, de raio $b > a$, com eixo comum ao cilindro, tem uma densidade de carga superficial uniforme e negativa σ , de forma que a carga total do cilindro mais casca, em certo comprimento, é zero, e portanto $\sigma = -\frac{\rho a^2}{2b}$. Calcule o campo elétrico $\vec{E}(r)$ para as regiões $r < a$, $a < r < b$ e $b < r$ sendo r a distância do eixo do cilindro.



- Considere em seguida que o conjunto cilindro mais casca se move para a direita com velocidade \vec{v} . O movimento dá origem a uma corrente elétrica $I = \pi a^2 \rho v$ no cilindro maciço, para a direita e uniformemente distribuída na seção reta, de forma que a densidade de corrente fica sendo dada por $\vec{J} = \rho \vec{v}$. Da mesma forma, a casca em movimento dá origem a uma corrente de mesma intensidade I , mas em sentido contrário (para a esquerda). Calcule a indução magnética \vec{B} para as regiões $r < a$, $a < r < b$ e $b < r$.

Q2. O campo elétrico de uma onda plana monocromática no vácuo é dado por

$$\vec{E}(z, t) = (E_1 \hat{x} + E_2 \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)},$$

onde \hat{x} e \hat{y} são versores cartesianos nas direções x e y , respectivamente, e E_1 e E_2 são constantes.

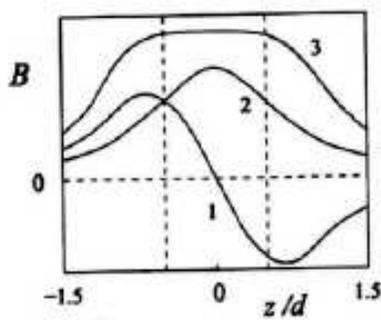
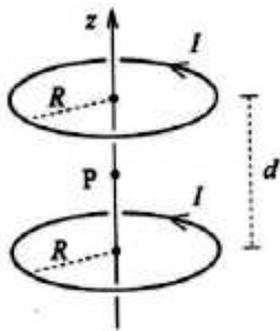
- Encontre a indução magnética $\vec{B}(z, t)$.
- Mostre que o campo elétrico e a indução magnética são ortogonais entre si.
- Encontre o vetor de Poynting da onda.

Q1. Um capacitor esférico é composto por uma esfera condutora de raio R_1 , concêntrica com uma casca condutora esférica de raio R_2 e espessura desprezível, com $R_1 < R_2$. O condutor interno possui carga $+Q$ e o externo $-Q$.

- Calcule o campo elétrico e a densidade de energia em função de r , onde r é a distância radial a partir do centro dos condutores, para qualquer r .
- Determine a capacitância C do capacitor.
- Calcule a energia do campo elétrico armazenada em uma casca esférica de raio r , espessura dr e volume $4\pi r^2 dr$, localizada entre os condutores. Integre a expressão obtida para encontrar a energia total armazenada entre os condutores. Dê sua resposta em termos da carga Q e da capacitância C .

Q2. Duas bobinas idênticas, compostas cada uma por um anel de raio R e espessura desprezível, são montadas com seus eixos coincidentes com o eixo- z , conforme se vê na figura abaixo. Seus centros estão separados por uma distância d , com o ponto médio P coincidindo com a origem do eixo- z . Cada bobina transporta uma corrente elétrica total de densidade I . Ambas as correntes têm o mesmo sentido anti-horário.

- Utilize a lei de Biot-Savart para determinar o campo magnético de uma única bobina ao longo de seu eixo de simetria.
- A partir do resultado anterior, obtenha o campo magnético $B(z)$ ao longo do eixo- z das duas bobinas.
- Admitindo que o espaçamento d seja igual ao raio das bobinas, mostre que, no ponto P , as seguintes igualdades são válidas: $\frac{dB}{dz} = 0$ e $\frac{d^2B}{dz^2} = 0$.
- Considerando os gráficos abaixo, de B (em unidades arbitrárias) versus z , qual a curva descreve o campo magnético ao longo do eixo- z na configuração do item (b)? Justifique.
- Supondo que a corrente na bobina superior tenha seu sentido invertido, calcule o novo valor do campo magnético no ponto P .



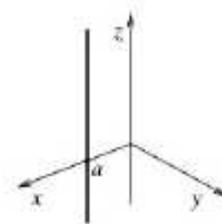
Q1. Considere um condutor macroscópico de forma arbitrária, cuja superfície é fechada e suave. Partindo da lei de Gauss e considerando que o rotacional do campo eletrostático é nulo:

- Calcule o campo elétrico no interior do condutor.
- Obtenha a componente normal do campo elétrico na superfície externa do condutor em termos da densidade superficial de carga.
- Obtenha a componente tangencial do campo elétrico na superfície do condutor.

Q2. Considere um conjunto de soluções de ondas planas eletromagnéticas no vácuo, cujos campos (elétrico e magnético) são descritos pela parte real de funções: $\vec{u}(x,t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, onde \vec{k} é o vetor de onda que determina a direção de propagação da onda, e ω é a frequência angular, que se relaciona com o vetor de onda por $\omega = v|\vec{k}|$, onde $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ é a velocidade de propagação das ondas.

- Mostre que o divergente de $\vec{u}(x,t)$ satisfaz: $\nabla \cdot \vec{u} = i\vec{k} \cdot \vec{u}$.
- Mostre que o rotacional de $\vec{u}(x,t)$ satisfaz: $\nabla \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$.
- Demonstre que as ondas são transversais e que os vetores \vec{E} , \vec{B} , e \vec{k} são mutuamente perpendiculares.

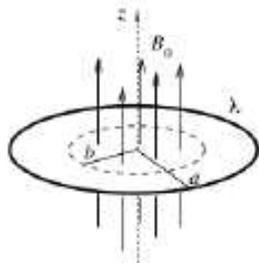
Q1. Considere um fio infinitamente longo disposto paralelamente ao eixo- z , interceptando o plano $z = 0$ em $x = a$ e $y = 0$, conforme mostra a figura. O fio está carregado com densidade linear de carga elétrica λ uniforme.



- Determine o potencial elétrico $V(x,y,z)$ em todo o espaço, de forma que o potencial seja zero no eixo- z . *Sugestão: pode-se calcular o potencial a partir do campo elétrico do fio longo, que é obtido de forma simples usando a lei de Gauss.*
- Considere agora, além do fio, um condutor plano infinito (aterrado) ocupando o plano $x = 0$. Calcule $V(x,y,z)$ para a região $x > 0$ do espaço. *Sugestão: utilize o método das imagens.*

- c) Qual a densidade superficial de carga $\sigma(y, z)$ induzida no condutor plano em $x = 0$?
- d) Calcule a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y, z) dy$ e discuta o resultado obtido.

Q2. Um fio carregado com densidade linear de carga elétrica $\lambda > 0$ está colado (formando um anel) na borda de um disco isolante de raio a , que pode girar ao redor de seu eixo vertical sem atrito. O comprimento do fio é exatamente $2\pi a$. Apenas na região central do disco, até um raio $b < a$, age um campo magnético uniforme \mathbf{B}_0 vertical para cima.



- a) O campo magnético é agora desligado. Obtenha a expressão para o torque devido à força eletromotriz induzida no fio, em termos da variação temporal do campo magnético, $\frac{dB}{dt}$. A partir deste resultado, calcule o momento angular final do disco (módulo e direção).
- b) Considerando como dado o momento de inércia I do sistema disco+fio, calcule o campo magnético (módulo e direção) produzido no centro do disco pelo anel de carga na situação final acima.

2013-1

Q1. Considere uma esfera sólida, uniformemente carregada, de carga Q e raio R .

- a) Determine o vetor campo elétrico \vec{E} em um ponto à distância r do centro da esfera, nos casos $r > R$ e $r \leq R$.
- b) Obtenha a força $d\vec{F}$ sobre um elemento de volume dV da esfera, localizado na posição \vec{r} .
- c) Determine agora, por integração, a força total \vec{F} que age sobre o hemisfério superior da esfera.

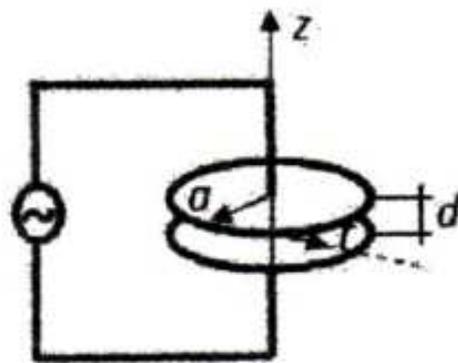
Q2. Um capacitor de placas paralelas é formado por dois discos circulares de raio a , separados entre si de uma distância $d \ll a$, no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador de corrente alternada de frequência ω , que produz uma carga uniforme na placa do capacitor, dada por $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$. São desprezados efeitos de borda. Supondo baixas frequências, de forma que $\frac{\omega a}{c} \ll 1$ (onde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ é a velocidade

da luz), o campo elétrico \vec{E} entre as placas pode ser considerado uniforme. Considere um sistema de coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) , com eixo- z passando pelo centro das placas, conforme indicado na figura.

- a) Calcule a expressão para o campo elétrico \vec{E} entre as placas.
- b) Calcule o campo magnético \vec{B} , em função do raio r , na região entre as placas do capacitor.

c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S} = \frac{(\vec{E} \times \vec{B})}{\mu_0}$.

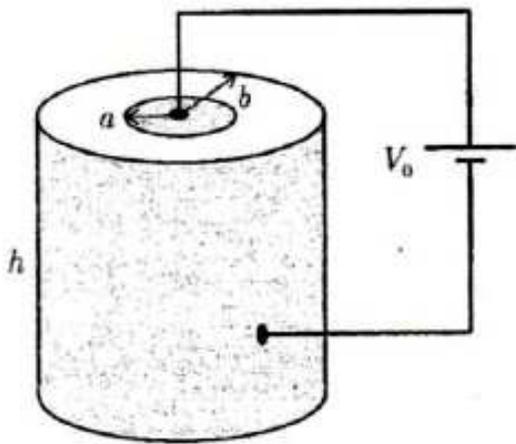
- d) Usando a aproximação de baixas frequências, mostre que é satisfeita a conservação de energia, expressa pela condição $\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, onde $u = \frac{1}{2} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right)$ é a densidade de energia contida no campo eletromagnético.



2012-2

Q1. Um cilindro de altura h e raio externo b é feito de um material com condutividade elétrica σ e permissividade elétrica ϵ . O cilindro é furado ao longo de seu eixo de forma que seu raio interno é a . Um material de alta condutividade elétrica preenche o furo central do cilindro e forma também uma casca cilíndrica em torno da sua borda externa, formando os contatos elétricos do cilindro, conforme ilustra a figura abaixo. Considere $h \gg b$ de modo que os efeitos de borda podem ser desprezados. Aplica-se uma diferença de potencial elétrico V_0 entre esses contatos (tome $V = 0$ na superfície externa do cilindro).

- a) Mostre que, no regime estacionário $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$, a densidade de carga no interior do meio condutor homogêneo é nula.
- b) Mostre que, nesse caso, o potencial elétrico obedece à equação de Laplace e obtenha o vetor campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ no interior do cilindro.
- c) Calcule a carga livre total acumulada na superfície do contato interno (raio a) e a capacitância entre os dois contatos elétricos.
- d) Calcule a resistência elétrica entre esses dois contatos elétricos.



Q2. Um cilindro condutor de raio a conduz uma corrente I ao longo de seu eixo- z . A densidade de corrente \vec{J} no interior do cilindro varia de acordo com a expressão:

$$\vec{J}(r, \varphi, z) = \hat{z} \frac{J_0}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right),$$

onde r é a distância radial entre o ponto considerado e o eixo do cilindro.

- Determine a constante J_0 em termos de I e a .
- Calcule o campo magnético \vec{B} fora do cilindro condutor ($r > a$) e expresse seu resultado em termos de I e a .
- Calcule o campo magnético \vec{B} no interior do cilindro condutor ($r < a$) e expresse seu resultado em termos de I e a .
- Esboce o gráfico qualitativo do módulo do campo magnético, $B(r)$, indicando seu comportamento em $r = 0$ e $r = a$.

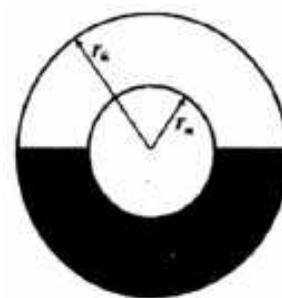
2012-1

Q1. Um cabo coaxial é composto por um longo cilindro reto condutor de raio a e uma fina casca cilíndrica condutora de raio b e concêntrica ao cabo interno. Os dois condutores transportam correntes iguais e opostas de intensidade i .

- Determine o módulo do campo magnético na região entre os dois condutores ($a < r < b$).
- Determine o módulo do campo magnético na região externa ao cabo coaxial ($r > b$).
- Encontre o módulo do campo magnético no interior do cilindro interno ($r < a$) se a corrente está distribuída uniformemente na seção transversal do mesmo.
- Calcule a energia armazenada no campo magnético por unidade de comprimento do cabo.

Q2. Um capacitor esférico isolado possui carga $+Q$ sobre o condutor interno (raio r_a) e carga $-Q$ sobre o condutor externo (raio r_b). A seguir, a metade inferior do volume entre os dois condutores é preenchida por um líquido de constante dielétrica relativa K , conforme indicado na seção reta da figura abaixo.

- Calcule o módulo do campo elétrico no volume entre os dois condutores em função da distância r ao centro do capacitor. Forneça respostas para a metade superior e para a metade inferior desse volume.
- Determine a densidade superficial de cargas livres sobre o condutor interno e sobre o condutor externo.
- Calcule a densidade superficial de cargas de polarização sobre as superfícies interna (r_a) e externa (r_b) do dielétrico.
- Qual é a densidade de carga de polarização sobre a superfície plana do dielétrico? Explique.
- Determine a capacitância do sistema.



2011-2

Q1. Em uma fábrica de chocolate em pó, utiliza-se tubulações com o ar comprimido para mover o chocolate em pó entre diferentes setores. Entretanto, com o atrito, o chocolate, acaba ficando eletricamente carregado, de tal forma que temos uma densidade volumétrica uniforme de cargas positivas ρ dentro da tubulação de raio R . Suponha que os tubos são condutores e encontram-se aterrados, e que a constante dielétrica do ar não é alterada pelo chocolate em pó.

- Calcule o campo elétrico dentro e fora da tubulação, considerando que está é um cilindro muito longo.
- Calcule o potencial elétrico dentro e fora da tubulação. Tome $V = 0$ na parede do tubo.
- Esboce o gráfico do campo elétrico e do potencial em função das distâncias ao eixo da tubulação.
- Se o campo elétrico for maior que um certo valor E_0 , podemos ter o rompimento da rigidez dielétrica do ar, resultando numa faísca elétrica. Como o chocolate em pó é muito inflamável, uma faísca no interior da tubulação poderia causar uma explosão. Determine qual condição a tubulação deve satisfazer para evitar este risco.

Q2. Um plasma pode ser pensado como um gás clássico (não relativístico) de íons positivos e elétrons. Estamos interessados inicialmente na interação de uma onda eletromagnética com os elétrons livres deste plasma, já que estes têm massa muito menor do que os íons positivos.

- a) Para uma onda eletromagnética harmônica transversal, seu campo elétrico \vec{E} pode ser expresso da forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Mostre que nas operações envolvendo $\vec{\nabla}$ este operador pode ser substituído por $i\vec{k}$, e as derivadas temporais $\frac{\partial}{\partial t}$ por $-i\omega$. Reescreva as equações de Maxwell usando estes fatos.

Considere que a onda harmônica se propaga na direção z e suponha que o número médio de elétrons por unidade de volume do plasma é n .

- b) Mostre que a densidade de corrente induzida pelo campo elétrico da onda é

$$\vec{J} = i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E},$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétron, e ω é a frequência da onda. Justifique cuidadosamente suas hipóteses.

- c) Partindo das equações de Maxwell, obtenha a relação de dispersão $\omega(k)$ para a propagação da onda.
d) O plasma admite a propagação de ondas com quaisquer frequências? Justifique sua resposta.

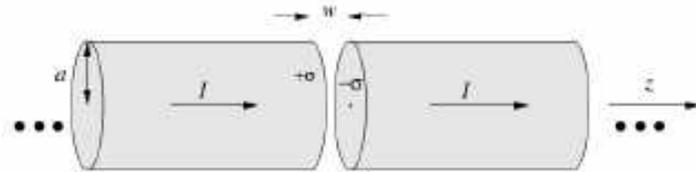
2011-1

Q6. Coloca-se uma esfera metálica descarregada, de raio R , numa região do espaço inicialmente preenchida por um campo elétrico dado por $\vec{E}_i = E_0 \hat{k}$. Escolha a origem do sistema de coordenadas no centro da esfera.

- a) Esboce as linhas do campo elétrico em toda a região do espaço. Justifique o esboço utilizando argumentos físicos.
b) Determine o campo elétrico $\vec{E}_f(\vec{r})$ em toda a região do espaço. Em particular, encontre os campos para os pontos em que $|\vec{r}| \gg R$ e $|\vec{r}| \approx R$ e verifique se eles são consistentes com o esboço no item (a).
c) Ache a densidade de carga na esfera. Se a esfera possuir raio igual a 10 cm e $E_0 = 100 \text{ N/C}$, calcule as cargas acumuladas nos hemisférios norte e sul da esfera.
d) Suponha que a esfera metálica seja substituída por uma esfera dielétrica. Discuta **qualitativamente** o que ocorre neste caso e esboce as linhas do campo elétrico em toda a região do espaço.

Q7. Considere o arranjo hipotético ilustrado na figura abaixo, em que um fio sólido de raio a estendido ao longo do eixo z conduz uma corrente elétrica I , uniformemente distribuída sobre a sua seção transversal, que é mantida constante.

A pequena lacuna no fio, de largura $w \ll a$, forma um capacitor de placas paralelas. A carga no capacitor é zero no instante $t = 0$.



- a) Encontre o vetor campo elétrico na lacuna em função da distância ρ a partir do eixo z e do tempo t , além dos parâmetros I , w e a . Despreze os efeitos de borda.
b) Encontre o vetor campo magnético na lacuna em função de ρ e t e dos parâmetros I , w e a .
c) Calcule a densidade de energia eletromagnética u_{em} e o vetor de Poynting na lacuna, indicando explicitamente a sua direção e o seu sentido.
d) Determine a energia total U em na lacuna em função do tempo. Compare a taxa de variação de U_{em} com o tempo e o fluxo de energia por unidade de tempo (fluxo de potência), obtido fazendo-se a integral de superfície do vetor de Poynting.

2010-2

Q1. Um cabo coaxial é constituído por um fio sólido de raio a envolto por uma casca cilíndrica concêntrica de raio b , com comprimento $L \gg b$. Ele é usado como linha de transmissão entre uma bateria de fem V e uma resistência R , como indicado na figura abaixo. Despreze a resistência do cabo.

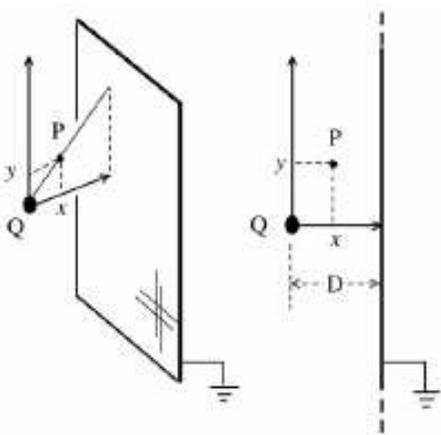
- a) Calcule o vetor campo elétrico no interior do cabo coaxial ($a < r < b$).
b) Calcule o vetor campo magnético no interior do cabo coaxial ($a < r < b$).
c) Calcule o vetor de Poynting, indicando esquematicamente os vetores \vec{E} , \vec{B} e \vec{S} com relação à seção transversal do cabo coaxial. O que aconteceria se os pólos da bateria fossem invertidos?
d) Usando o vetor de Poynting, calcule a potência que flui da bateria para o resistor e explique por que este resultado é esperado.

Observação: Indique claramente as superfícies gaussianas e/ou caminhos de integração utilizados nos cálculos acima.



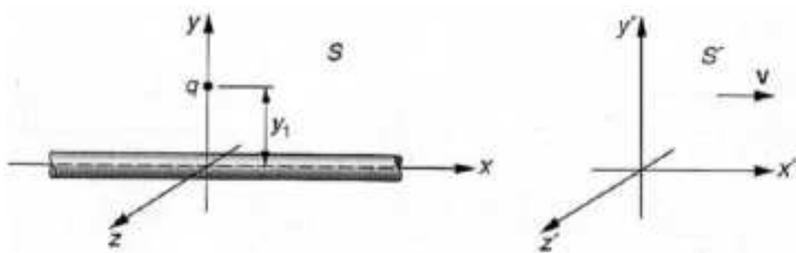
Q2. Considere uma carga puntiforme $Q > 0$ a uma distância D de uma placa infinita, condutora e aterrada, como ilustrada abaixo.

- Desenhe as linhas de campo elétrico e as equipotenciais. Justifique seu desenho.
- Calcule as componentes \hat{x} e \hat{y} do vetor campo elétrico, em todo o espaço à esquerda da placa, em termos das componentes do ponto P ilustrado na figura acima.
- Qual a densidade de carga na placa?
- Determine a força exercida pela placa sobre a carga Q .



2010-1

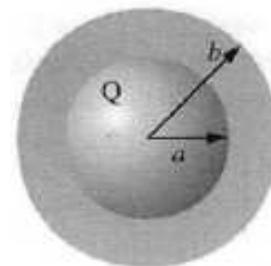
Q1. Considere um fio infinitamente longo, carregado uniformemente com carga negativa de densidade λ , ao longo do eixo- x . Suponha que acima deste fio, na posição $\vec{r} = y_1 \hat{j}$, exista uma carga puntiforme q positiva. O fio e a carga estão em repouso no referencial S . Um segundo referencial, S' , está se movendo para à direita, com uma velocidade relativística de módulo v , como mostra a figura abaixo. Tome a velocidade da luz como sendo c .



- Calcule a força resultante, \vec{F}_{res} , atuando na carga q no referencial S .
- Encontre a densidade de carga λ' no referencial S' . Note que nesse referencial, o fio carregado está em movimento, o que implica na existência de uma corrente elétrica. Calcule essa corrente, indicando o sentido dela.

- Qual a força resultante, \vec{F}'_{res} , no referencial S' ? Compare com \vec{F}_{res} , obtida no item (a). Quais as direções e sentidos dessas duas forças?
- A relação entre as forças eletromagnéticas \vec{F}_{res} e \vec{F}'_{res} , obtidas nos itens (a) e (c), são consistentes com os resultados da teoria da relatividade? Justifique sua resposta. *Dica: Pela teoria da relatividade restrita, as transformações entre \vec{F}_\perp e \vec{F}'_\perp e entre \vec{F}_\parallel e \vec{F}'_\parallel , onde \perp e \parallel indicam as direções perpendiculares e paralela ao eixo- x (direção do movimento de S'), respectivamente, podem ser obtidas sabendo-se que (i) a energia e momento (E, \vec{p}) nos referenciais S e S' se transformam como o tempo e espaço (t, \vec{r}) e que (ii) a segunda lei de Newton, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ é válida também na relatividade restrita. Faça a transformação somente na direção de \vec{F}_{res} e \vec{F}'_{res} .*

Q2. Um condutor esférico maciço, de raio a e carregado com carga $Q > 0$, está envolto por um material dielétrico esférico, de constante dielétrica $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ e raio externo b , conforme mostra a figura abaixo.



- Determine o campo elétrico em todo o espaço e esboce um gráfico de seu módulo $E(r)$.
- Determine o potencial no centro das esferas, tomando-se como zero o potencial infinito.
- Encontre as distribuições de cargas livre e ligada (de polarização) nas esferas condutora e dielétrica. Faça uma figura mostrando onde as densidades de cargas se localizam, indicando se são positivas ou negativas.
- Calcule a energia eletrostática do sistema.

2009-2

Q1. No instante inicial $t = 0$, uma partícula de massa m e carga q encontra-se na posição $x_0 \hat{x}$ e com velocidade $v_0 \hat{y}$. Os campos de força agindo sobre a partícula são devidos somente ao potencial elétrico ϕ e ao potencial vetor \vec{A} , dados por

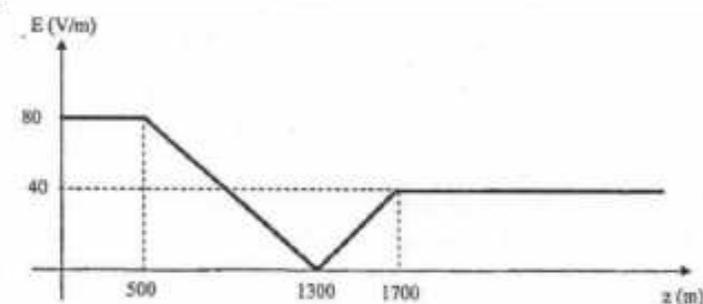
$$\Phi(\vec{r}) = \alpha_0 x + a \alpha_1,$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\beta_0}{2} (\hat{z} \times \vec{r}) + a \beta_1 \hat{u} \exp\left(\frac{\hat{u} \cdot \vec{r}}{a}\right),$$

onde α_0 , α_1 , β_0 e β_1 são constantes reais e \hat{u} é um vetor constante e real.

- a) Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço, $\vec{E}(\vec{r})$.
- b) Determine o vetor indução magnética em todo o espaço, $\vec{B}(\vec{r})$.
- c) Existe algum valor para a velocidade inicial v_0 tal que a trajetória da partícula seja uma reta? Em caso afirmativo, calcule-o.

Q2. Durante uma tempestade, uma nuvem cobre a cidade de São Paulo a uma altura $h = 500m$ em relação ao solo. Vamos supor que a largura da nuvem seja bem maior que essa altura h . Um balão meteorológico equipado com um sensor de campo elétrico é então lançado verticalmente a partir do solo. Os dados coletados pelo sensor estão ilustrados na figura abaixo, onde $E(z)$ é o módulo do campo elétrico em função da altitude ($z = 0$ no solo). A espessura da nuvem na direção vertical é igual a $1200m$ e sabe-se que a densidade de carga elétrica é sempre negativa no seu interior.



- a) Indique, em um diagrama, a direção e sentido do campo elétrico nas regiões abaixo, dentro e acima da nuvem.
- b) Calcule a densidade volumétrica de carga na atmosfera em função da altitude, $\rho(z)$, e esboce o seu gráfico.
- c) Para quais valores de z o potencial elétrico é máximo ou mínimo? Calcule o potencial elétrico nesses pontos? Tome $V = 0$ no solo.

2009-1

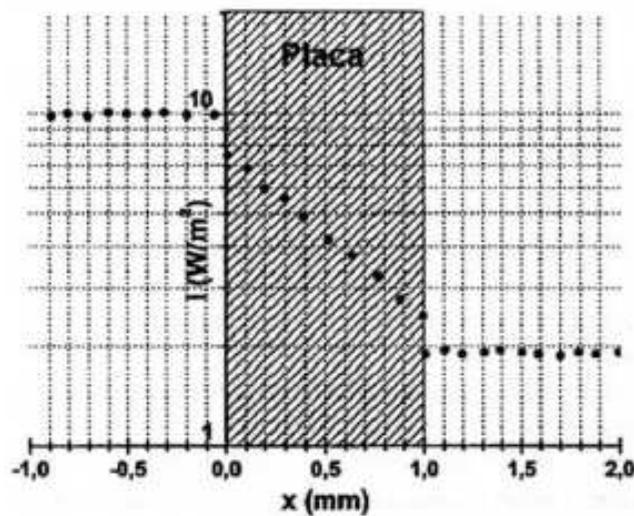
Q6. Uma onda eletromagnética monocromática polarizada linearmente, propagando-se ao longo da direção $+\hat{x}$, é representada na notação complexa pelo campo elétrico $\vec{E}(x, t) = \hat{y} E_0 e^{i(kx - \omega t)}$. Considere que essa onda propaga-se no ar ($n_{ar} \approx 1$) e possui comprimento de onda $\lambda_0 = 0,50 \mu m$ (luz verde) e intensidade $I_0 = 10 W/m^2$.

- a) Escreva uma equação análoga à equação acima para o campo magnético $\vec{B}(x, t)$ dessa onda, escrevendo sua amplitude B_0 em função de E_0 no sistema SI de unidades.
- b) Essa onda incide perpendicularmente a uma placa de $1,00 mm$ de espessura feita de um material que possui índice de refração $n = n_R + i n_I$, onde $n_I \ll n_R$ para ondas dessa frequências. Dada a expressão abaixo para

a refletividade R da interface entre o meio 1 (índice de refração n_1) e o meio 2 (índice de refração n_2), estime a partir do seguinte gráfico (intensidade I versus posição x) a parte real n_R do índice de refração do material.

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$$

- c) Estime, também a partir do gráfico, a parte imaginária n_I do índice de refração.
- d) Qual a frequência e o comprimento de onda da radiação dentro do material?



Q7. Um solenóide circular é projetado com $81\pi mm^2$ de área de seção transversal e $40\pi mm$ de comprimento. Desprezando os efeitos do comprimento finito do solenóide, responda:

- a) Quantas voltas de fio são necessárias para que o módulo do campo magnético próximo ao centro do solenóide seja de $2,0mT$ quando percorrido por uma corrente de $1,00A$?
- b) Se o solenóide é enrolado compactamente (sem espaçamento entre voltas consecutivas) com uma única camada de fio de cobre de resistividade $2,0 \times 10^{-8} \Omega m$, qual é a resistência elétrica do solenóide? Despreze a espessura do isolante que recobre o fio.
- c) Que diferença de potencial deve ser aplicada nos terminais do solenóide para produzir o campo magnético de $2,0mT$?
- d) Para esse valor do campo, qual a energia magnética armazenada no solenóide?
- e) Determine a indutância desse solenóide.

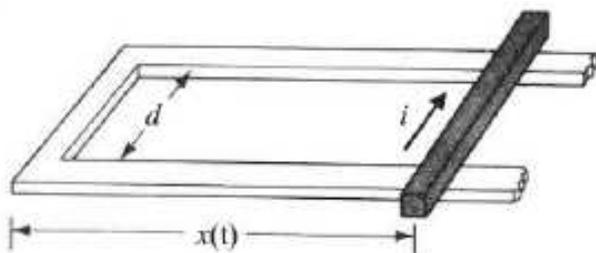
2008-2

Q6. Um cilindro muito longo de raio R é fabricado com um material isolante cuja constante dielétrica é $K \left(= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)$ e

que possui uma densidade de carga livre cilíndricamente simétrica, mas não uniforme $\rho(r)$.

- Determine $\rho(r)$ tal que o campo elétrico dentro do cilindro seja radial apontando para fora do mesmo e com módulo constante E_0 ;
- para a densidade de carga determinada em (a), calcule o campo elétrico $\vec{E}(r)$ fora do cilindro;
- se o cilindro for então envolvido por uma casca cilíndrica condutora neutra de raio interno a ($a > R$) e raio externo b ($b > a$), concêntrica ao mesmo, determine as densidades de carga induzidas nas superfícies da casca condutora;
- para a situação do item (c), esboce um gráfico do módulo do campo elétrico $E(r)$ em função da distância ao eixo do cilindro, em todo o espaço.

Q7. Uma barra metálica uniforme de massa M pode deslizar com atrito desprezível ao longo de um par de trilhos horizontais fixos separados por uma distância d , conforme mostra a figura abaixo. Os trilhos e a ligação transversal da esquerda são altamente condutores, de modo que suas contribuições para a resistência elétrica do circuito retangular são desprezíveis. A barra livre e os contatos com os trilhos fixos têm resistência elétrica total R . Há um campo magnético uniforme e estacionário aplicado externamente, de módulo B , orientado verticalmente e apontando para cima.



- Determine a corrente i induzida no circuito em termos de d , R , B e v , a velocidade instantânea da barra. Considere como o sentido positivo da corrente na barra aquele indicado na figura. Ao determinar a corrente induzida, despreze o campo magnético produzido pela própria corrente;
- suponha que em $t = 0$ a barra esteja numa posição x_0 e com velocidade v_0 . Determine $x(t)$ e $v(t)$;
- obtenha expressões numéricas para $x(t)$, $v(t)$ e $i(t)$ usando os seguintes parâmetros: $M = 0,10$ kg, $d = 1,0$ m, $R = 1,0$ Ω , $B = 0,2$ T, $x_0 = 3,0$ m e $v_0 = 10$ m/s. Qual a posição final da barra quando ela estiver em repouso
- É justificável desprezar no item (a) o campo magnético produzido pela corrente induzida? Para responder esse item, calcule a razão entre o maior valor do campo magnético produzido pela corrente induzida (B_i) e o valor do campo aplicado (B). Estime B_i calculando o campo magnético na superfície da barra livre, assumindo que ela é muito longa e tem seção transversal circular com raio $a = 3,0$ mm.

2008-1

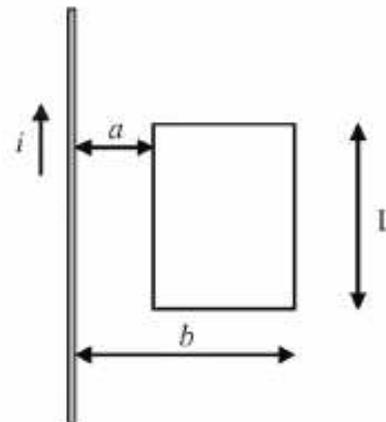
Q6. Uma placa metálica fina e carregada está imersa em uma solução aquosa de cloreto de sódio (sal de cozinha), cuja constante dielétrica é $K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 80$. Considere esta placa como infinita e situada no plano xy de um sistema de coordenadas. Determinou-se que o potencial elétrico na solução nas vizinhanças da placa é dado pela seguinte expressão:

$$V(x, y, z) = 10 \exp(-20|z|)$$

com z medido em metros e V em volts.

- Determine o vetor campo elétrico correspondente a esse potencial.
- Qual a magnitude e sinal da densidade superficial de carga livre $\sigma(x, y)$ da placa?
- Determine a densidade volumétrica de carga livre $\rho(x, y, z)$ na solução, nas proximidades da placa.

Q7. O fio retilíneo muito longo da figura abaixo conduz uma corrente i no sentido indicado, cuja magnitude está crescendo a uma taxa $\frac{di}{dt}$.



- Quando a corrente no fio é igual a i , calcule o fluxo magnético através da espira retangular.
- Obtenha uma expressão para a força eletromotriz induzida na espira.
- Se a resistência da espira é $0,051$ Ω , calcule o valor numérico da corrente induzida na espira e indique seu sentido para $a = 12$ cm, $b = 36$ cm, $L = 24$ cm e $\frac{di}{dt} = 9,6$ A/s.

FÍSICA MODERNA

2015-2

Q3. Considere 2 fótons que se propagam, ao longo do eixo x , em sentidos opostos. As energias dos fótons são 5 MeV e 2 MeV, respectivamente.

- a) Calcule a velocidade relativa entre os fótons.
- b) Qual é o valor da energia total do sistema?
- c) Qual é o momento total do sistema?
- d) Calcule a energia de repouso do sistema.

Q4. Um fóton de raio-X com comprimento de onda $\lambda = 10^{-10}$, é retroespalhado em um experimento Compton, ou seja, o ângulo de espalhamento é de 180° em relação ao eixo de incidência.

- a) Calcule a frequência do fóton retroespalhado.
- b) Quais são a direção e o sentido do momento do elétron ejetado no espalhamento, em relação à do fóton incidente?
- c) Qual é o módulo da velocidade do elétron ejetado no espalhamento?

2015-1

Q1. Considere um gás de moléculas diatômicas com frequência de oscilação ω e momento de inércia I . À temperatura ambiente, as energias dos estados moleculares vibracionais são muito maiores do que $k_B T$. Portanto, a maioria das moléculas se encontra no estado vibracional de menor energia. Por outro lado, a energia característica dos estados rotacionais é muito menor do que $k_B T$. A energia rotacional-vibracional $E(n, \ell)$ do estado de uma molécula diatômica é caracterizado pelo número quântico n , para a energia vibracional, e pelo número quântico ℓ , para energia rotacional.

- a) Escreva $E(n, \ell)$ para $n = 0$ e ℓ qualquer.
- b) Suponha que uma molécula sofra uma transição de um estado inicial com $n = 0$ e ℓ qualquer para um estado excitado com $n = 1$. Determine as duas energias totais permitidas para a molécula após a transição, lembrando que a regra de seleção impõe $\Delta\ell = \pm 1$. Calcule a diferença de energia entre esses dois estados permitidos e o estado inicial, bem como as respectivas frequências de transição.
- c) Considere o estado da molécula na qual $n = 0$ e ℓ qualquer. Sabendo que a degenerescência do estado é $2\ell + 1$, determine a população do estado rotacional-vibracional, $N(E)$, como função de E , a partir da distribuição de Boltzmann.
- d) Para $n = 0$, o estado $\ell = 0$ não é o estado mais populado à temperatura ambiente. Para pequenos valores de ℓ , a população do estado aumenta ligeiramente em relação a $\ell = 0$ por causa do aumento da densidade de estados. Para grandes valores de ℓ para o qual a população é máxima.

Q1. Suponha que um fóton encontre um elétron que está inicialmente em repouso no referencial S , como na figura 1A. Na maioria das vezes, o fóton é simplesmente desviado

da trajetória original, mas, ocasionalmente, o evento resulta no desaparecimento do fóton e na criação de um par elétron-pósitron, na presença do elétron original. Suponha que os detalhes da interação que produziu o par sejam tais que as três partículas resultantes se movam para a direita, como na figura 1B, com a mesma velocidade u , isto é, que estejam todas em repouso no referencial S' , que está se movendo para a direita com velocidade u em relação a S .

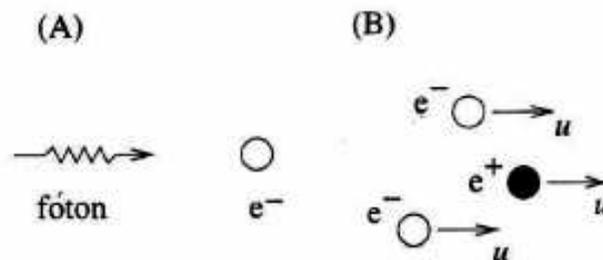


Figura 1. (A) Situação anterior à colisão, no referencial S . (B) Situação após a colisão, no referencial S .

- a) Escreva as leis de conservação de energia e momento antes e depois da criação do par.
- b) Usando a conservação da energia-momento no caso relativística, obtenha no sistema S' a energia do fóton para que seja criado um par de partículas com energia equivalente à energia de repouso de 2 elétrons.
- c) Utilize a relação $m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$ para obter a relação $\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$.
- d) Determine a partir do item (c) a velocidade u com a qual as três partículas se movem no referencial S .

2014-2

Q1. A lei de radiação de Planck permite obter a seguinte densidade de energia do espectro do corpo negro de uma cavidade à temperatura T :

$$\rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- a) Expresse a densidade de energia em função do comprimento de onda $\lambda = \frac{c}{\nu}$ no lugar da frequência ν .
- b) Mostre que para comprimentos de onda longos e altas temperatura, o resultado anterior se reduz à lei clássica de Rayleigh-Jeans.
- c) Obtenha a lei de Stefan-Boltzmann a partir da lei de radiação de Planck. Note que a radiância $R(\lambda)$, que é o fluxo de energia por unidade de área em uma pequena abertura da cavidade, é dada por $R(\lambda) = \frac{1}{4} c \rho(\lambda)$.

Q2. Considere uma colisão relativística frontal completamente inelástica de duas partículas que se movem ao longo do eixo- x . Ambas as partículas possuem massa m . Antes da colisão, um observador A , em um referencial inercial, nota

que elas se movem com velocidades constantes de mesma magnitude mas em direções opostas, isto é, a partícula 1 se move com velocidade v e a partícula 2 se move com velocidade $-v$. De acordo com o outro observador B , entretanto, a partícula 1 está em repouso antes da colisão.

- Determine a velocidade v'_x da partícula 2 medida pelo observador B antes da colisão.
- Ache as velocidades v_A e v'_B da partícula resultante após a colisão, medidas, respectivamente, pelos observadores A e B .
- Utilize a conservação relativística massa-energia para calcular a massa M da partícula resultante após a colisão.

2014-1

Q3. Em 1913, Niels Bohr introduziu seu modelo atômico através da adaptação do modelo de Rutherford às ideias de quantização propostas na época. Em homenagem a esse evento, aborde os itens abaixo em termos de grandezas fundamentais.

- Use a regra de quantização para o momento angular, $L = \hbar n$, para encontrar uma expressão para os raios das órbitas permitidas de um elétron ao redor de um átomo de número atômico Z .
- Segundo o modelo de Bohr, a transição entre diferentes órbitas é acompanhada pela emissão/absorção de um fóton. Determine a energia do fóton emitido como resultado da transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental de um átomo de hidrogênio.
- Considere um elétron preso em um poço unidimensional quadrado infinito de largura a . Determine uma expressão para os níveis de energia eletrônicos usando a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld $\oint p dx = hn$.
- Determine a largura a desse poço, em termos do raio de Bohr, para que a energia de um fóton emitido devido à transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental seja igual àquela obtida no item (b).

Q4. Os raios- γ produzidos por aniquilação de pares apresentam um espalhamento Compton considerável. Considere que um fóton com energia m_0c^2 seja produzido pela aniquilação de um elétron e um pósitron, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e c é a velocidade da luz. Suponha que esse fóton seja espalhado por um elétron livre e que o ângulo de espalhamento seja θ .

- Encontre a máxima energia cinética possível do elétron em recuo nesse espalhamento.
- Se o ângulo de espalhamento for $\theta = 120^\circ$, determine a energia do fóton e a energia cinética do elétron após o espalhamento.

- Se $\theta = 120^\circ$, qual é a direção de movimento do elétron após o espalhamento, em relação à direção do fóton incidente?

2013-2

Q3. Um feixe de luz com comprimento de onda 480 nm no vácuo e de intensidade 10 W/m^2 incide sobre um catodo de 1 cm^2 de área no interior de uma célula fotoelétrica. A função trabalho do metal é $2,2 \text{ eV}$. As respostas devem ser dadas com dois algarismos significativos.

- Calcule a energia dos fótons incidentes em Joules e em elétron-volts.
- Calcule o número de fótons por segundo incidentes na placa metálica.
- Se a eficiência da conversão fotoelétrica é de 20% (apenas 20% dos fótons arrancam elétrons do metal), calcule a corrente elétrica máxima, através da célula, quando uma ddp é aplicada entre o catodo e o anodo.
- Calcule o comprimento de onda máximo dos fótons incidentes acima do qual não ocorre o efeito fotoelétrico.

Q4. Uma partícula de massa m executa oscilações harmônicas, em uma dimensão, num potencial $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Considere a partícula num estado cuja função de onda é $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$, onde A e b são constantes.

- Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para este potencial.
- Determine o valor de b para que $\psi(x)$ seja solução desta equação de Schrödinger, e o valor da energia associada a esta função de onda.
- Calcule a constante de normalização A .
- Classicamente, esta partícula oscilaria dentro do intervalo simétrico $[-x_{\max}, x_{\max}]$, onde $x_{\max} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calcule, usando a Mecânica Quântica, a probabilidade de se encontrar esta partícula no intervalo $[-x_{\max}, x_{\max}]$. Compare este resultado com o esperado pela Mecânica Clássica.

2013-1

Q3. Uma partícula de massa m confinada em um poço de potencial unidimensional possui função de onda dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -\frac{L}{2} \\ A \cos \frac{3\pi x}{L} & \text{para } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{para } x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

- Calcule a constante de normalização A

- b) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo entre $-\frac{L}{4} < x < \frac{L}{4}$
- c) Através da solução da equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula no referido poço de potencial, ache a energia correspondente à função de onda, em termos de m, L e h .
- d) Calcule o comprimento de onda do fóton emitida na transição desta partícula para o estado fundamental, em termos de m, L e h

Q4. O decaimento de múons obedece à seguinte equação diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t)$$

onde $N(t)$ é o número de múons presentes no instante de tempo t e $\frac{dN(t)}{dt}$ representa a taxa de variação de múons no mesmo instante de tempo t . A constante de proporcionalidade R é chamada de constante de decaimento. O tempo de vida médio do múon é $\bar{t} = 2 \mu s$, isto é, neste intervalo de tempo $\frac{N(\bar{t})}{N(0)} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2,73}$. Sendo a velocidade dos múons na direção da superfície da terra igual a $0,998c$, responda:

- a) No sistema inercial de referência do múon, qual o valor de R para o decaimento de múons?
- b) Sem considerar correções relativísticas, estime quantos múons seriam detectados ao nível do mar, correspondentes a 10^8 múons detectados a $9 km$ de altitude.
- c) Considere agora a previsão relativística e repita a estimativa do item (b).

2012-2

Q3. Questão

- a) Utilize a relação de de Broglie para o comprimento de onda associado a uma partícula e obtenha a relação de quantização do momento angular de um elétron em movimento orbital atômico, no modelo de Bohr ($L = n\hbar$, com $n = 1, 2, 3 \dots$).
- b) Use a expressão acima para mostrar que as energias associadas aos estados eletrônicos permitidos em um átomo de hidrogênio são dadas por

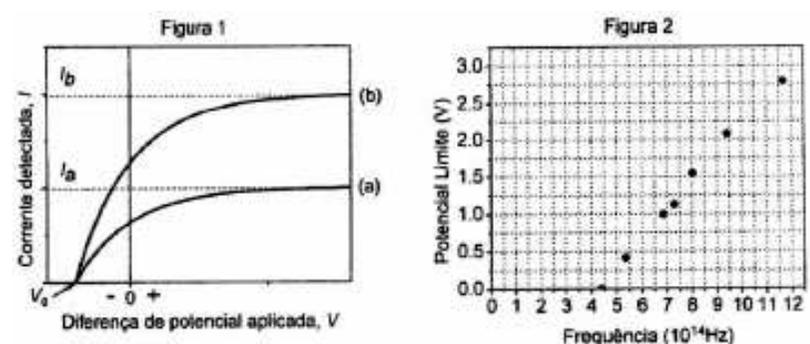
$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2},$$

onde e e m , são a carga e a massa do elétron, respectivamente.

- c) Calcule a energia de ionização do Lítio duplamente ionizado ($Z = 3$) sabendo que a energia de ionização do hidrogênio é $13,6 eV$.

- d) Em espectroscopia, a série de Balmer está associada a um subconjunto de transições nas quais o elétron do átomo de H vai de um estado excitado ao estado final caracterizado por $n_f = 2$. Nesta série, a linha denominada por H_β corresponde a transição a partir do estado com $n_i = 4$. Estime o comprimento de onda da linha H_β e situe a mesma em alguma região do espectro eletromagnético.

Q4. Em um experimento de efeito fotoelétrico, a Figura 1 abaixo mostra um possível gráfico da corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial V entre o coletor de elétrons e um alvo de sódio. As curvas (a) e (b) correspondem a diferentes intensidades da luz incidente e V_0 é o chamado “potencial de corte” ou “potencial limite”. Já a Figura 2 mostra medidas do potencial limite em função da frequência da luz incidente.



Utilizando esses gráficos:

- a) Estime o valor da constante de Planck em eVs, indicando o procedimento utilizado;
- b) estime o valor da “função trabalho” para o sódio;
- c) estime o valor da energia cinética do mas rápido fotoelétrico emitido quando o alvo de sódio é atingido por luz de frequência $10^{15} Hz$;
- d) cite uma característica do efeito fotoelétrico que pode ser explicada classicamente e outra que na se pode explicar utilizando a teoria ondulatória do eletromagnetismo.

2012-1

Q3. Parte I - Na tentativa de observar o efeito fotoelétrico, um cientista do final do século XIX realiza um experimento onde utiliza pulsos (1ms de duração) de luz monocromática, com comprimento de onda $414 nm$ e três diferentes potências, dadas respectivamente por $P_0, 3P_0$ e $5P_0$, onde $P_0 = 300 keV/s$. Ele escolhe para seu experimento três superfícies metálicas cujas funções trabalho são conhecidas: Li (2,3 eV), Be (3,9 eV) e Hg (4,5 eV).

- a) Determine para quais superfícies metálicas e potências poderá ocorrer emissão de fotoelétrons.
- b) Calcule o número máximo de fotoelétrons que poderia ser emitido pelo pulso de potência $3 P_0$ em cada superfície.

Parte II - Para preencher com elétrons as subcamadas de um átomo usa-se a seguinte regra: as subcamadas que têm o menor valor de $n + l$ são preenchidas antes; se duas subcamadas têm o mesmo valor de $n + l$, preenche-se antes a subcamada com menor valor de n .

- c) Use esta regra para escrever a configuração eletrônica do Sc, que é o átomo com número atômico mais baixo que apresenta um elétron em uma subcamada d .
- d) Quais são os valores possíveis do momento angular orbital e de sua componente z para um elétron na subcamada d do Sc?

Q4. Considere um elétron que se encontra confinado dentro de um poço de potencial unidimensional $V(x)$ dado por

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ 0 & , 0 < x < d \\ +\infty & , x > d \end{cases}$$

- a) Escreva a equação de Schrödinger para este elétron e as condições e contornos que devem ser satisfeitas pelas funções de onda.
- b) Obtenha as funções de onda normalizadas e determine os valores das energias permitidas para este elétron.

Admita agora que este elétron se encontre no estado quântico cuja função de onda dentro do poço é dada por

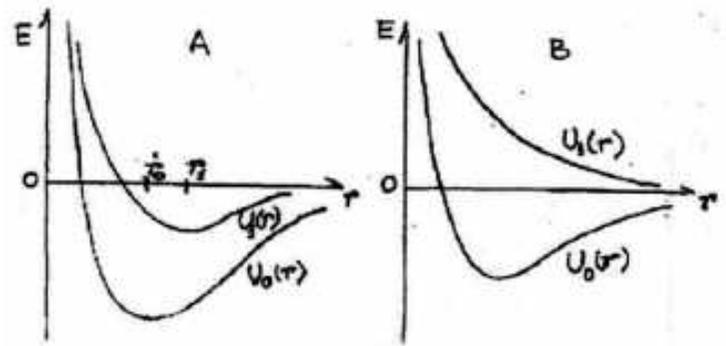
$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{3\pi x}{d}\right).$$

- c) Determine o número quântico n do estado ocupado por este elétron e seu comprimento de onda nesse estado.
- d) Determine a probabilidade de encontrar este elétron entre $x = 0$ e $x = \frac{d}{6}$.

2011-2

Q3. Parte I - A figura abaixo apresenta curvas de energia em função da distância r entre os núcleos para duas moléculas diatômicas denominadas A e B. Em cada um dos gráficos são apresentados dois estados de energia: o estado fundamental, $U_0(r)$, e o primeiro estado eletrônico excitado, $U_1(r)$.

- a) No caso da molécula A, o que significam r_0 e r_1 , indicados nos gráficos?
- b) Suponha que a molécula B esteja inicialmente no estado fundamental, mas absorva então um fóton e passe para o primeiro estado eletrônico excitado. O que você espera que aconteça com esta molécula depois disto?



Parte II - A função de onda de um elétron do átomo de hidrogênio no estado 1s é dada por

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0},$$

onde a_0 é o raio de Bohr e r é a distância do elétron ao núcleo.

- c) Calcule a distância r mais provável de se encontrar um elétron no estado 1s.
- d) Calcule $\langle r \rangle$, o valor médio de r neste estado.

Q4. Uma partícula de massa de repouso m_0 , movendo-se inicialmente a uma velocidade $v = \frac{4}{5}c$, medida no referencial do laboratório, efetua uma colisão com um corpo idêntico, inicialmente em repouso no mesmo referencial. Como resultado da colisão, as duas partículas combinam-se para formar uma única partícula de massa M . Considere a mecânica relativística.

- a) Quais são o momento linear e a energia total de cada partícula antes da colisão e da partícula composta após a colisão?
- b) Qual é a velocidade da partícula composta após a colisão?
- c) Qual é a massa M da partícula composta?

2011-1

Q3. Para os itens (a), (b) e (c), admita que no modelo de Bohr para uma partícula de massa m se movendo numa órbita circular de raio r e velocidade v , a força Coulombiana fosse substituída por uma força central atrativa de intensidade kr (sendo k uma constante). Admita que os postulados de Bohr sejam válidos para este sistema. Para esta situação:

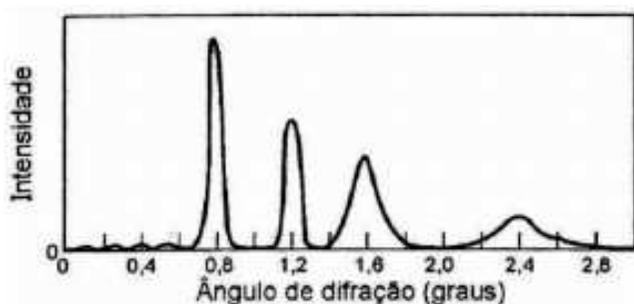
- a) Deduza a expressão para os raios r_n das órbitas de Bohr permitidas neste modelo em função do número quântico n e das constantes k , e m . Diga quais os valores possíveis de n neste caso.
- b) Lembrando que para o caso desta força central, a energia potencial correspondente é $V(r) = kr^2/2$, deduza a expressão para as energias E_n das órbitas permitidas em função do número quântico n e das constantes

k , \hbar e m . Determine a frequência irradiada quando a partícula faz uma transição de uma órbita para outra adjacente.

- c) Calcule o comprimento de onda de de Broglie associado à partícula em um estado de energia correspondente ao número quântico $n = 2$ em função de k , \hbar e m .

Para o item (d), considere um feixe de raios X, contendo radiação de dois comprimentos de onda distintos, difratados por um cristal cuja distância entre planos de difração é 1 nm (10^{-9} m). A figura abaixo apresenta o espectro de intensidade na região de pequenos ângulos (medidos em relação à direção do feixe incidente).

- d) Determine os comprimentos de onda dos raios X presentes no feixe. Utilize $\pi = 3$.



Q4. Numa experiência de efeito fotoelétrico, luz de comprimento de onda 414 nm e intensidade I_0 incide sobre uma superfície limpa de um metal cuja função trabalho é $\phi = 2,5 \text{ eV}$.

- a) Calcule a energia cinética máxima dos fotoelétrons.
b) Se a intensidade de luz incidente for duplicada, o que ocorre com a energia cinética dos fotoelétrons?

Considere agora a experiência de espalhamento Compton em que um elétron de massa m_0 em repouso espalha um fóton de comprimento de onda $\lambda = 2\lambda_c \equiv 2h/(m_0c)$. Após o espalhamento, o fóton perde metade de sua energia.

- c) Calcule o comprimento de onda do fóton espalhado (expresse seu resultado apenas em função de λ_c) e determine o seu ângulo de espalhamento.
d) Calcule a energia total e o momento linear do elétron após a colisão (expresse seu resultado em função de m_0 e c).

2010-2

Q3. Uma fonte produz um feixe de nêutrons com energia cinética média de $0,0133 \text{ eV}$ e incerteza relativa na velocidade, $\Delta v/v$, de 1×10^{-4} . Num determinado instante, a função de onda unidimensional de um nêutron é descrita por um pacote de ondas dado por

$$\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}\right) \exp(ik_0x).$$

Nesta expressão, A é uma constante, Δx é a incerteza padrão na posição, e k_0 é o momento linear médio.

- a) Estime o comprimento de onda de de Broglie do nêutron e identifique a região do espectro eletromagnético correspondente a esse comprimento de onda.
b) Estime a temperatura associada a essa fonte de nêutrons.
c) Determine a constante A , expressando-a em termos de Δx .
d) Com um pacote de ondas desse tipo, o produto das incertezas na posição e no momento é o mínimo permitido pelo princípio da incerteza. Estime Δx neste caso.

Q4. Átomos muônicos são formados por um núcleo de carga Ze , com o muon negativo orbitando ao redor do núcleo. O muon possui carga igual à do elétron, mas massa 207 vezes maior que a deste. Para um átomo muônico cujo núcleo é formado por apenas um próton ($m_p = 1836m_e$), estime:

- a) a massa reduzida do sistema, em termos da massa do elétron m_e .
b) o raio da primeira órbita de Bohr desse átomo muônico,
c) o comprimento de onda da primeira linha da série de Lyman, sabendo que

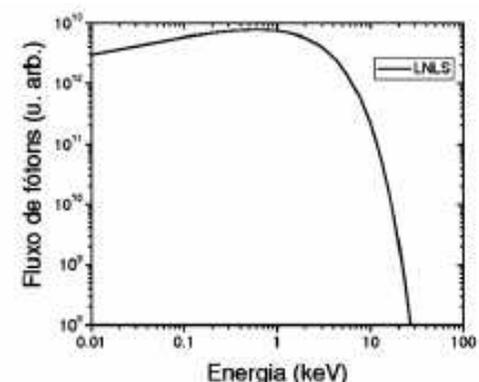
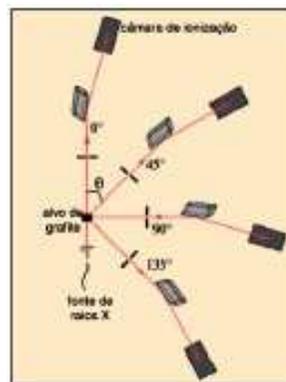
$$\frac{1}{\lambda} = R_\mu \cdot \left(1 - \frac{1}{n_i^2}\right),$$

onde R_μ é a constante de Rydberg para o átomo muônico.

- d) Qual é a região do espectro eletromagnético que permite estudar a emissão da série de Lyman desse átomo muônico?

2010-1

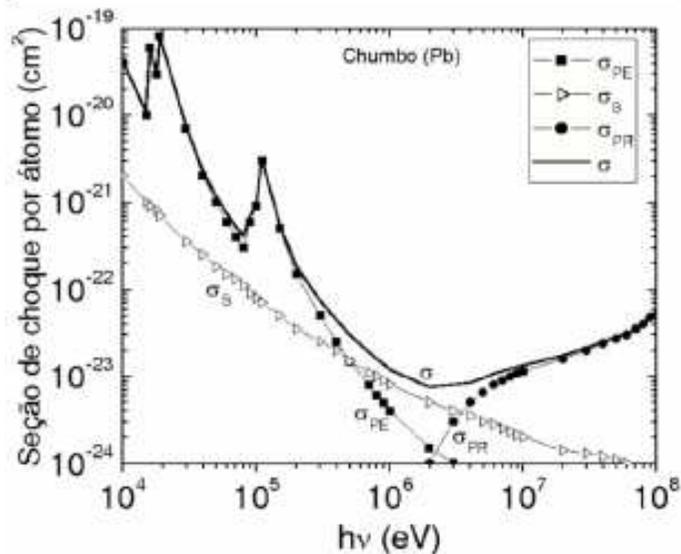
Q3. Um experimento de efeito Compton, como ilustrado na figura abaixo, foi planejado para ser executado no Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS), cujo espectro de emissão é mostrado abaixo à direita.



Foi escolhida a energia de 10 keV para realizar o experimento. Para essa energia:

- a) estime o fluxo de fótons do feixe escolhido, nas unidades do gráfico abaixo.
- b) determine o comprimento de onda desse feixe de fótons.

Fendas em um anteparo de chumbo (Pb) foram colocadas na frente do feixe de raios X espalhados pelo alvo de grafite, a fim de selecionar o ângulo θ . Abaixo são fornecidas as seções de choque do Pb como função da energia para os processos de espalhamento (σ_S), de efeito fotoelétrico (σ_{PE}) e de produção de pares (σ_{PR}), bem como o valor total (σ).



- c) Na energia escolhida para o experimento, qual processo de absorção do feixe pelo chumbo tem a maior contribuição na atenuação?
- d) Para que valores aproximados de energia os efeitos de espalhamento predominam sobre os outros processos de absorção no chumbo?
- e) Estime a espessura do anteparo de chumbo para que ele atenua a intensidade do feixe incidente de um fator igual a e^{-3} . Para esse cálculo considere que o chumbo possui uma densidade aproximada de 3×10^{22} átomos/cm³.
- f) Um monocristal de silício com distância interplanar de aproximadamente 0,31 nm é escolhido como espectrômetro do experimento. Determine o menor ângulo que o feixe espalhado pelo alvo de grafite deve fazer com a superfície do monocristal para que o feixe seja difratado em direção ao detector.

Q4. Utilizando o modelo de Bohr:

- a) Deduza a expressão para os níveis de energia do íon He^+ ($Z = 2, M_{\text{He}^+} \gg m_e$) e calcule os valores das energias até $n = 5$.
Com os resultados deste item, determine:
- b) a energia de ionização do He^+ ,
- c) o comprimento de onda de uma linha de emissão do He^+ na região do espectro visível,

- d) Dois íons de He^+ no estado fundamental e com mesma energia cinética colidem frontalmente. Cada qual emite um fóton de comprimento de onda 120 nm e fica com energia cinética final nula, no estado fundamental. Qual é a velocidade dos íons antes da colisão?

2009-2

Q3. (a) As seguintes afirmações referem-se ao efeito fotoelétrico. Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) e justifique brevemente a sua resposta (máximo de três linhas). Respostas sem justificativas ou com justificativas erradas não serão consideradas. Responda na folha de Respostas.

- I - Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de elétrons. Para que ocorra a emissão de elétrons no mesmo material basta que se aumente suficientemente a intensidade da luz incidente.
- II - Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de elétrons. Para que ocorra a emissão de elétrons no mesmo material basta que se aumente suficientemente a frequência da luz incidente.
- III - No contexto do efeito fotoelétrico, o potencial de corte é a tensão necessária para deter os elétrons que escapam do metal com a menor velocidade possível.
- IV - Quando luz azul incide sobre uma placa de zinco, ela não produz efeito fotoelétrico, mas quando iluminada com luz vermelha ocorre emissão de elétrons.
- V - Quanto maior for a frequência da luz incidente, maior será a energia cinética dos elétrons emitidos.

(b) Considere o efeito fotoelétrico inverso, ou seja, a emissão de fótons em consequência do bombardeio de um material com elétrons de alta velocidade. Calcule a frequência máxima que podem ter os fótons emitidos se a superfície é bombardeada com elétrons com velocidade $c/2$, onde c é a velocidade da luz.

Q4. A energia da radiação de corpo negro, por unidade de volume e por unidade de intervalo de frequência, é dada por:

$$u_\nu(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1},$$

onde ν representa a frequência do fóton e T a temperatura da radiação.

- a) Deduza a expressão para a energia total E de um gás de fótons em um volume V . Qual é a dependência de E com a temperatura?
- b) Esboce gráficos de $u_\nu(\nu)$ para duas temperaturas T_1 e T_2 , sendo $T_1 < T_2$.
- c) Escreva as formas assintóticas de $u_\nu(\nu)$ no caso de frequências muito altas (lei de radiação de Wien) e no caso de frequências muito baixas (lei de radiação de Rayleigh-Jeans).

- d) Imagine que o Universo seja uma cavidade esférica de paredes impenetráveis e raio 10^{28} cm, contendo um gás de fótons em equilíbrio térmico. Se a temperatura dentro da cavidade for de 3K, estime a quantidade de energia contida nessa cavidade.
- e) Supondo que o Universo se expanda adiabaticamente, calcule a temperatura que ele terá quando o seu volume for o dobro do valor atual (a entropia do gás de fótons é $S \propto VT^3$).

2009-1

Q3. Um fóton de raio-X com energia de 0,3 Mev colide com um elétron livre inicialmente em repouso. Considere que o fóton é espalhado a um ângulo de 180 graus.

- a) Calcule a mudança percentual no comprimento de onda do fóton.
- b) Utilizando a conservação da energia e do momento linear, encontre a energia cinética final do elétron.
- c) É possível que o fóton seja simplesmente absorvido pelo elétron livre inicialmente em repouso? Justifique.

Q4. Questão

I - Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F). Cada resposta correta soma um ponto, cada resposta incorreta desconta um ponto. Os itens não respondidos não somam nem descontam pontos. Caso o número total de pontos obtido seja negativo, será atribuído valor zero a esta questão.

- (a) O comprimento próprio de uma régua é invariante de Lorentz ()
- (b) Os raios X se propagam no vácuo mais rápido que as microondas. ()
- (c) A energia cinética de uma partícula é um invariante de Lorentz. ()
- (d) Dois eventos simultâneos em um referencial S devem ser simultâneos em qualquer referencial S' . ()
- (e) Numa colisão relativística entre duas partículas quaisquer a massa total do sistema é conservada. ()
- (f) A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais. ()
- (g) Segundo a relatividade especial, não existe efeito Doppler na direção transversal ao movimento. ()

II - Considere a equação de onda para $\phi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

Faça uma transformação de Lorentz desta equação e determine se ela é invariante sob tal transformação.

2008-2

Q5. Uma sonda interestelar afasta-se da Terra com velocidade $v = c/3$ e a cada um ano-luz (medido no referencial da sonda) ela emite um sinal luminoso de comprimento de onda λ_0 em direção à Terra. Deseja-se saber,

- a) com que periodicidade os sinais chegam à Terra?
- b) quanto tempo após o lançamento o primeiro sinal luminoso chega à Terra?
- c) onde estará a sonda quando esse sinal chegar à Terra?
- d) com que comprimento de onda os sinais são recebidos na Terra?

Q10. Quando Bohr desenvolveu sua teoria atômica procurou-se dar respaldo a mesma achando-se situações em que ela concordava com resultados experimentais. Consideraremos três dessas aqui, para um átomo monoelétrônico com massa nuclear M finita e número atômico Z . Para isso,

- a) deduza a expressão (em função das constantes e, m, h , etc) da energia E_n dos níveis quantizados, que sabemos reproduz as linhas principais do espectro de átomos monoelétrônicos;
- b) calcule a razão $\frac{E_n(\text{He}^+)}{E_n(\text{He})}$, entre as energias dos níveis eletrônicos do hélio uma vez ionizado (He^+ , $Z = 2$, $M = 4$ u.a.) para aquelas do hidrogênio (H , $Z = 1$, $M = 1$ u.a.) e
- c) mostre que para um número quântico n muito grande, a frequência da luz emitida na transição $n \rightarrow n-1$ coincide com a frequência clássica de revolução do elétron no n -ésimo estado. Isso mostra que a teoria obedece o princípio de correspondência.

2008-1

Q5. Um elétron de massa de repouso m , e carga elétrica $-e$, está em repouso na origem de um referencial S . Num dado momento liga-se um campo elétrico constante e uniforme de intensidade E . De acordo com a teoria especial da relatividade de Einstein:

- a) Qual a velocidade do elétron em função do tempo, no referencial S ?
- b) Qual o valor desta velocidade para tempos muito grandes?
- c) Qual será a distância do elétron à origem em função do tempo, medido no referencial S a partir do momento em que o campo é ligado?
- d) Se o campo elétrico permanecer ligado por um tempo T , qual será a energia total do elétron, no referencial S , após o campo elétrico ser desligado?

- e) Qual a velocidade do elétron, após o campo ser desligado, medida em um referencial S' que se move com velocidade v_0 na direção e sentido do campo elétrico?

Q10. Considere um corpo negro esférico de raio r colocado em órbita circular em torno do Sol, e com o raio da órbita sendo igual à distância Terra-Sol. Considere que a temperatura na superfície do Sol é de 5700C. Responda:

- Qual a potência total emitida pelo Sol?
- Qual a potência total emitida pelo corpo negro em equilíbrio com a radiação solar para $r = 1\text{m}$?
- Qual é a temperatura em que o corpo negro entra em equilíbrio com a radiação solar?
- Qual é a frequência da radiação emitida com maior intensidade pelo corpo negro?

Observação: supomos que a temperatura do corpo negro, ao entrar em equilíbrio com a radiação solar, é a mesma em todos os seus pontos. Ou seja, supomos que o seu raio r não é muito grande, e sua condutividade térmica não é muito pequena.

MECÂNICA QUÂNTICA

2015-2

Q8. Seja uma partícula livre de massa m confinada a uma circunferência de perímetro L .

- Escreva a equação de Schrödinger correspondente.
- Calcule a função de onda *normalizada* $\psi = \psi(t, x)$, onde x é a posição da partícula ($0 \leq x < L$), supondo que ela tenha valores bem definidos de momento e energia: p e E , respectivamente.
- Supondo que a partícula esteja em um auto-estado de energia, quais são os dois menores autovalores correspondentes (não nulos)?
- Seja uma partícula em um auto-estado de energia com o menor valor não nulo de energia. Escreva sua função de onda para que tenha uma densidade de probabilidade de ser encontrada entre x e $x + \delta x$ igual a $\frac{2}{L} \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)^2$.
(Lembrar que $(\cos x)^2 = \frac{\cos 2x + 1}{2}$).

Q9. Seja um sistema composto por um par **A** e **B** de spins $\frac{1}{2}$ descrito pelo estado

$$|\psi\rangle = \alpha \left(|z_+^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_-^{\mathbf{B}}\rangle - |z_-^{\mathbf{A}}\rangle \otimes |z_+^{\mathbf{B}}\rangle \right)$$

onde

$$\hat{S}_x |x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |x_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle x_{\pm}^{\mathbf{A}} | x_{\pm}^{\mathbf{A}} \rangle = 1, \quad (1)$$

$$\hat{S}_y |y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |y_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle y_{\pm}^{\mathbf{A}} | y_{\pm}^{\mathbf{A}} \rangle = 1, \quad (2)$$

$$\hat{S}_z |z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |z_{\pm}^{\mathbf{A}}\rangle, \quad \langle z_{\pm}^{\mathbf{A}} | z_{\pm}^{\mathbf{A}} \rangle = 1. \quad (3)$$

(e analogamente para **B**) e onde escrevemos os operadores de spin como

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

na base de auto-estados de \hat{S}_z :

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Responda:

- Qual é o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $|\psi\rangle$ esteja normalizado?
- Qual é a probabilidade de se medir na direção z : $-\hbar/2$ para o spin **A** e $+\hbar/2$ para o spin **B**?
- Qual é a probabilidade de se medir na direção x : $+\hbar/2$ para o spin **A** e $-\hbar/2$ para o spin **B**?
- Qual é a probabilidade de se medir na direção z : $-\hbar/2$ para o spin **A** e na direção x $+\hbar/2$ para o spin **B**?

2015-1

Q1. Seja o estado do spin de um elétron dado por

$$|\psi\rangle = \alpha \left(|z_+\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2} |z_-\rangle \right),$$

com $|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lembrando que os operadores de spin \hat{S}_x , \hat{S}_y , \hat{S}_z podem ser escritos em termos das matrizes de Pauli como $\hat{\mathbf{S}} = \hbar \frac{\vec{\sigma}}{2}$ (veja formulário), onde

$$\begin{aligned} \hat{S}_x |x_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |x_+\rangle, & \hat{S}_x |x_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |x_-\rangle, \\ \hat{S}_y |y_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |y_+\rangle, & \hat{S}_y |y_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |y_-\rangle, \\ \hat{S}_z |z_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |z_+\rangle, & \hat{S}_z |z_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |z_-\rangle. \end{aligned}$$

- Qual é o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $|\psi\rangle$ fique normalizado?
- Qual é a probabilidade de se medir $-\hbar/2$ para o spin na direção z ?
- Qual é a probabilidade de se medir $+\hbar/2$ para o spin na direção x ?

- d) Qual é o valor esperado do spin no plano $y = 0$ em uma direção de 45° entre os eixos x e z ?

Q2. Seja o operador \hat{A} associado a um certo observável físico A de um sistema, satisfazendo $[\hat{A}, \hat{H}] \neq 0$, onde \hat{H} é um operador hamiltoniano independente do tempo. Sejam agora os autovetores normalizados, ϕ_+ , ϕ_- , e autovalores correspondentes, a_+ , a_- ($a_+ \neq a_-$) de \hat{A} :

$$\hat{A}\phi_+ = a_+\phi_+, \quad \hat{A}\phi_- = a_-\phi_-,$$

com

$$\phi_+ = \frac{u_+ + u_-}{\sqrt{2}}, \quad \phi_- = \frac{u_+ - u_-}{\sqrt{2}},$$

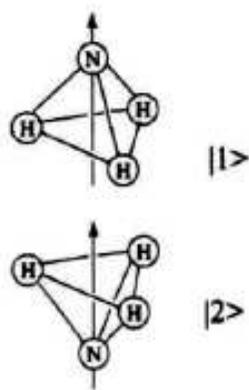
onde

$$\hat{H}u_+ = E_+u_+, \quad \hat{H}u_- = E_-u_-.$$

- Calcule o valor esperado de \hat{A} no estado ϕ_+ .
- Calcule a projeção de $\hat{H}u_+$ no estado u_- .
- Admitindo que o sistema esteja inicialmente em um estado arbitrário, $\psi(0)$ escreva quanto valerá o estado $\psi(t)$ em um instante posterior como função de \hat{H} .
- Calcule o valor esperado do observável A no instante $t = \frac{\hbar\pi}{3(E_+ - E_-)}$ admitindo que o sistema esteja inicialmente no estado $\psi(0) = \phi_+$ e $E_+ \neq E_-$.

2014-2

Q8. Considere dois estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ da molécula de amônia ilustrados abaixo.



Suponha que eles estão ortonormalizados, $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$ e que apenas esses dois estados sejam acessíveis ao sistema, de forma que podemos descrevê-lo usando a base formada por $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Nessa base, o hamiltoniano H do sistema é dado por

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -E_1 \\ -E_1 & E_0 \end{pmatrix}.$$

- Se inicialmente o sistema estiver no estado $|1\rangle$, ele permanecerá no estado $|1\rangle$ em um instante posterior? E se estiver no estado $|2\rangle$, ele permanecerá no estado $|2\rangle$?
- Ache os autovalores E_I e E_{II} e os respectivos autovetores $|I\rangle$ e $|II\rangle$ de H , expressando-os em termos de $|1\rangle$ e $|2\rangle$.
- Baseado no resultado acima, podemos prever pelo menos uma frequência de emissão de radiação eletromagnética possível para uma molécula de amônia. Qual é essa frequência?
- Ache a probabilidade de medirmos uma energia E_I no seguinte estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|2\rangle$.

Q9. Uma partícula quântica de massa m está sujeita a um potencial

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

- Obtenha os níveis de energia dessa partícula. Isto é, determine os autovalores de

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi.$$

- Considere o estado fundamental e os dois primeiros níveis excitados. Monte uma tabela mostrando para cada um desses três níveis, o valor da energia, a degenerescência e os respectivos estados em termos dos números quânticos.
- Utilizando $\nabla^2\psi = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \psi \right]$ e lembrando que $L^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$, escreva a equação diferencial do item (a) para a parte radial da função de onda (não é preciso resolvê-la). Identifique nessa equação o potencial efetivo $V_{\text{ef}}(r)$.
- Resolva a equação diferencial do item anterior para o caso em que $\ell = 0$ e determine o autovalor correspondente. Para isso, admita uma solução do tipo $e^{-\alpha r^2}$ e determine α .

2014-1

Q8. Considere o problema de uma partícula de massa m cujo o movimento ao longo do eixo- x está restrito ao intervalo $0 \leq x \leq a$, isto é, ela encontra-se em uma caixa com paredes colocadas nas posições $x = 0$ e $x = a$.

- Determine a função de onda e a energia do estado fundamental.
- Suponha que a partícula seja descrita pela seguinte função de onda: $\psi(x) = A \left[\sin \frac{\pi x}{a} - 3i \sin \frac{2\pi x}{a} \right]$, onde A é uma constante de normalização. Determine A e

calcule a probabilidade de obter o resultado $\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ para a medida da energia.

c) Suponha agora que a partícula esteja no estado fundamental. Qual é a distribuição de probabilidades do momento da partícula nesse estado?

d) Considerando novamente que a partícula esteja no estado fundamental, suponha que as paredes sejam removidas, de forma instantânea, deixando a partícula livre ($\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$). Qual é a energia dessa partícula livre?

Q9. Considere uma partícula de spin $1/2$, cujo momento magnético é $\vec{M} = \gamma\vec{S}$, onde γ é uma constante. Podemos descrever o estado quântico dessa partícula utilizando o espaço gerado pelos autovetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ do operador \hat{S}_z , que mede a projeção do spin na direção z ,

$$\hat{S}_z |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad \hat{S}_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle.$$

A partícula encontra-se sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{y}$, orientado ao longo do eixo y , de forma que o hamiltoniano é dado por $\hat{H} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\gamma B \hat{S}_y$. Inicialmente, no instante $t = 0$, ela está no estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$.

- Quais os possíveis valores da projeção do spin no eixo y ?
- Encontre os autovetores de \hat{S}_y .
- Obtenha $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ em termos de $|+\rangle$ e $|-\rangle$ definidos acima.
- Obtenha os valores médios dos observáveis S_x , S_y e S_z em função do tempo.

2013-2

Q8. Uma partícula de massa m está num potencial tal que a equação de Schrödinger (com $\hbar = 1$) no espaço dos momentos é

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - a\nabla_p^2\right)\bar{\psi}(\vec{p},t) = i\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}(\vec{p},t)$$

onde

$$\nabla_p^2 = \frac{\partial}{\partial p_x^2} + \frac{\partial}{\partial p_y^2} + \frac{\partial}{\partial p_z^2}.$$

- Escreva a equação de Schrödinger no espaço das coordenadas.
- Qual é o potencial $V(r)$, $r = |\vec{r}|$?
- Qual é a força, $\vec{F}(\vec{r})$, sobre a partícula?

Q9. Os operadores de spin de uma partícula de spin-1 (um tripleto) podem ser representados no espaço complexo C^3 pelas matrizes

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Mostre que as relações de comutação $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$, e permutações cíclicas em x, y, z , são satisfeitas.
- Se uma medida da componente z do spin é feita, quais são os possíveis resultados? Encontre os respectivos autovetores.
- Se o estado da partícula é dado pelo vetor

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix},$$

quais são as probabilidades de se obter cada um dos resultados possíveis das medidas do spin ao longo do eixo- z ?

- A partir do resultado do item (c), qual é a probabilidade de se encontrar a partícula em qualquer um desses estados?

2013-1

Q8. Considere um oscilador harmônico (em uma dimensão, x) de massa m e frequência ω . No instante $t = 0$, o estado do oscilador é $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$ onde os $|\phi_n\rangle$ são os estados estacionários, isto é $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, sendo H a hamiltoniana e $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ com $n = 0, 1, 2, \dots$

- Considerando que os estados $|\phi_n\rangle$ são normalizados, determine a condição que os coeficientes c_n devem satisfazer para que o estado $|\psi(0)\rangle$ seja também normalizado. Calcule t posterior, dê um resultado maior que $2\hbar\omega$.
- Se apenas c_0 e c_1 são diferentes de zero, dê a expressão para o valor esperado da energia, $\langle H \rangle$, em termos de c_0 e c_1 . Com a condição $\langle H \rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_0|^2$ e $|c_1|^2$.
- O vetor de estado $|\psi(0)\rangle$ está definido a menos de um fator de fase global, o que nos permite escolher c_0 real e positivo. Fazendo isso, escrevendo $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$ e mantendo a condição $\langle H \rangle = \hbar\omega$, determine θ_1 de modo que $\langle X \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Observação: Lembremos que o efeito do operador

posição X sobre os estados estacionários do oscilador harmônico é

$$X|\phi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle \right]$$

entendendo-se que o segundo termo acima é nulo para $n=0$.

- d) Com $|\psi(0)\rangle$ determinado conforme o item anterior, escreva $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ e calcule $\langle X \rangle(t)$.

Q9. Sejam \vec{L} , \vec{R} e \vec{P} os operadores do momento angular, da posição e do momento linear, respectivamente.

- a) Usando as relações de comutação

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k,$$

mostre que

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$$

- b) Com a definição $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ e usando $[R_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$, mostre que

$$[L_i, R_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} R_k$$

- c) Sabendo que os operadores \vec{R} e \vec{P} são hermitianos, isto é, $R_i^\dagger = R_i$ e $P_i^\dagger = P_i$, mostre que as componentes do operador do momento angular $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ também são operadores hermitianos.

Observação: Nas expressões acima, ϵ_{ijk} é o tensor completamente antissimétrico, isto é:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se houver índices iguais;} \\ +1 & \text{se } ijk \text{ for } 123, 231 \text{ ou } 312; \\ -1 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Se precisar, use a identidade

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

2012-2

Q8. Considere o problema unidimensional quântico de uma partícula de massa m sujeita ao potencial

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ +\infty & x > a \end{cases}$$

- a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para este problema.

- b) Resolva a equação, achando todas as soluções aceitáveis independentes. Isto é: determine todos os valores possíveis para a energia, E_n , e as funções de onda normalizadas correspondentes, $\psi_n(x)$.

Suponha agora que, na verdade, o potencial total tenha a forma $V_{\text{total}}(x) = V(x) + W(x)$, sendo $W(x)$ uma pequena correção dada por

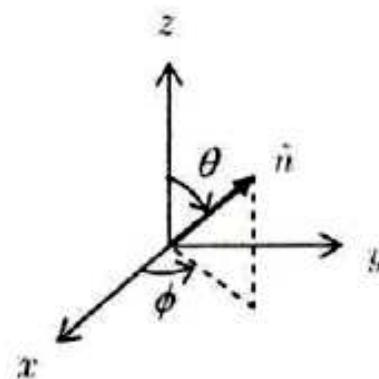
$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ W_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

- c) Usando a teoria de perturbações de primeira ordem, calcule a correção para a energia do estado fundamental obtida no item anterior.

Q9. Para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ o operador de spin é dado por $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, onde

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

são as matrizes de Pauli. Seja \hat{n} o vetor unitário na direção de ângulos (θ, ϕ) , conforme ilustra a figura abaixo.



- a) Calculando o produto escalar, mostre explicitamente que o operador que representa a componente do spin nessa direção, $S_n = \hat{n} \cdot \vec{S}$, é dado por

$$S_n = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi} \sin\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

- b) Mostre que os únicos valores que podem ser obtidos numa medida de S_n são $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, qualquer que seja a direção \hat{n} .
- c) Obtenha o vetor coluna normalizado que representa o estado fundamental no qual uma medida de S_n produz necessariamente o valor $+\hbar/2$. Simplifique a resposta final expressando a dependência em θ em termos de $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
- d) Suponha que $\theta = 60^\circ$ e $\phi = 45^\circ$. Se a partícula for preparada de tal forma que a componente z do spin S_z , tenha o valor bem definido $+\hbar/2$, qual é a probabilidade de obter-se esse mesmo valor numa medida de S_n ? Dê a resposta numérica.

2012-1

Q8. A equação de Schrödinger independente do tempo para o problema unidimensional de uma partícula de massa m sujeita a um potencial de oscilador harmônico é

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

onde ω é a frequência angular do operador. Um método para se resolver essa equação consiste em expressá-la em termos do operador

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{d}{dx} \right)$$

e de seu conjugado hermitiano.

- A função de onda do estado fundamental do oscilador satisfaz a equação diferencial $a\psi_0(x) = 0$. Resolva esta última equação e determine $\psi_0(x)$ a menos de uma constante multiplicativa.
- Calcule essa constante normalizando $\psi_0(x)$.
- Obtenha o valor da energia do estado fundamental desse oscilador.
- Suponha, agora, que o oscilador seja perturbado pelo potencial

$$V(x) = V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right),$$

onde V_0 e b são constantes reais. Usando teoria de perturbações de primeira ordem calcule o deslocamento de energia do estado fundamental.

Q9. Uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ tem momento de dipolo magnético $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$, onde γ é uma constante real e $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ é o operador de spin, sendo

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

as matrizes de Pauli. Se essa partícula está imersa num campo magnético uniforme \vec{B} , o hamiltoniano que governa a dinâmica do spin é $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. No que se segue, suponha que o campo magnético esteja na direção do eixo Oz .

- Dê a forma explícita do operador hamiltoniano como uma matriz 2×2 , em termos de γ , \hbar e \vec{B} .
- Escreva as expressões para os estados estacionários como vetores-coluna normalizados e indique suas respectivas energias.
- No instante inicial, $t = 0$, a partícula é preparada no estado de spin

$$\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{com } \alpha \text{ real}).$$

Qual será o estado de spin, $\chi(t)$, num instante t posterior?

- Nesse instante posterior é feita uma medida de S_x , a componente do spin segundo o eixo Ox . Qual a probabilidade $P_+(t)$ de se obter o valor $+\hbar/2$?

2011-2

Q8. Seja a função de onda de uma partícula em uma dimensão, dada por $\Psi(x, t)$. A densidade de probabilidade $\rho(x, t)$ é definida como $\rho(x, t) \equiv \Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$. O valor de $\rho(x, t)$ pode mudar no tempo devido ao fluxo de probabilidade saindo ou entrando na região, que se pode expressar como uma equação de continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x},$$

onde $j(x, t)$ é a densidade de corrente de probabilidade.

- Dada a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \Psi,$$

escreva a derivada temporal de $\rho(x, t)$ em termos de Ψ , Ψ^* e suas derivadas espaciais.

- Obtenha a forma explícita de $j(x, t)$.

- Ache a equação relacionando a derivada do valor esperado da posição $\frac{d\langle x \rangle}{dt}$, com o valor esperado do momento, $\langle p \rangle$. *Dica: use a integração por partes e assumo que as funções Ψ e suas derivadas, $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, vão ao infinito mais rápido do que $\frac{1}{x}$.*

Q9. Seja o hamiltoniano representativo de um sistema físico:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Os autoestados deste hamiltoniano são denominados $|n\rangle$, não são degenerados e satisfazem $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$, onde n é um número inteiro e $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$.

- Assuma que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger obedecem à relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são autoestados de \hat{N} , usando as relações de comutação. Determine os autovalores correspondentes a estes estados, n' e n'' , respectivamente.
- Dado que todos os estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre os estados $\hat{a}|n\rangle$ e os estados $|n'\rangle$ encontrados no item (a). *Dica: lembre que todos os estados são normalizados.* Assuma que o valor esperado do hamiltoniano em qualquer de seus autoestados seja positivo, $\langle H \rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$. O que se pode concluir sobre o número de estados $|n\rangle$: ele é finito ou infinito?

- c) Assuma agora que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger obedecem à relação de anticomutação $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$. Mostre que os estados $\hat{a}|n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ são autoestados de \hat{N} , usando as relações de anticomutação, e determine os autovalores n' e n'' correspondentes a estes estados. Dado que todos os estados $|n\rangle$ são não degenerados, determine a constante de proporcionalidade entre os estados $\hat{a}|n\rangle$ e esses estados $|n'\rangle$. *Dica: lembre que todos os estados são normalizados.*
- d) Assumindo que no item (c), que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger obedecem à relação de anticomutação, que o valor esperado do hamiltoniano em qualquer de seus autoestados seja positivo, $\langle H \rangle \geq 0$, e que $\hat{a}|0\rangle = 0$, isto implica que o número de estados $|n\rangle$ é finito. Quais são estes únicos estados $|n\rangle$ não nulos neste caso?

2011-1

Q8. Considere uma partícula de massa m na presença de um potencial harmônico $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, onde ω é a frequência angular do oscilador e x é a coordenada da partícula (1-dim).

- a) São dadas as funções de onda estacionárias correspondentes ao estado fundamental ψ_0 e ao primeiro estado excitado ψ_1 :

$$\psi_0(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right), \quad \psi_1(x) = B x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right),$$

onde A e B são constantes de normalização. Calcule A e B supondo que as funções de onda sejam reais.

- b) Seja E_0 a energia do estado fundamental. Sabemos que $E_1 = E_0 + \omega$ para o primeiro estado excitado, já que o quantum de energia do oscilador é ω . Usando a equação de Schrödinger, encontre a energia E_0 .
- c) Para os estados estacionários, o valor médio da posição $\langle x \rangle$ é sempre nulo. Construa uma função de onda não estacionária como combinação linear de ψ_0 e ψ_1 com coeficientes reais, tal que o valor médio $\langle x \rangle$ seja o maior possível. Em outras palavras, considere o estado normalizado

$$\psi(x) = \sqrt{1 - \beta^2} \psi_0(x) + \beta \psi_1(x),$$

com $0 \leq \beta^2 \leq 1$ e determine o coeficiente β que maximiza o valor de $\langle x \rangle$.

- d) Suponha que a função de onda construída no item anterior descreva o estado do oscilador harmônico no tempo $t = 0$. Escreva a função de onda do estado para um tempo $t > 0$ arbitrário, supondo que nenhuma medição foi feita sobre o sistema. Para esse estado, avalie o valor médio da posição $\langle x \rangle(t)$ em função do tempo.

Q9. Seja uma partícula com momento angular $\ell = 1$.

- a) Na representação onde as matrizes de \mathbf{L}^2 e \mathbf{L}_z são diagonais, obtenha a matriz da componente \mathbf{L}_x . Lembre que a matriz de \mathbf{L}_x deve representar um operador hermitiano. Sugerimos usar os operadores escada \mathbf{L}_\pm .
- b) Calcule os autovalores de \mathbf{L}_x .
- c) Encontre o autovetor de \mathbf{L}_x com o maior autovalor.
- d) Suponha agora que você encontrou o maior autovalor numa medição de \mathbf{L}_x . Calcule as probabilidades de medir respectivamente $+\hbar$, 0 e $-\hbar$ numa medição posterior de \mathbf{L}_z .

2010-2

Q8. Uma partícula de massa m encontra-se inicialmente em um poço de potencial unidimensional dado por

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq -\frac{L}{2} \\ 0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \infty, & x \geq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (6)$$

- a) Calcule as autofunções e as autoenergias do estado fundamental e do primeiro estado excitado.
- b) Considere agora que o potencial expande-se instantaneamente para

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq -L \\ 0, & -L < x < L \\ \infty, & x \geq L \end{cases} \quad (7)$$

Calcule a probabilidade da partícula realizar uma transição do estado fundamental do potencial (6) para o primeiro estado excitado do potencial (7).

- c) Calcule a probabilidade da partícula continuar no estado fundamental após a expansão.
- d) Considere que a partícula se encontre no estado fundamental após a expansão. Calcule a probabilidade da partícula ser encontrada fora da região $-L/2 < x < L/2$.

Q9. As matrizes de Pauli, σ_x , σ_y e σ_z , são extremamente importantes quando se considera uma partícula de spin $1/2$.

- a) Utilize explicitamente a representação matricial dos operadores de Pauli e encontre seus autovalores e autovetores, bem como o comutador $[\sigma_y, \sigma_x]$.
- b) Considere um estado arbitrário para uma partícula de spin $1/2$ dado por $|\psi\rangle = a|-\rangle + b|+\rangle$, com $|a|^2 + |b|^2 = 1$, sendo $\{|-\rangle, |+\rangle\}$ autovetores de σ_z . Mostre como este estado é transformado sob a ação de cada um dos operadores σ_x , σ_y e σ_z , independentemente.
- c) Mostre como o operador $\exp(i\alpha\sigma_x)$ atua sobre o estado $|\psi\rangle$.
- d) Quais imposições devem ser consideradas sobre α para que o operador do item (c) seja hermitiano? e para que seja unitário?

2010-1

Q8. Um elétron de massa m está confinado numa esfera de raio a , isto é, submetido ao potencial $V(r) = 0$ para $r < a$ e $V(r) = \infty$ para $r > a$.

- Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a função $u(r) = r R(r)$, sendo $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$ a função de onda completa desse elétron.
- Imponha a devida condição de contorno e encontre, para o estado fundamental, $\psi(r, \theta, \phi)$ e a respectiva energia.
- Escreva a energia do estado fundamental em termos do volume da esfera, massa do elétron e constantes fundamentais.
- Encontre a pressão exercida por esse elétron na superfície da esfera. Expresse em termos da massa m , raio a e constantes universais.

Q9. Duas partículas com spin $1/2$ se aproximam e interagem segundo o hamiltoniano

$$H = \frac{4a(t)}{\hbar} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2,$$

sendo $a(t) = a_0$, constante, para $0 < t < \tau$ e $a(t) = 0$ para $t < 0$ e $t > \tau$. Em $t = -\infty$ o estado do sistema é $|+, -\rangle$, sendo $|\pm\rangle$ autovetores do operador $S_{i,z}$ com autovalores $\pm\hbar/2$.

- Escreva a matriz H na base dos autovetores de $S_{1,z}$ e $S_{2,z}$.
- Determine os autovalores e autovetores de H .
- Qual é o estado $|\Psi(t)\rangle$ do sistema para $0 < t < \tau$?
- Qual é o estado $|\Psi(t)\rangle$ do sistema para $t > \tau$ qualquer?
- Qual a probabilidade de uma medida de $S_{1,z}$ fornecer o valor $\hbar/2$ para $t > \tau$?
- Após Δt segundos dessa medida, qual a probabilidade de uma medida de $S_{2,z}$ dar o valor $-\hbar/2$?

2009-2

Q8. Responda as questões abaixo o mais detalhadamente possível. Não deixe nada indicado. Conclua.

Considere um operador hermitiano H e mostre que:

- os autovalores de H são necessariamente reais;
- os autovetores de H correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais.

Um operador A , que corresponde ao observável a , tem dois autoestados normalizados, $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$, com autovalores a_1 e a_2 , respectivamente, e $a_1 \neq a_2$. Um outro operador B ,

que corresponde ao observável b , tem dois autoestados normalizados, $|\chi_1\rangle$ e $|\chi_2\rangle$, com autovalores b_1 e b_2 , respectivamente, e $b_1 \neq b_2$. Os dois conjuntos de autoestados (ou bases) estão relacionados por:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|\chi_1\rangle + 3|\chi_2\rangle) \quad \text{e} \quad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (3|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle).$$

- Encontre a relação inversa entre as bases, ou seja, os $|\chi\rangle$ s em termos dos $|\varphi\rangle$ s.

Sobre esse sistema, podem ser feitas medidas em sequência. Calcule as probabilidades pedidas nos casos abaixo:

- a é medido e é encontrado o autovalor a_1 . Imediatamente após, b é medido e é encontrado o autovalor b_1 . Em seguida, a é medido novamente. Qual é a probabilidade de se obter novamente o autovalor a_1 nessa última medida?
- a é medido e é encontrado o autovalor a_1 . Após essa medida de a , mede-se b e novamente a , nessa ordem. Qual é a probabilidade de se obter nessa sequência de medidas os autovalores b_1 (na medida de b) e a_1 (na medida de a)?

Q9. Sendo a energia potencial de um sistema quântico unidimensional dada por um *poço quadrado infinito*,

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & \text{em outro caso,} \end{cases} \quad (8)$$

- encontre os autovalores da energia e suas respectivas autofunções, indicando as condições de contorno que estas devem obedecer. OBS.: Não é necessário normalizar as autofunções; suponha que a constante de normalização de cada estado (n) é conhecida e vale N_n .

A esse sistema é acrescentada uma perturbação da forma:

$$\Delta V(x) = a\delta\left(x - \frac{L}{2}\right),$$

onde $\delta(x - x_0)$ é a *função delta de Dirac* e a uma constante real.

- Todos os níveis de energia são afetados por essa perturbação? Se a resposta for negativa, o que caracteriza os níveis que são e os que não são afetados? Como diferenciá-los? Explique.
- Calcule a correção aos níveis de energia em primeira ordem em teoria de perturbação.

2009-1

Q8. Um sistema quântico unidimensional é descrito pela seguinte função de onda independente do tempo (não norma-

lizada):

$$\begin{aligned}\psi(x) = & 1 \times [\theta(x-1) - \theta(x-2)] \\ & + 2 \times [\theta(x-2) - \theta(x-3)] \\ & + 3 \times [\theta(x-3) - \theta(x-4)] \\ & + 4 \times [\theta(x-4) - \theta(x-5)] \\ & + 2 \times [\theta(x-5) - \theta(x-6)] \\ & + \sqrt{2} \times [\theta(x-6) - \theta(x-7)],\end{aligned}$$

onde $\theta(x-x_0)$ é a função degrau de Heaviside e x a coordenada espacial expressa em unidades de comprimento em um sistema de unidades apropriado.

- Faça um gráfico detalhado de $\psi(x)$.
- Se essa função representa uma partícula em algum tipo de potencial, em qual dos intervalos unitários ($\Delta x = 1$) do seu gráfico teríamos maior probabilidade de encontrar a partícula?
- Quanto vale, no caso do item anterior, essa probabilidade?
- Quanto vale o *valor esperado* da posição x no estado $\psi(x)$?

Q9. A energia de um sistema quântico bidimensional é dada por um *poço quadrado infinito*:

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq x \leq L, \text{ e } 0 \leq y \leq L \\ \infty, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

- Para o potencial acima, encontre os autovalores da energia e suas respectivas autofunções, indicando as condições de contorno que estas devem obedecer. OBS: Não é necessário normalizar as autofunções.
- Escreva os 3 (três) níveis mais baixos de energia explicitando os respectivos números quânticos e a degenerescência de cada nível se houver.
- Como se modificam os níveis de energia se a largura do poço L for reduzida à metade?
- O resultado do item anterior está de acordo com o princípio da incerteza? Argumente.
- Qual é a energia total do estado fundamental do sistema quando os seus níveis de energia (item (a)) são ocupados por 6 (seis) férmions idênticos, não interagentes, de massa m ?

2008-2

Q3. Considere um oscilador harmônico unidimensional, cujo operador Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

No instante de tempo $t = 0$, o sistema se encontra no seguinte estado

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_0(x) + e^{i\varphi} \psi_1(x)],$$

com $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sendo respectivamente o estado fundamental e o primeiro estado excitado do Hamiltoniano,

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \\ \psi_1(x) &= \left(\frac{4m^3\omega^3}{\pi\hbar^3}\right)^{1/4} x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},\end{aligned}$$

onde φ é uma fase.

- Determine φ para que o valor médio da posição seja zero para o estado $\Psi(x, 0)$.
- Determine o valor mais provável da posição no estado $\Psi(x, 0)$, empregando o valor de φ determinado acima.
- Determine o valor médio do momento num instante de tempo qualquer t , empregando o valor de φ determinado acima.

Q4. O Hamiltoniano

$$H = \frac{\omega}{\hbar} (L_x^2 - L_y^2)$$

oferece uma boa aproximação para descrever os estados quânticos de um sistema com momento angular $l = 1$ colocado num gradiente de campo elétrico. Na expressão do Hamiltoniano, L_x e L_y são as componentes x e y do operador momento angular orbital \vec{L} , e ω é uma constante real. Os autoestados $|-1\rangle$, $|0\rangle$ e $|+1\rangle$ de L_z com autovalores $-\hbar$, 0 e $+\hbar$ formam uma base do espaço de estados desse sistema.

- Escreva a matriz que representa H na base de L_z citada acima.
- Encontre os autovalores de H e os correspondentes autovetores na base de L_z citada acima.
- Suponha que no instante $t = 0$ o sistema se encontre no estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+1\rangle - |-1\rangle).$$

Qual é a probabilidade de se encontrar o valor \hbar numa medida de L_z num instante de tempo posterior t ?

2008-1

Q3. O movimento de uma partícula de massa m está limitado a uma região unidimensional do espaço por um campo de forças tal que sua energia potencial é dada por

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < L \\ \infty & \text{para } x \geq L, \text{ e } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Obtenha as energias e as correspondentes autofunções do problema.
- b) Considere agora um sistema de duas partículas idênticas não interagentes de massa m e spin $1/2$ sujeitas a esse potencial. Obtenha a energia mais baixa do sistema com a configuração de spin total $S = 1$ e projeção $M = 0$.
- c) Obtenha a energia mais baixa no caso em que o spin total é $S = 0$.

Q4. Considere um oscilador harmônico unidimensional, cujo operador Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

No instante $t = 0$, o sistema se encontra no estado fundamental, i.e., sua energia é dada por

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega,$$

e a correspondente função de onda é dada por

$$\Psi_0(x, t = 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2},$$

onde $\omega^2 = k/m$.

- a) Calcule para este estado os valores médios de p e p^2 .
- b) Suponha que em $t = 0$ o valor da constante k mude instantaneamente para $k/4$. Calcule a probabilidade de se encontrar este novo oscilador em seu estado fundamental no instante $t = T$.
- c) Suponha que no processo de medida da energia no tempo $t = T$ este novo oscilador tenha sido encontrado em seu estado fundamental. Qual é a probabilidade de se encontrar este oscilador no seu primeiro estado excitado no instante de tempo posterior $t = 2T$?

TERMODINÂMICA

2015-2

Q5. Um recipiente cilíndrico de seção reta circular A e base fixa foi posicionada verticalmente sobre uma superfície plana e preenchido com um gás ideal. Sobre sua extremidade superior, aberta, foi perfeitamente ajustado um êmbolo circular móvel de massa M . Suponha que o êmbolo permaneça orientado horizontalmente e só deslize para cima e para baixo, sem atrito, em contato com a parede interna do cilindro. Considere dada a razão γ entre os calores específicos do gás a pressão constante e a volume constante.

- a) Calcule a pressão de equilíbrio para o gás no recipiente, sendo p_0 a pressão atmosférica.

- b) Escreva a expressão para a variação da pressão p em termos da variação do volume V decorrente de um pequeno deslocamento do êmbolo. Suponha que, para pequenos deslocamentos do êmbolo, os estados do gás sejam descritos por um processo quase-estático adiabático.
- c) Determine a força adicional exercida sobre o êmbolo quando o mesmo tiver um deslocamento dx em relação à posição de equilíbrio.
- d) Obtenha a frequência angular para pequenas oscilações do êmbolo da posição de equilíbrio, em termos de V, A, M, p_0 e γ .

2015-1

Q1. Um gás contido num recipiente, inicialmente com volume V_A e pressão p_A (estado A), sofre expansão isobárica até atingir o volume V_B (estado B). O gás sofre então uma expansão adiabática, até que sua pressão seja p_C (estado C), de forma que uma contração isobárica (até o estado D) seguida de uma compressão adiabática levem o gás novamente à situação inicial (estado A). Considere dada a razão γ entre os calores específicos do gás a pressão constante e a volume constante.

- a) Represente as transformações descritas acima em um diagrama $p - V$, indicando os estados A, B, C e D .
- b) Calcule o calor trocado em cada trecho do ciclo, em termos de p_A, V_A, V_B, p_C e γ .
- c) Determine a eficiência do ciclo, isto é, a razão entre o trabalho realizado pelo gás e o calor absorvido por ele.

2014-2

Q1. A pressão p de um gás se comporta, como função da temperatura T e do volume molar v , de acordo com a seguinte equação de estado

$$p = \frac{RT}{v} - \frac{a}{v^2},$$

onde a é uma constante positiva e R é a constante universal dos gases.

- a) Utilize a identidade

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p$$

para determinar a energia molar u como função de v .

- b) Admitindo que $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$ seja constante e igual a c , ache u como função de T e v .
- c) Numa expansão livre do gás, a temperatura cresce ou decresce? Leve em conta que numa expansão livre u permanece invariante e v cresce.
- d) Demonstre a identidade do item (a).

2014-1

Q5. Um mol de um gás ideal simples está contido em um recipiente de volume inicial v_0 e pressão p_0 . O gás ideal é descrito pelas equações $pv = RT$ e $u = cRT$, onde p é a pressão, v é o volume molar, T a temperatura absoluta, u é a energia molar; R e c são constantes. O gás se expande a partir desse estado inicial até o estado correspondente a um volume final $2v_0$ através de um dado processo. Determine o trabalho W realizado pelo gás e o calor Q recebido pelo gás para cada um dos processos listados abaixo. As respostas finais devem ser dadas apenas em termos de (v_0, p_0) e de c .

- Expansão livre. Determine também a variação de temperatura ΔT .
- Expansão quase-estática isentrópica. Obtenha também a pressão final p_f , utilizando o fato de que, nesse processo para um gás ideal, $pv^\gamma = \text{constante}$, onde $\gamma = \frac{1}{c}(c+1)$.
- Expansão quase-estática isobárica.
- Expansão quase-estática isotérmica.

2013-2

Q5. Um cilindro de paredes externas impermeáveis, rígidas e adiabáticas, fechado em ambas as extremidades, é munido de uma parede de separação interna impermeável, móvel, adiabática e ideal (sem fricção), que o divide em dois compartimentos (A e B). Cada um deles é preenchido com um mol de um gás ideal monoatômico. Inicialmente a pressão, o volume e a temperatura (P_0, V_0, T_0) são idênticos em ambos os lados da parede interna. Uma certa quantidade de calor é introduzida de forma quase-estática no compartimento A até que sua pressão atinja o valor $P_A = 32P_0$.

- A partir das equações de estado do gás ideal monoatômico $U = \frac{3}{2}NRT = \frac{3}{2}PV$ e de sua entropia $S/N = \frac{3}{2}R \ln T + R \ln V + \text{constante}$, demonstre que, ao longo de um processo isentrópico em um sistema fechado, $P^3V^5 = \text{constante}$.
- Obtenha os volumes finais V_A e V_B dos dois compartimentos em termos do volume inicial V_0 .
- Obtenha as temperaturas finais T_A e T_B dos dois compartimentos em termos da temperatura inicial T_0 , verificando que $T_A = 15T_B$.
- Obtenha as variações de entropia do gás nos dois compartimentos, ΔS_A e ΔS_B . Qual é o sinal da variação da entropia total do sistema?

2013-1

Q10. A radiação em uma cavidade ressonante pode ser vista como um gás de fótons cuja pressão sobre as paredes de uma cavidade de volume V é dada por

$$P = \frac{aT^4}{3},$$

onde a é uma constante. A energia interna desse gás é dada pela equação $U = aT^4V$. Considere que inicialmente a temperatura da cavidade seja T_0 e seu volume V_0 .

- Determine o trabalho realizado em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.
- Determine o calor fornecido em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.
- Usando a relação

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV,$$

determine a equação que descreve um processo adiabático em termos das variáveis V e T .

- Determine o trabalho realizado em um processo adiabático no qual o volume da cavidade é duplicado. Expresse o resultado em termos de T_0, V_0 e da constante a apenas.

2012-2

Q5. Dois corpos idênticos de capacidade térmica constante C_p (finita) estão nas temperaturas T_1 e T_2 , respectivamente, sendo $T_2 > T_1$. Considere que nos processos descritos abaixo os corpos permanecem a pressão constante e não sofrem mudança de fase.

- Se os corpos forem colocados em contato, mas isolados termicamente do resto do universo, determine a temperatura de equilíbrio.
- Determine a variação de entropia do sistema no processo descrito no item (a).

Considere agora que os corpos funcionem como fontes quente e fria para uma pequena máquina térmica, a qual irá funcionar até que os dois corpos atinjam o equilíbrio térmico.

- Supondo que esse processo seja reversível, determine a temperatura final de equilíbrio neste caso.
- Calcule a quantidade de trabalho produzida pela máquina térmica no processo descrito no item (c).

2012-1

Q10. Considere um mol ($n = 1$) de um gás ideal monoatômico, inicialmente no estado de equilíbrio térmico especificado pela pressão P_0 e volume V_0 . Esse gás sofre uma compressão adiabática reversível que o leva a ocupar um volume $V_0/2$. Determine:

- A variação de energia interna desse gás devido a essa compressão;
- a variação de entropia do gás nessa compressão.

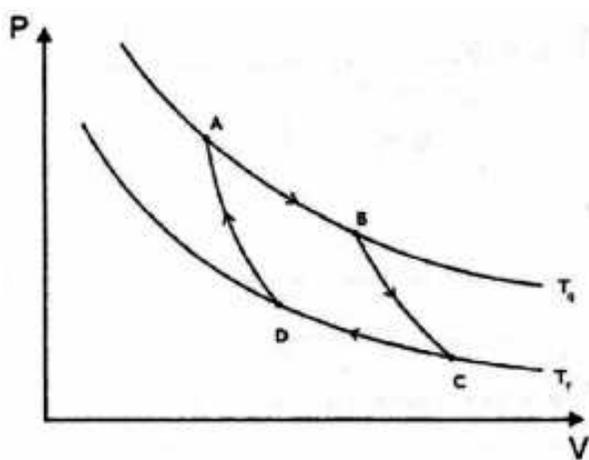
Após a compressão adiabática, o gás, sempre isolado do resto do universo por paredes adiabáticas, sofre uma expansão completamente livre até o volume original V_0 . Determine:

- a variação de temperatura do gás devido à expansão livre;
- a variação de entropia do gás nessa expansão livre.

2011-2

Q5. Considere n moles de um gás ideal monoatômico.

- Usando a primeira lei da termodinâmica, expresse a entropia do gás em função de T , V e n .
- Um ciclo de Carnot corresponde a: 1) uma expansão isotérmica reversível à temperatura T_q ; 2) uma expansão adiabática reversível até a temperatura T_f ; 3) uma compressão isotérmica reversível à temperatura T_f ; 4) uma compressão adiabática reversível (use a notação da figura). Calcule o trabalho realizado e o calor trocado em cada um dos 4 processos do ciclo de Carnot para n moles de um gás ideal.
- Calcule a eficiência do ciclo.



2011-1

Q10. Um mol de um gás ideal monoatômico se encontra na temperatura T e ocupa um volume V . A energia interna por mol de um gás ideal é dada por $u = c_V T$, onde c_V é o calor específico molar, que é considerado constante. Responda as questões abaixo:

- Considere a situação em que o gás se encontra em contato com um reservatório térmico na temperatura T e sofre uma expansão quase-estática reversível na qual o seu volume passa de V para $2V$. Calcule o trabalho realizado pelo gás durante a sua expansão.
- Ainda com relação ao processo físico descrito no item (a), determine o calor trocado pelo gás com o reservatório térmico.
- Determine as variações de entropia do gás e do reservatório térmico no processo descrito no item (a).
- Considere agora a situação em que o gás está isolado e sofre uma expansão livre na qual o seu volume passa de V para $2V$. Determine as variações de entropia do gás e do universo durante o processo de expansão livre.

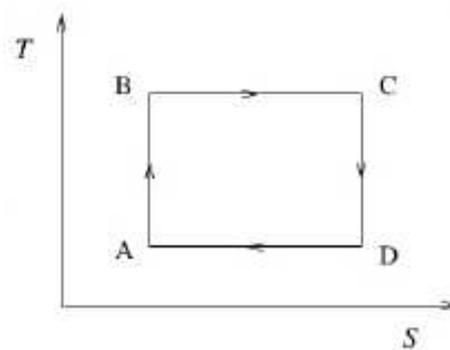
2010-2

Q10. Um corpo de capacidade térmica a pressão constante, C_P (independente da temperatura), que se encontra inicialmente na temperatura T_1 , é colocado em contato térmico com um reservatório térmico na temperatura T_2 , sendo $x \equiv \frac{T_1}{T_2} < 1$. Após o equilíbrio térmico ter sido atingido, determine:

- A variação da entropia do corpo.
- A variação da entropia do reservatório.
- A variação da entropia do Universo.
- Verifique se o resultado obtido no item (c) está de acordo com a 2ª lei da termodinâmica.

2010-1

Q10. Um mol de uma determinada substância percorre o ciclo formado pelos trechos $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ e $D \rightarrow A$ conforme mostrado no diagrama temperatura T versus entropia S da figura.



São dados T_A , S_A e as razões $\alpha = T_B/T_A$ e $r = S_C/S_A$. Determine em função dos dados do problema:

- o calor trocado em cada um dos trechos e o trabalho total realizado no ciclo;

- b) o rendimento η de um motor que opera de acordo com esse ciclo;
- c) o trabalho em cada um dos trechos do ciclo, considerando que a substância seja um gás ideal de capacidade térmica a volume constante C_V . Sugestão: utilize os resultados do item (a).
- d) Esboce o ciclo no diagrama $P - V$ para a substância considerada no item anterior orientando e identificando o tipo de processo termodinâmico associado a cada um dos trechos.

2009-2

Q10. Um mol de um gás ideal percorre um ciclo formado por uma expansão adiabática ($1 \rightarrow 2$), uma transformação isobárica ($2 \rightarrow 3$) e uma transformação isocórica ($3 \rightarrow 1$). Considere dados V_1 , V_2 , P_3 , C_V , γ e R . Em uma transformação adiabática não há troca de calor; em uma transformação isobárica a pressão P é mantida constante e em uma transformação isocórica o volume V é mantido constante.

- a) Esboce o ciclo no diagrama $P - V$.
- b) Determine o calor trocado e o trabalho realizado em cada trecho do ciclo.
- c) Ache o rendimento η de um motor que opera segundo esse ciclo em termos de V_1 e V_2 .
- d) Encontre a variação de entropia em cada trecho do ciclo.

2009-1

Q5. Considere uma fita de borracha que apresenta um comprimento L , que depende da temperatura T e da força aplicada F . Um modelo possível para a fita é constituído de N segmentos de comprimento l_0 , que podem dobrar-se na direção da fita nos dois sentidos. Para este modelo da fita de borracha, a função entropia é dada por

$$S(N, L) = -Nk_B \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L}{L_0}\right) \ln \left(\frac{1 + L/L_0}{2}\right) + \\ - Nk_B \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L}{L_0}\right) \ln \left(\frac{1 - L/L_0}{2}\right)$$

onde $L_0 = Nl_0$ é o comprimento máximo da fita.

- a) A equação correspondente à primeira lei da Termodinâmica para a fita pode ser escrita como $dU = TdS + FdL$. Justifique essa afirmação comparando-a com a equação habitual para um gás, $dU = TdS - pdV$.
- b) Obtenha uma expressão para a força aplicada $F(T, L)$, a partir da função entropia.

- c) Verifique que o comprimento da fita é dado por $L = L_0 \tanh\left(\frac{L_0 F}{NkT}\right)$. Esboce um gráfico do comprimento em função da temperatura, $L(T)$, para a força aplicada F constante.
- d) A entropia $S(N, L)$ cresce ou diminui com o aumento do comprimento da fita? Analise qualitativamente o comportamento da entropia como função da temperatura.

2008-2

Q8. Considere o seguinte ciclo ABC, para um mol de gás ideal monoatômico: expansão isotérmica, de pressão inicial p_0 para pressão $p_0/3$, contração isobárica e aquecimento isovolumétrico. No estado inicial, o volume é V_0 .

- a) Obtenha expressões para a pressão, volume e temperatura, para cada um dos três estados, A, B e C, em função de p_0 e V_0 . Obtenha expressões para o trabalho realizado pelo gás e calor recebido pelo mesmo, nos três processos.
- b) Obtenha expressões para o calor específico a volume constante, c_V , e para o calor específico a pressão constante, c_P . Explique a origem física da diferença entre as duas grandezas.
- c) Obtenha uma expressão para a entropia do gás, S , como função da temperatura e do volume do mesmo. Justifique.
- d) Esboce um diagrama temperatura X entropia para o ciclo acima, utilizando o resultado anterior. Justifique.

2008-1

Q8. Um fluido hipotético tem sua equação fundamental dada por

$$u = \frac{A}{v^2} \exp(s/R),$$

onde A e R são constantes positivas, $u = U/N$, $v = V/N$ e $s = S/N$ são, respectivamente, a energia interna, o volume e a entropia molares.

- a) Determine as três equações de estado do sistema: $T(s, v)$, $P(s, v)$, $\mu(s, v)$. Mostre que

$$u = RT, \quad e \quad P_v = 2RT.$$

- b) Calcule as capacidades térmicas molares do fluido a volume constante, c_V , e a pressão constante, c_P .
- c) Um mol do fluido se encontra num estado inicial com temperatura T_1 e volume V_1 e sofre uma *expansão livre* para um volume $V_2 = 2V_1$. Compute a temperatura de equilíbrio do fluido depois da expansão, T_2 , e a variação da entropia do fluido $S_2 - S_1$ no processo.

- d) Suponha que a transformação entre os estados inicial e final do item anterior $(T_1, V_1) \rightarrow (T_2, V_2)$ seja feita quase estaticamente através de uma *expansão adiabática* seguida de um *aquecimento isocórico* (a volume constante). Obtenha o trabalho realizado e o calor absorvido pelo fluido na transformação.

MECÂNICA ESTATÍSTICA

2015-2

Q10. Considere um sistema composto por um número grande N de moléculas distinguíveis, que não interagem entre si. Cada molécula tem dois estados de energia possíveis: 0 e $\epsilon > 0$.

- Obtenha a densidade de entropia S/N do sistema como função apenas da energia média por molécula E/N , de ϵ e da constante de Boltzmann k_B .
- Considerando o sistema em equilíbrio térmico à temperatura inversa $\beta = \frac{1}{k_B T}$, calcule E/N .
- Qual o valor máximo para E/N no caso acima? Compare com o valor máximo dessa grandeza caso fosse possível que todos os elementos do sistema estivessem no estado de energia máxima.

2015-1

Q1. Considere N osciladores harmônicos tridimensionais clássicos não-interagentes, de massa m e frequência angular ω , em contato com um reservatório térmico à temperatura T .

- Escreva a hamiltoniana do sistema e obtenha a função de partição canônica.
- Obtenha o valor médio da energia por oscilador. Qual a capacidade térmica do sistema?

2014-2

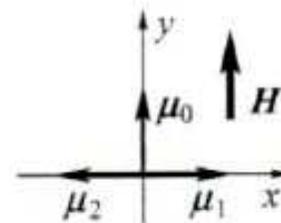
Q10. Considere um gás monoatômico clássico constituído por N átomos não interagentes de massa m confinados num recipiente de volume V , à temperatura T . A hamiltoniana correspondente a um átomo é dada por $\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$.

- Mostre que a função de partição canônica atômica é $\zeta = \frac{V}{\lambda^3}$, onde $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ é o comprimento de onda térmico de de Broglie.
- Utilizando ζ do item anterior, obtenha a função de partição Z do sistema e a energia livre de Helmholtz F . Obtenha, também, a energia livre por átomo $f = \frac{F}{N}$ no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, v = \frac{V}{N}$ fixo.

- Obtenha a energia interna U e a pressão p do gás.
- Calcule a entropia por átomo no limite termodinâmico.

2014-1

Q10. Um determinado material magnético é composto por N átomos magnéticos não interagentes, cujos momentos magnéticos $\vec{\mu}$ podem apontar em três direções possíveis, conforme mostra a figura abaixo: $\vec{\mu}_0 = \mu \hat{y}$, $\vec{\mu}_1 = \mu \hat{x}$ e $\vec{\mu}_2 = -\mu \hat{x}$.



O sistema encontra-se em equilíbrio térmico a temperatura T e na presença de um campo magnético uniforme orientado ao longo da direção y , $\mathbf{H} = H \hat{y}$, de modo que os níveis de energia correspondentes a um único átomo são $\epsilon_0 = -\mu H$, $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$.

- Obtenha a função de partição canônica z de um átomo, a função de partição Z do sistema e a energia livre de Helmholtz f por átomo.
- Determine a energia média $u = \langle \epsilon_n \rangle$ e a entropia s por átomo.
- Obtenha a magnetização por átomo $\mathbf{m} = m_x \hat{x} + m_y \hat{y} = \langle \vec{\mu}_n \rangle$.
- Verifique que a susceptibilidade isotérmica

$$\chi_T = \left(\frac{\partial m_y}{\partial H} \right)_T$$

a campo nulo obedece a lei de Curie,

$$\chi_T \propto \frac{1}{T}.$$

2013-2

Q10. Considere um oscilador harmônico unidimensional modificado, definido pela função hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

onde $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ para $x \geq 0$, $V(x) = \infty$ para $x < 0$. Ele encontra-se em equilíbrio térmico com um reservatório de calor a temperatura T .

- Justifique, em termos da paridade das autofunções do problema quântico, por que, devido às condições impostas, apenas os valores inteiros ímpares de n são permitidos para as autoenergias deste oscilador, $\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$.

b) Para a versão quântica, obtenha a função de partição canônica z deste oscilador e a energia livre de Helmholtz associada f .

c) Obtenha a energia interna média deste oscilador a partir de $u = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$

d) A partir da definição da energia interna média no ensemble canônico, $u \equiv \langle \epsilon_n \rangle$, demonstre a expressão $u = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$

e) Mostre que a função de partição canônica clássica deste oscilador é dada por $z_{\text{class}} = \frac{1}{2\beta\hbar\omega}$. Determine a energia interna média clássica associada, $u_{\text{class}} \equiv \langle \mathcal{H} \rangle_{\text{class}}$.

2013-1

Q5. Um gás ideal monoatômico de N moléculas de massa m está em equilíbrio térmico a uma temperatura absoluta T . O gás está contido em uma caixa cúbica de aresta L , cujos lados de baixo e de cima estão paralelos à superfície da Terra. Considere o efeito do campo gravitacional sobre as moléculas. A aceleração da gravidade é g . Determine:

- a função de partição de uma molécula do gás;
- a energia cinética média de uma molécula do gás;
- a energia potencial média de uma molécula do gás;
- a energia potencial média de uma molécula do gás no caso em que $\frac{mgL}{k_B T} \ll 1$. Faça o cálculo até a 2ª ordem da razão $\frac{mgL}{k_B T}$.

2012-2

Q10. Considere um gás composto por N partículas ultrarelativísticas (de forma que sua energia ϵ possa ser escrita como $\epsilon = cp$, onde p é o seu momento linear) confinando em um recipiente de volume V e a temperatura T . Suponha que as partículas sejam indistinguíveis e não interagentes e que a sua energia térmica seja suficientemente alta para desprezar efeitos quânticos.

a) Mostre que a função de partição do gás é

$$Z = \frac{(8\pi V)^N}{N! \left(\frac{hc}{k_B T} \right)^{3N}},$$

onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo e k_B é a constante de Boltzmann

b) Determine a pressão do gás.

c) Calcule a entropia do gás.

d) Determine a energia interna do gás.

2012-1

Q5. Considere um sistema formado por duas partículas distinguíveis, 1 e 2. Cada uma delas deve estar em um de dois compartimentos, A e B . A energia de uma partícula é zero quando ela se encontra no compartimento A , e ϵ quando no compartimento B . Quando as duas partículas estão no mesmo compartimento, há um custo energético adicional Δ . O sistema está em equilíbrio com um banho térmico à temperatura T .

- Quais são as possíveis configurações do sistema? Determine a energia de cada uma delas.
- Calcule a função de partição Z .
- Qual é a probabilidade de cada configuração?
- Calcule a energia média do sistema.
- Obtenha a entropia do sistema em termos de Z .

2011-2

Q10. A lei de Stefan-Boltzmann diz que a densidade de energia total do campo eletromagnético dentro de uma cavidade em equilíbrio térmico é dada por $u(T) = aT^4$, onde a é uma constante.

a) Podemos derivar a lei de Stefan-Boltzmann usando argumentos termodinâmicos. Sabendo que, em equilíbrio termodinâmico, a densidade de energia da radiação independe do material que forma as paredes, podemos concluir que qualquer variável extensiva da radiação em uma cavidade deverá ser proporcional ao volume da cavidade e depender apenas da temperatura. Em particular, a energia interna e a entropia da radiação serão $U = u(T)V$ e $S = s(T)V$, respectivamente. Podemos usar o eletromagnetismo clássico para calcular a pressão de radiação nas paredes da cavidade. Ela tem a forma de $P = \frac{u(T)}{3}$. Usando essas informações e a primeira lei da termodinâmica, demonstre a lei de Stefan-Boltzmann.

b) Agora obtenha esse resultado usando física estatística, assumindo que a radiação eletromagnética é um gás de fótons.

i. Calcule a função de partição, Z , e mostre que o número médio de fótons com energia ϵ_j é

$$\bar{n}_j = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_j} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_j} - 1}$$

onde $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

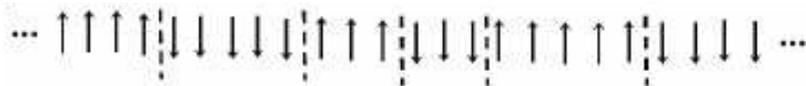
- ii. Obtenha a lei de Stefan-Boltzmann. Você pode usar que o número total de fótons por unidade de volume e frequência entre $[\omega, \omega + d\omega]$ é dado por

$$g(\omega) d\omega = \kappa \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta\epsilon_\omega} - 1},$$

onde κ é uma constante e $\epsilon_\omega = \hbar\omega$ é a energia de um fóton.

2011-1

Q5. Imagine que um material magnético unidimensional possa ser modelado como uma cadeia linear de $N + 1$ spins. Cada spin interage com os seus primeiros vizinhos de tal maneira que a energia do sistema seja $E = n\epsilon$, onde n é o número de paredes de domínio separando regiões de spin \uparrow das regiões de spin \downarrow , como representado na figura abaixo, sendo as paredes de domínio indicadas por linhas tracejadas. A energia por parede de domínio é ϵ . Considere $N \gg 1$ e $n \gg 1$.



- Determine de quantas maneiras as n paredes de domínio podem ser arranjadas.
- Determine a entropia $S(E)$ do sistema contendo n paredes de domínio.
- Determine a energia interna E como função da temperatura, $E(T)$. Expresse seu resultado em termos de N , ϵ , T e constantes físicas apenas.
- Esboce a função $E(T)$, indicando os valores de E para $T = 0$ e $T \rightarrow \infty$.

2010-2

Q5. A função de partição de um gás monoatômico de N partículas interagentes pode ser escrita como:

$$Z = \left(\frac{V - Nb}{N} \right)^N \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \exp\left(\frac{N^2 a}{Vk_B T} \right),$$

onde a e b são constantes positivas e m a massa da partícula.

- Determine a energia livre de Helmholtz do gás.
- Determine a equação de estado desse gás, em termos da pressão, do volume específico $v = V/N$, da temperatura e de constantes.
- Determine a energia interna específica $u = U/N$ do gás.
- Considere que o gás sofra um processo de expansão livre no qual seu volume inicial V é duplicado no interior de um recipiente feito de paredes adiabáticas. Calcule a variação da temperatura absoluta que ocorre no processo.

2010-1

Q5. Um gás ideal de moléculas diatômicas polares, cada uma com momento de dipolo elétrico $\vec{\mu}$, encontra-se a uma temperatura T e está sujeito a um campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$. As orientações dos dipolos são definidas pelos ângulos θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) e ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) de um sistema de coordenadas esféricas cujo eixo- z é paralelo ao campo elétrico. A probabilidade de encontrar uma molécula com orientação do dipolo dentro do elemento $d\theta d\phi$ vale $\rho d\theta d\phi$ onde a densidade de probabilidade $\rho(\theta, \phi)$ é dada por

$$\rho(\theta, \phi) = \frac{1}{A} \sin\theta e^{-\beta E},$$

e está normalizada de acordo com $\int \rho d\theta d\phi = 1$. A constante A é um fator de normalização, $\beta = 1/k_B T$, k_B é a constante de Boltzmann e E é a energia de interação do momento de dipolo com o campo, dada por $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\mu\mathcal{E} \cos\theta$.

- Determine A como função de T , \mathcal{E} e μ .
- O momento de dipolo médio por molécula é definido pela média $P = \mu \langle \cos\theta \rangle$. Determinar P como função de T e \mathcal{E} .
- Esboce o gráfico de P versus \mathcal{E} para T constante.
- A susceptibilidade elétrica é definida por $\chi = \frac{\partial P}{\partial \mathcal{E}}$. Determine χ a campo nulo e mostre que ela é inversamente proporcional à temperatura T . Notar que para pequenos valores de x vale $\coth x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$.

2009-2

Q5. Considere um sistema de N átomos localizados e não interagentes. Cada átomo pode estar em um dos três estados quânticos rotulados pelo número quântico k , com $k = -1, 0, 1$. Um átomo tem a mesma energia $\epsilon_1 > 0$ no estado $k = 1$ ou no estado $k = -1$. Um átomo no estado $k = 0$ tem energia $\epsilon_0 = 0$. Determine:

- A função de partição do sistema.
- A probabilidade p_0 de um átomo se encontrar no estado com energia 0. Determine o comportamento de p_0 nos limites de altas e baixas temperaturas e esboce o gráfico de p_0 versus T .
- As expressões para a energia interna e para a entropia como função da temperatura T . Determine os valores assintóticos da energia e da entropia nos limites de altas e baixas temperaturas. A terceira lei da termodinâmica é observada?
- Esboce o gráfico da entropia como função da temperatura.

2009-1

Q10. Considere, como modelo para um gás clássico, N átomos não interagentes de massa m contidos numa caixa de volume V .

- Obtenha a função de partição $Z(V, T, N)$ para este sistema.
- Escreva a probabilidade $p(v)dv$ de encontrarmos átomos com módulo da velocidade entre v e $v + dv$ a uma temperatura T . Esboce um gráfico da densidade de probabilidade $p(v)$ como função de v .
- Qual a densidade de probabilidade de encontrarmos átomos com velocidade 0?
- Explique em no máximo duas linhas, que mudanças devem ser introduzidas no cálculo da função de partição se os átomos forem substituídos por moléculas. Não calcule.
- No caso de moléculas, demonstre que a pressão do sistema não depende dos graus internos de liberdade da molécula.

2008-2

Q9. Considere N partículas de massa m , não interagentes, em equilíbrio térmico à temperatura T , em movimento unidimensional em uma caixa de comprimento L .

- Escreva a função de partição clássica para este sistema, $Z(T, L, N)$. Justifique.
- Obtenha a energia livre de Helmholtz $F(T, L, N)$ e a entropia $S(T, L, N)$ do sistema.

c) Demonstre, em geral, que a transformada de Legendre da energia interna $U(S)$ com relação à entropia S é dada por $F = U - TS$. Utilize esta relação para obter uma expressão para a energia interna U do sistema em estudo, como função da temperatura T . Comente o resultado.

d) Esboce gráficos de energia interna U e da entropia S em função da temperatura T . Obtenha o calor específico a volume “ L ” constante, c_L , e discuta a compatibilidade do resultado obtido com os dois gráficos esboçados, de $U(T)$ e de $S(T)$.

2008-1

Q9. O modelo de Einstein para a capacidade térmica de sólidos equivale a um conjunto de $3N$ osciladores quânticos unidimensionais localizados de mesma frequência angular ω . As possíveis energias de um oscilador são dadas por

$$\varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Compute a função de partição Z e a energia interna U do sistema de $3N$ osciladores como funções da temperatura.
- Calcule a entropia S e a capacidade térmica C do sistema como funções da temperatura.
- Determine os limites de C para baixas e altas temperaturas e esboce o gráfico dessa grandeza como função da temperatura.

[1] J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th Edition, Harcourt, 1995.
 [2] K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd Edition, Addison-Wesley, 1971.
 [3] T.W.B. Kibble, *Classical Mechanics*, Imperial College Press, 2004.
 [4] A.P. French e M.G.Ebison, *Introduction to Classical Mechanics*, Chapman and Hall, 1987.
 [5] R.A. Becker, *Introduction to Theoretical Mechanics*, McGraw-Hill, 1954.
 [6] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition, Prentice-Hall, 1981.
 [7] J. R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, 3ª. Edição, Editora Campus, 1982.
 [8] R.K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, Wiley, 1986.
 [9] E.M. Purcell, *Curso de Física de Berkeley, Eletricidade e Magnetismo*, Edgard Blücher,
 [10] J.B. Marion e M.A. Heald, *Classical Electromagnetic Radiation*, Brooks/Cole (1995).
 [11] R. Eisberg and R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2nd Edition, Wiley, 1985.

[12] Tipler e R.A. Llewellyn, *Física Moderna*. 3ª. Edição, LTC, 2003.
 [13] W. Rindler, *Introduction to Special Relativity*, Oxford Univ. Press, 1991.
 [14] A.P. French, *Special Relativity*, W.W. Norton (1968).
 [15] S.T. Thornton e A. Rex, *Modern Physics for scientists and engineers*, Brooks Cole, 2005.
 [16] R.A. Serway, C.J. Moses e C.A. Moyer, *Modern Physics*, Brooks Cole, 2004.
 [17] J. Leite Lopes, *Introdução à Teoria Atômica da Matéria*, Ao Livro Técnico, 1959.
 [18] H.M. Nussensveig, *Curso de Física Básica IV*, (capítulo 6), Edgard Blücher.
 [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vols. I and II, 1st Edition, Wiley, 1977.
 [20] S. Gasiorowicz, *Física Quântica*. Guanabara Dois, 1979.
 [21] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* 3rd Edition, Wiley 1997.
 [22] R.H. Dicke e J.P.Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison Wesley, 1961.6
 [23] Levin, *Quantum Chemistry*, Prentice-Hall, 1991.
 [24] S.R.A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*. Edusp, 1998.