

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2017

Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As componentes vertical (y) e horizontal (x) da equação da segunda lei de Newton são

$$\begin{aligned}F_y &= T \cos \theta - mg = m\ddot{y}, \\F_x &= -T \sin \theta = m\ddot{x},\end{aligned}$$

onde T é a tração no fio. Para pequenos ângulos θ , o movimento é aproximadamente horizontal e $y = \dot{y} = \ddot{y} \approx 0$. Assim, $T \cos \theta \approx T \approx mg$. A dinâmica horizontal fica então

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -mg \sin \theta \approx -mg\theta \approx -mg\frac{x}{l} \\ \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{l}x &= 0.\end{aligned}$$

Esta é a equação do oscilador harmônico simples com frequência angular $\omega = \sqrt{g/l}$. O período procurado é, portanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(b) Como a massa da esfera era muito maior que a massa do fio e os deslocamentos iniciais eram muito menores que o comprimento do fio, o que foi confirmado pela ausência de variação do período dentro do intervalo de variação dos deslocamentos iniciais, podemos tratar o pêndulo utilizado com um pêndulo simples. Assim, utilizando a resposta do item anterior,

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

Usando os valores medidos

$$g = 4\pi^2 \frac{4,00}{(4,00)^2} = 9,86960 \text{ m/s}^2,$$

que ainda está expresso com algarismos significativos em excesso. Para o cálculo do erro de g , utilizamos

$$\begin{aligned}\Delta g &= \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}, \\ \Delta_1 &= \frac{\partial g}{\partial l} \Delta l = 4\pi^2 \frac{1}{T^2} \Delta l, \\ \Delta_2 &= \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T = -8\pi^2 \frac{l}{T^3} \Delta T.\end{aligned}$$

Usando os dados fornecidos

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \pi^2 \times 5 \times 10^{-3} \\ \Delta_2 &= -\pi^2 \times 25 \times 10^{-3},\end{aligned}$$

donde

$$\Delta g = \pi^2 \times \sqrt{650} \times 10^{-3} = 5\pi^2 \times \sqrt{26} \times 10^{-3} \approx 0,2 \text{ m/s}^2.$$

Alternativamente, pode-se argumentar que $\Delta_2 \gg \Delta_1$ e $\Delta g \approx |\Delta_2|$. O resultado final é

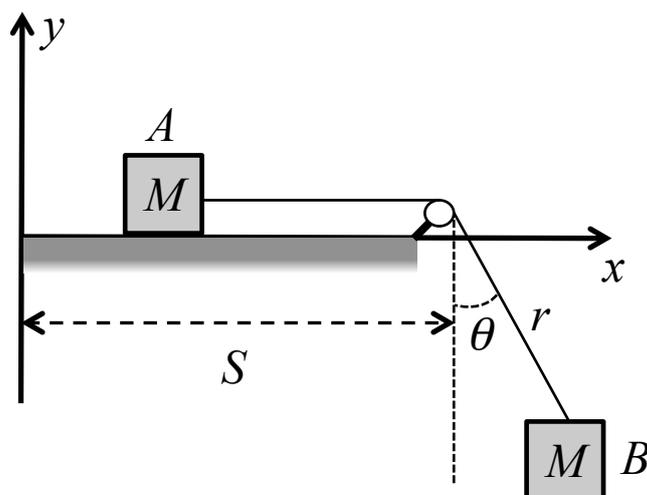
$$g = 9,9 \pm 0,2 \text{ m/s}^2.$$

Q2. Considerando o sistema de referência da figura abaixo, definimos as coordenadas do corpo A como x_A e $y_A = 0$ e do corpo B como x_B e y_B . Dadas as distâncias S e r definidas na figura, segue que

$$\begin{aligned}x_B &= S + r \sin \theta, \\y_B &= -r \cos \theta,\end{aligned}$$

e a inextensibilidade da corda impõe o vínculo entre as coordenadas

$$(S - x_A) + r = l.$$



(a) Para esse item, podemos impor $\theta = 0$ desde o início. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\dot{x}_B &= 0, \\ \dot{y}_B &= -\dot{r}, \\ \dot{x}_A &= \dot{r},\end{aligned}$$

onde usamos o vínculo na última equação. A energia potencial gravitacional do corpo B é $V = Mgy_B = -Mgr$, onde tomamos a altura $y = 0$ como referência (e, portanto, o corpo A não contribui para V). A Lagrangiana do sistema é

$$\begin{aligned}L_a &= \frac{M}{2} (\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) - V \\ L_a &= M\dot{r}^2 + Mgr.\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange é

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_a}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L_a}{\partial r} \\ 2M\ddot{r} &= Mg \Rightarrow \ddot{r} = \frac{g}{2},\end{aligned}$$

que é a aceleração comum pedida.

(b) Deixando agora θ variar, as componentes das velocidades ficam

$$\begin{aligned}\dot{x}_B &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_B &= -\dot{r} \cos \theta + r\dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{x}_A &= \dot{r},\end{aligned}$$

e a Lagrangiana do sistema fica

$$\begin{aligned}L_b &= \frac{M}{2} (\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) - Mgy_B \\ L_b &= \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{M}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + Mgr \cos \theta.\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange para r é

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L_b}{\partial r} \\ 2\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta.\end{aligned}\tag{1}$$

A equação de Euler-Lagrange para θ é

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L_b}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) &= 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} = -gr \sin \theta.\end{aligned}$$

Fazendo $\theta = \dot{\theta} = 0$ na Eq. (1), o lado direito se reduz a g e recuperamos

$$\ddot{r} = \frac{g}{2}.$$

(c) Nesse caso, precisamos acrescentar as contribuições da corda para as energias cinética e potencial. A energia cinética é

$$T_{\text{corda}} = \frac{m}{2} \dot{r}^2,$$

já que a velocidade da corda é a mesma do corpo B e a energia potencial é

$$V_{\text{corda}} = - \left(\frac{r}{l} \right) mg \frac{r}{2} = - \frac{mg}{2l} r^2,$$

onde usamos que a fração de massa da corda que pende ao lado da mesa é $(r/l)m$ e a altura do seu centro de massa é $-r/2$. Portanto, a Lagrangiana fica

$$\begin{aligned}L_c &= M\dot{r}^2 + \frac{m}{2} \dot{r}^2 + Mgr + \frac{mg}{2l} r^2 \\ L_c &= \left(M + \frac{m}{2} \right) \dot{r}^2 + Mgr + \frac{mg}{2l} r^2.\end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange é

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial L_c}{\partial r} \\ (2M + m) \ddot{r} &= Mg + \frac{mg}{l} r.\end{aligned}$$

Q3. (a) A energia total da partícula 1 é $E_1 = \gamma mc^2$. Segundo o enunciado, $E_1 = 2mc^2$. Portanto,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}.$$

Resolvendo para v ,

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

(b) Da conservação de energia, $E_1^i + E_2^i = E^f$,

$$2mc^2 + mc^2 = \gamma(V)Mc^2$$

$$3m = \gamma(V)M \tag{2}$$

Da conservação de momento linear

$$\gamma(v)mv = \gamma(V)MV$$

$$2\frac{\sqrt{3}}{2}mc = \sqrt{3}mc = \gamma(V)MV. \tag{3}$$

Dividindo (3) por (2), temos

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3}c. \tag{4}$$

Substituindo (4) em (2), temos

$$M = \frac{3m}{\gamma(V)} = \sqrt{1 - 1/3} 3m = \sqrt{2/3} 3m = \sqrt{6} m.$$

(c) A energia cinética procurada é dada por

$$K = \gamma(V)Mc^2 - Mc^2 = [\gamma(V) - 1] Mc^2.$$

Usando o resultado do item anterior,

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/3}} - 1 \right) Mc^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right) \sqrt{6}mc^2 = (3 - \sqrt{6}) mc^2.$$

Q4. (a) Para $E \in [0, U_0]$, $E > V(x)$ se $x \in [0, L]$ e $E < V(x)$ se $x < 0$ ou $x > L$. Isso leva a que, nessas duas últimas regiões, a função de onda decaia exponencialmente com a distância ao poço, o que impõe condições de contorno restritivas sobre as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo (ESIT). Como consequência dessas condições de contorno, a ESIT só pode ter solução para valores discretos de E .

(b) Se $x < 0$ (região I) ou $x > L$ (região III), a função de onda decai exponencialmente, enquanto que se $0 < x < L$ (região II) ela tem comportamento oscilatório/senoidal. Assim, de maneira geral,

$$\begin{aligned} \text{I} & : \psi(x) = Ae^{-\alpha|x|} = Ae^{\alpha x}, \quad x < 0, \\ \text{II} & : \psi(x) = C \cos(\gamma x + \phi), \quad 0 < x < L, \\ \text{III} & : \psi(x) = Be^{-\beta|x-L|} = Be^{-\beta(x-L)}, \quad x > L. \end{aligned}$$

(c) A ESIT é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Logo, para um potencial contínuo por partes não infinito, a função de onda e sua primeira derivada são sempre contínuas. Impondo essas condições nas descontinuidades do potencial em $x = 0$ e $x = L$

$$\psi(x = 0^-) = \psi(x = 0^+) \Rightarrow A = C \cos \phi \quad (5)$$

$$\psi(x = L^-) = \psi(x = L^+) \Rightarrow C \cos(\gamma L + \phi) = B \quad (6)$$

$$\psi'(x = 0^-) = \psi'(x = 0^+) \Rightarrow A\alpha = -\gamma C \sin \phi \quad (7)$$

$$\psi'(x = L^-) = \psi'(x = L^+) \Rightarrow -\gamma C \sin(\gamma L + \phi) = -\beta B. \quad (8)$$

A ESIT

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = [E - V(x)]\psi(x)$$

aplicada nas 3 regiões nos dá

$$\begin{aligned} \text{I} & : -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi(x) = -|U_0 - E|\psi(x) \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2m|U_0 - E|}{\hbar^2}}, \\ \text{II} & : -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma^2\psi(x) = +E\psi(x) \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \\ \text{III} & : -\frac{\hbar^2}{2m}\beta^2\psi(x) = -|U_0 - E|\psi(x) \Rightarrow \beta = \alpha = \sqrt{\frac{2m|U_0 - E|}{\hbar^2}}. \end{aligned}$$

De (5) e (6), obtemos A e B em termos de C

$$A = C \cos \phi, \quad B = C \cos(\gamma L + \phi),$$

que, quando levadas em (7) e (8), fornecem

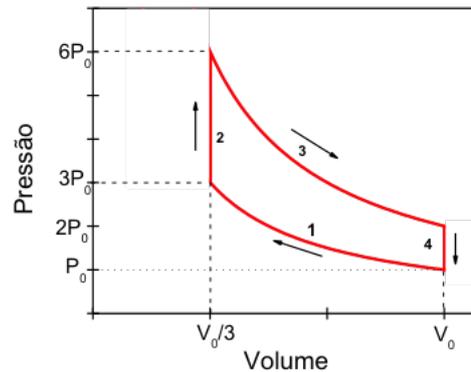
$$\alpha C \cos \phi = -\gamma C \sin \phi \Rightarrow \tan \phi = -\alpha/\gamma \quad (9)$$

$$\gamma C \sin(\gamma L + \phi) = \beta C \cos(\gamma L + \phi) \Rightarrow \tan(\gamma L + \phi) = \beta/\gamma = \alpha/\gamma. \quad (10)$$

As Eqs. (9) e (10) formam um sistema de duas equações em duas incógnitas, ϕ e E (através de α e γ), que pode ser resolvido para achar a energia E .

(d) No limite $L \rightarrow 0$, podemos ver que a condição na energia se torna $\alpha \rightarrow -\alpha$, que só tem solução se $\alpha \rightarrow 0$ ou $E \rightarrow U_0$.

Q5. (a) O esboço do ciclo num diagrama $P \times V$ é



(b) Usaremos a convenção de que trabalho realizado *pelo* gás e calor *injetado* no gás são positivos. Nesse caso, $\Delta U = Q - W$. A energia interna de um gás ideal só depende da sua temperatura. Como não há variação de temperatura no processo 1, a variação da energia interna é nula $\Delta U_1 = 0$. No processo 2 o trabalho é nulo, pois não há variação de volume. A variação de energia interna é, portanto, igual ao calor injetado no sistema (note que $n = 1$)

$$\Delta U_2 = Q_2 = C_V \Delta T = \frac{3R}{2}(2T_0 - T_0) = \frac{3RT_0}{2}.$$

(c) Como o processo 3 é isotérmico à temperatura $2T_0$, a pressão é dada por

$$P = \frac{2RT_0}{V},$$

donde se deduz que o trabalho realizado pelo gás é

$$W_3 = \int_{V_0/3}^{V_0} P dV = \int_{V_0/3}^{V_0} \frac{2RT_0}{V} dV = 2RT_0 \ln 3.$$

(d) De forma semelhante ao feito no item (c), o trabalho realizado pelo gás no processo isotérmico 1 à temperatura T_0 é

$$W_1 = \int_{V_0}^{V_0/3} P dV = \int_{V_0}^{V_0/3} \frac{RT_0}{V} dV = -RT_0 \ln 3,$$

de tal forma que o trabalho total é $W_{tot} = W_1 + W_3 = RT_0 \ln 3$, onde usamos que o trabalho é nulo nos processos isovolumétricos 2 e 4. Calor é injetado (positivo na nossa convenção) no sistema apenas nos processos 2 e 3, pois:

(i) o calor no processo 1 é igual ao trabalho W_1 (já que a energia interna é constante, porque a temperatura é constante) e $W_1 < 0$ (ver acima) e

(ii) o calor no processo 4 é $Q_4 = C_V \Delta T = \frac{3R}{2}(T_0 - 2T_0) = -\frac{3RT_0}{2} < 0$.

O calor no processo 2 foi calculado no item (b) e é $Q_2 = 3RT_0/2$. O calor no processo 3, que é isotérmico, é igual ao trabalho realizado pelo gás $Q_3 = W_3 = 2RT_0 \ln 3$, como calculado no item (c). O calor total injetado é, portanto,

$$Q_{inj} = Q_2 + Q_3 = RT_0 \left(\frac{3}{2} + 2 \ln 3 \right).$$

Finalmente, o rendimento da máquina é

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{inj}} = \frac{\ln 3}{\frac{3}{2} + 2 \ln 3} \approx 0,30.$$

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2017

Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. (a) O potencial eletrostático total $V(z)$ é a soma dos potenciais dos dois aros. O potencial devido ao aro de carga negativa é

$$V_-(z) = -\frac{\lambda \cdot 2\pi b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}},$$

já que cada elemento de carga do aro está à mesma distância do ponto P . Analogamente, o potencial devido ao aro de carga positiva é

$$V_+(z) = \frac{2\lambda \cdot 2\pi 2b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (2b)^2}}.$$

Somando as duas contribuições

$$V(z) = V_-(z) + V_+(z) = \frac{\lambda b}{2\epsilon_0} \left[\frac{4}{\sqrt{z^2 + 4b^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right].$$

(b) Por simetria, $E_x(z) = E_y(z) = 0$. O campo elétrico ao longo do eixo z é

$$E_z(z) = -\frac{\partial V(z)}{\partial z} = \frac{\lambda b z}{2\epsilon_0} \left[\frac{4}{(z^2 + 4b^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2 + b^2)^{3/2}} \right].$$

(c) Pela segunda lei de Newton aplicada ao sistema, temos

$$m\ddot{z} = qE_z(z),$$

onde $E_z(z)$ é dado no item (b).

(d) Linearizando o campo elétrico do item (b) em torno de $z = 0$ obtemos

$$\ddot{z} \approx -\frac{q\lambda}{4\epsilon_0 m b^2} z.$$

A equação diferencial é equivalente à equação de um oscilador harmônico simples com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{q\lambda}{4\epsilon_0 m b^2}}.$$

A frequência de oscilação é, portanto,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4\pi b} \sqrt{\frac{q\lambda}{m\epsilon_0}}.$$

Q7. (a) O campo elétrico físico é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \right] \\ &= E_0 \left\{ \hat{\mathbf{x}} \text{Re} \left[e^{i(kz-\omega t)} \right] + \hat{\mathbf{y}} \text{Re} \left[i e^{i(kz-\omega t)} \right] \right\} \\ &= E_0 \left[\hat{\mathbf{x}} \cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{y}} \sin(kz - \omega t) \right].\end{aligned}$$

(b) Vamos usar a lei de Faraday. Primeiramente, calculamos o rotacional de $\tilde{\mathbf{E}}$ usando a substituição $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ para ondas planas

$$\begin{aligned}\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= E_0 \nabla \times \left(e^{i(kz-\omega t)} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \right) \\ &= E_0 i k \hat{\mathbf{z}} \times \left(e^{i(kz-\omega t)} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \right) \\ &= i k E_0 e^{i(kz-\omega t)} (\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{x}}).\end{aligned}$$

Escrevendo o campo magnético na forma $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz-\omega t)}$ obtemos

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = -i\omega \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz-\omega t)}.$$

Conseguimos então satisfazer a lei de Faraday se a amplitude $\tilde{\mathbf{B}}_0$ for tal que

$$\begin{aligned}\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}. \\ i k E_0 e^{i(kz-\omega t)} (\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{x}}) &= i\omega \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz-\omega t)} \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0 &= \frac{E_0}{c} (\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{x}}).\end{aligned}$$

Logo, o campo magnético complexo é

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{c} (\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{x}}) e^{i(kz-\omega t)},$$

e o campo magnético físico é

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) \right] \\ &= \frac{E_0}{c} \left\{ \hat{\mathbf{y}} \text{Re} \left[e^{i(kz-\omega t)} \right] - \hat{\mathbf{x}} \text{Re} \left[i e^{i(kz-\omega t)} \right] \right\} \\ &= \frac{E_0}{c} \left[\hat{\mathbf{y}} \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{x}} \sin(kz - \omega t) \right].\end{aligned}$$

(c) A densidade de momento linear é

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} (\hat{\mathbf{x}} \cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{y}} \sin(kz - \omega t)) \times (\hat{\mathbf{y}} \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{x}} \sin(kz - \omega t)) \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

(d) Escrevendo o vetor posição em coordenadas cilíndricas $\mathbf{r} = \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \hat{\mathbf{z}}$ e usando o resultado do item (c), obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} (\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + z \hat{\mathbf{z}}) \times \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{\epsilon_0 E_0^2 \rho}{c} \hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}$$

Q8. (a) Usando a relação entre a energia cinética e o momento linear (não-relativísticos) e a relação de de Broglie

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{2m} &= E_{\text{cin}} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m E_{\text{cin}}}} \\ &= \frac{6,63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times (9,11 \times 10^{-31}) \times (22) \times (1,6 \times 10^{-19})}} = 0,26 \text{ nm}.\end{aligned}$$

(b) Numa transição para o estado fundamental, temos

$$hf = 10,2 \text{ eV} = 13,6 \text{ eV} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Podemos verificar que esta relação é satisfeita para $n = 2$, uma vez que

$$13,6 \times \frac{3}{4} = \frac{136}{4} \frac{3}{10} = 34 \times 3/10 = 10,2.$$

Assim, o número quântico do estado excitado é $n = 2$.

(c) Da relação de incerteza energia-tempo, temos

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-8}} \text{ J} = 10^{-7} \text{ eV},$$

que é a incerteza procurada.

(d) A energia cinética relativística é ($\beta \equiv v/c$).

$$E_{\text{cin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - mc^2.$$

Resolvendo para β^2 ,

$$\beta^2 = 1 - (1 + E_{\text{cin}}/mc^2)^{-2}.$$

Como $E_{\text{cin}} \ll mc^2$, podemos expandir até primeira ordem, obtendo

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \approx 1 - \left(1 - 2\frac{E_{\text{cin}}}{mc^2} \right) = 2\frac{E_{\text{cin}}}{mc^2}.$$

Logo,

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{mv^2}{2} \approx \frac{p^2}{2m}.$$

Alternativamente, pode-se apontar que a energia cinética do elétron incidente, 22 eV, é muito menor que a energia de repouso da partícula, 511 keV, o que justifica o uso da aproximação não-relativística.

- Q9. (a) Como todo observável, à Hamiltoniana deve corresponder um operador Hermitiano. Sua representação matricial é realizada por uma matriz Hermitiana, ou seja, uma matriz que é igual a sua transposta complexa-conjugada, ou ainda, uma matriz cujos elementos H_{ij} são tais que

$$H_{ij} = H_{ji}^*.$$

Segue que, para que a matriz fornecida seja Hermitiana, então o elemento que falta é M_{23}^* e $E_3 \in \mathbb{R}$ e sua parte imaginária é zero.

- (b) A matriz de A é evidentemente diagonal e dada na base considerada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O comutador entre A e H pode ser calculado

$$[A, H] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{23} \\ 0 & -M_{23}^* & 0 \end{pmatrix},$$

e ele é, de maneira geral, não nulo. Segue que A não pode ser medido simultaneamente com a energia. Alternativamente, pode-se dizer que A só pode ser medido simultaneamente com a energia se $M_{23} = 0$.

- (c) Devemos diagonalizar a Hamiltoniana. De sua estrutura de blocos, segue que o estado $|1\rangle$ é auto-estado de H com auto-valor $\lambda_1 = E_1$

$$H|1\rangle = E_1|1\rangle.$$

Focando agora no sub-espaço gerado por $|2\rangle$ e $|3\rangle$, as outras autoenergias são soluções de

$$\det \begin{pmatrix} E_2 - \lambda & M_{23} \\ M_{23}^* & E_3 - \lambda \end{pmatrix} = (E_2 - \lambda)(E_3 - \lambda) - |M_{23}|^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(E_2 + E_3) + E_2E_3 - |M_{23}|^2 = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau, obtemos as outras duas autoenergias

$$\lambda_{2,3} = \frac{E_2 + E_3 \pm \sqrt{(E_2 - E_3)^2 + 4|M_{23}|^2}}{2}.$$

- (d) A Hamiltoniana nesse caso é

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

e os autovalores são, usando o resultado do item (c),

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 4.$$

Já vimos que o auto-estado de λ_1 é $|\lambda_1\rangle = |1\rangle$. Os auto-estados de $\lambda_{2,3}$ são obtidos de

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda_{2,3} & 1 \\ 1 & 3 - \lambda_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 2$, o auto-estado é

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle - |3\rangle),$$

e para $\lambda_3 = 4$, o auto-estado é

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow |\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle + |3\rangle).$$

O estado em $t = 0$ é $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda_2\rangle + |\lambda_3\rangle)$. A evolução temporal posterior é simples na base de auto-estados de H

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\lambda_2}{\hbar}t} |\lambda_2\rangle + e^{-i\frac{\lambda_3}{\hbar}t} |\lambda_3\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{2}{\hbar}t} |\lambda_2\rangle + e^{-i\frac{4}{\hbar}t} |\lambda_3\rangle \right).$$

Na base original, o estado é

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left[e^{-i\frac{2}{\hbar}t} (|2\rangle - |3\rangle) + e^{-i\frac{4}{\hbar}t} (|2\rangle + |3\rangle) \right] = \frac{1}{2} \left[\left(e^{-i\frac{4}{\hbar}t} + e^{-i\frac{2}{\hbar}t} \right) |2\rangle + \left(e^{-i\frac{4}{\hbar}t} - e^{-i\frac{2}{\hbar}t} \right) |3\rangle \right].$$

O vetor coluna correspondente na base original é

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\frac{4}{\hbar}t} + e^{-i\frac{2}{\hbar}t} \\ e^{-i\frac{4}{\hbar}t} - e^{-i\frac{2}{\hbar}t} \end{pmatrix}.$$

Q10. (a) Nos itens abaixo, $1/\beta = k_B T$. Como os íons são independentes, a função de partição é dada pelo produto das funções de partição de cada íon

$$Z = Z_1^N,$$

onde

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{\sigma_1=-1,0,+1} e^{-\beta D \sigma_1^2 + \beta h \sigma_1} \\ &= e^{-\beta D + \beta h} + 1 + e^{-\beta D - \beta h} \\ &= 1 + 2e^{-\beta D} \cosh(\beta h). \end{aligned}$$

Logo

$$Z = (1 + 2e^{-\beta D} \cosh(\beta h))^N.$$

(b) A energia livre de Helmholtz por íon é

$$f = \frac{F}{N} = -\frac{k_B T}{N} \ln Z = -k_B T \ln Z_1 = -k_B T \ln(1 + 2e^{-\beta D} \cosh(\beta h)).$$

(c) A energia interna por íon é dada por

$$u = \frac{U}{N} = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1.$$

Calculando a derivada

$$u = \frac{2e^{-\beta D}}{2e^{-\beta D} \cosh h\beta + 1} (D \cosh h\beta - h \sinh h\beta).$$

(d) Para $h = 0$, temos que

$$u = \frac{2De^{-\beta D}}{2e^{-\beta D} + 1} = \frac{2D}{2 + e^{\beta D}}.$$

O calor específico é dado por

$$c = \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} = \frac{2D^2 e^{\frac{D}{k_B T}}}{k_B T^2 (2 + e^{\frac{D}{k_B T}})^2}.$$