

EUf

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o primeiro semestre de 2018

Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As equações de movimento são

$$\mathbf{F}_g = -mg\hat{\mathbf{z}} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \dot{v}_x = 0, \quad \dot{v}_z = -g.$$

(b) Integrando em relação ao tempo as equações de movimento,

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= 0 \Rightarrow v_x(t) = C_1 \\ v_x(0) &= v_0 \cos \theta = C_1 \Rightarrow v_x(t) = v_0 \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_z &= -g \Rightarrow v_z(t) = -gt + C_2 \\ v_z(0) &= v_0 \sin \theta = C_2 \Rightarrow v_z(t) = v_0 \sin \theta - gt. \end{aligned}$$

(c) Integrando em relação ao tempo as componentes da velocidade obtidas no item (b),

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x &= v_0 \cos \theta \Rightarrow x(t) = v_0 t \cos \theta + C_1 \\ x(0) &= 0 = C_1 \Rightarrow x(t) = v_0 t \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v_0 \sin \theta - gt \Rightarrow z(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + C_2 \\ z(0) &= 0 = C_2 \Rightarrow z(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

(d) Utilizando os resultados dos itens (b) e (c),

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ \mathbf{L} &= m \left[\hat{\mathbf{x}}(v_0 t \cos \theta) + \hat{\mathbf{z}} \left(v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 \right) \right] \times [\hat{\mathbf{x}}(v_0 \cos \theta) + \hat{\mathbf{z}}(v_0 \sin \theta - gt)] \\ \mathbf{L} &= \left(\frac{1}{2}mgv_0 t^2 \cos \theta \right) \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

(e) Novamente, utilizando o resultado do item (c),

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g \\ \mathbf{N} &= \left[\hat{\mathbf{x}}(v_0 t \cos \theta) + \hat{\mathbf{z}} \left(v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 \right) \right] \times (-mg\hat{\mathbf{z}}) \\ \mathbf{N} &= (mgv_0 t \cos \theta) \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Comparando os resultados dos itens (d) e (e) temos, como esperado,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}.$$

Q2. (a) A força pedida é

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla U_2(r) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{dU_2(r)}{dr} = -kr\hat{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} = -k(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}).$$

(b) A energia cinética da partícula é dada por

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Como $U_1(y) = \lambda y = \lambda r \sin \theta$, a energia potencial em coordenadas polares é

$$U = \frac{1}{2}kr^2 + \lambda r \sin \theta.$$

A lagrangiana da partícula é, portanto,

$$\begin{aligned} L &= T - U, \\ L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2 - \lambda r \sin \theta. \end{aligned}$$

Usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m\dot{\theta}^2 - kr - \lambda \sin \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\lambda r \cos \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta}, \end{aligned}$$

as equações de movimento de Euler-Lagrange são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 = -kr - \lambda \sin \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = -\lambda r \cos \theta, \\ m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) + \lambda r \cos \theta &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(c) Utilizando os resultados do item (b), os momentos canonicamente conjugados são

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}. \end{aligned}$$

A hamiltoniana é dada por

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 + \lambda r \sin \theta.$$

(d) O momento angular é

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}.$$

Comparando o resultado acima com os resultados do item (c), temos que

$$p_\theta = L_z.$$

A equação de movimento (1) indica que $p_\theta = L_z = \text{constante}$ se $\lambda = 0$, isto é, $\mathbf{L}$ é conservado apenas na ausência da força $\mathbf{F}_1$.

Q3. (a) A forma geral das soluções $\psi_1(x)$ (região 1: $x < 0$) e $\psi_2(x)$ (região 2: $x > 0$) é

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, & k_1 &= \sqrt{2mE}/\hbar, \\ \psi_2(x) &= C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}, & k_2 &= \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar,\end{aligned}$$

onde A , B , C e D são constantes complexas a serem determinadas.

(b) O percentual pedido é dado pelo coeficiente de reflexão, que é obtido da razão entre as densidades de corrente $J = \frac{i\hbar}{2m}(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx})$ das ondas refletida e incidente. Ele é dado por $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$. Como as partículas são incidentes pela esquerda, $D = 0$. Os outros coeficientes são determinados exigindo-se a continuidade da função de onda e sua derivada em $x = 0$

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= \psi_2(0) \Rightarrow A + B = C, \\ \psi'_1(0) &= \psi'_2(0) \Rightarrow k_1(A - B) = k_2 C.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \Rightarrow R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{1 - k_2/k_1}{1 + k_2/k_1} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{(E - V_0)/E}}{1 + \sqrt{(E - V_0)/E}} \right)^2.$$

(c) Para $E < V_0$, a solução geral é

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, & k_1 &= \sqrt{2mE}/\hbar, \\ \psi_2(x) &= C e^{-\kappa x}, & \kappa &= \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar > 0,\end{aligned}$$

onde A , B e C são constantes complexas a serem determinadas e já excluimos um termo com exponencial crescente para $x > 0$ por corresponder a uma função de onda que não é limitada superiormente quando $x \rightarrow +\infty$.

(d) A probabilidade pedida é o coeficiente de reflexão $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$, como no item (b).

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= \psi_2(0) \Rightarrow A + B = C, \\ \psi'_1(0) &= \psi'_2(0) \Rightarrow i k_1(A - B) = -\kappa C,\end{aligned}$$

donde

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - i\kappa}{k_1 + i\kappa} \Rightarrow R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{k_1^2 + \kappa^2}{k_1^2 + \kappa^2} = 1.$$

- Q4. (a) Do gráfico, pode-se estimar $y_1 \approx 25\mu\text{m}$. Para o ângulo, se L é a distância da grade ao plano do detector

$$\theta_1 \approx \text{tg}\theta_1 = y_1/L = \frac{2,5 \times 10^{-5}}{1,25} = 2,0 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

- (b) Se d é a separação entre as fendas da grade, a condição para interferência construtiva é, do formulário,

$$d \sin\theta_n = n\lambda.$$

Para o primeiro máximo ($n = 1$)

$$\lambda = d \sin\theta_1 \approx d \theta_1 = (100 \times 10^{-9})(2,0 \times 10^{-5}) = 2,0 \times 10^{-12} \text{ m.}$$

- (c) A massa molar do C_{60} é $60 \times 12 = 72 \times 10^1 \text{ g/mol}$. Logo, a massa de uma molécula é

$$M = \frac{72 \times 10^1 \text{ g}}{6,02 \times 10^{23}} = 1,2 \times 10^{-24} \text{ kg.}$$

O módulo do momento linear de uma molécula é

$$p = Mv = 1,2 \times 10^{-24} \times 220 = 2,6 \times 10^{-22} \text{ kg m/s.}$$

- (d) O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = 6,63 \times 10^{-34} / 2,6 \times 10^{-22} = 2,6 \times 10^{-12} \text{ m.}$$

- Q5. (a) A pressão final P_f é a soma da pressão externa P_a e a pressão P_m devido à força da mola. Esta última é

$$P_m = \frac{kx}{A} = \frac{400 \times 2}{5 \times 10^{-3}} = 1,6 \times 10^5 \text{ N/m}^2,$$

onde x é a variação de comprimento do cilindro. Assim

$$P_f = P_m + P_a = 2,6 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

- (b) A relação entre as variáveis termodinâmicas iniciais e finais é

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow T_f = \frac{P_f V_f T_i}{P_i V_i} = \frac{P_f T_i (L + x)}{P_i L} = \frac{2,6 \times 300 \times 27}{1 \times 25} = 8,4 \times 10^2 \text{ K}.$$

Alternativamente, da equação do gás ideal

$$T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = \frac{2,6 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} \times 27 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-2} \times 8,31} = 8,4 \times 10^2 \text{ K}.$$

- (c) O trabalho total W realizado pelo gás é igual à soma da variação de energia potencial elástica da mola W_m com o trabalho W_a realizado contra a pressão externa constante

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{kx^2}{2} = \frac{400 \times 10^2 \times (2 \times 10^{-2})^2}{2} = 8 \text{ J}, \\ W_a &= P_a \Delta V = P_a A x = 1 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-2} = 10 \text{ J}, \\ W &= W_m + W_a = 18 \text{ J}. \end{aligned}$$

- (d) O calor Q fornecido ao gás é igual ao trabalho total W calculado em (c) mais a variação da energia interna do gás ΔU

$$\begin{aligned} \Delta U &= n c_V \Delta T = 5 \times 10^{-2} \times 12,5 \times (8,4 \times 10^2 - 300) = 3,4 \times 10^2 \text{ J}, \\ Q &= \Delta U + W = 3,6 \times 10^2 \text{ J}. \end{aligned}$$

EUf

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o primeiro semestre de 2018

Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

- Q6. (a) Há conservação de energia mecânica dos íons entre a fonte e a fenda de entrada. A energia mecânica total é a soma da energia cinética e potencial elétrica. Assim, se a velocidade final procurada tem módulo v e as energias mecânicas inicial e final são E_i e E_f , respectivamente,

$$E_i = qV = E_f = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

Dentro da câmara, a energia mecânica, que é puramente cinética, é conservada, já que o campo magnético não realiza trabalho. Portanto, v é também o módulo da velocidade dos íons quando passam pela fenda de saída.

- (b) O módulo da força magnética $\mathbf{F}_m$ dentro da câmara é

$$|\mathbf{F}_m| = |q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})| = qvB,$$

pois $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares entre si. A força magnética é a resultante centrípeta responsável pelo movimento circular uniforme dos íons. Portanto,

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow m = \frac{qBr}{v} \Rightarrow m = \frac{qB^2r^2}{2V},$$

onde usamos o resultado do item (a) no último passo.

- (c) A resolução das medidas de massa Δm está relacionada ao erro na medida do raio Δr por

$$\Delta m = \frac{\partial m}{\partial r} \Delta r \Rightarrow \Delta m = \frac{qB^2r}{V} \Delta r.$$

Assim,

$$\Delta m = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times (1,00)^2 \times 1,0 \times 10^{-1}}{4,0 \times 10^3} 100 \times 10^{-6} = 4,0 \times 10^{-28} \text{ kg}.$$

- (d) A diferença de massa entre os isótopos δm é aproximadamente duas vezes a massa do nêutron

$$\delta m = 2 \times 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3,4 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Essa diferença é 8,5 vezes a resolução do aparelho. Portanto, é possível distinguir os isótopos.

Q7. (a) Partindo das equações de Maxwell em meios materiais (dadas no formulário) e fazendo $\rho_F = 0$, $\mathbf{J}_F = \sigma \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_F \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_F + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5)$$

Deve-se notar que as equações sem fontes não são modificadas em meios materiais.

(b) Tomando o rotacional da Eq. (3)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

Usando as Eqs. (2) e (5)

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Finalmente,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

(c) Supondo que $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = -k^2 \mathbf{E} \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -i\omega \mathbf{E} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \mathbf{E} \\ \Rightarrow (-k^2 + i\mu\sigma\omega + \mu\epsilon\omega^2) \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega = \mu\epsilon\omega^2 \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right).$$

(d) Quando $\sigma \neq 0$, obtemos um k complexo, ou seja, $k = k_R + ik_I$, onde $k_R = \text{Re}[k]$ e $k_I = \text{Im}[k]$. Haverá então atenuação da amplitude da onda

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i[(k_R + ik_I)x - \omega t]} = \mathbf{E}_0 e^{-k_I x} e^{i(k_R x - \omega t)}.$$

Quando $\sigma = 0$, k é real e a propagação da onda se dá com amplitude constante, sem atenuação.

- Q8. (a) Medidas da energia dão como resultado auto-valores do hamiltoniano. Ao auto-valor E_0 corresponde unicamente o estado $|1\rangle$. Portanto, o protocolo P_1 prepara sempre o estado $|1\rangle$.
 (b) Ao auto-valor E corresponde o sub-espaço gerado pelos estados $|2\rangle$ e $|3\rangle$. Portanto, os estados preparados por P_2 são da forma

$$|\psi\rangle = C_1|2\rangle + C_2|3\rangle,$$

onde C_1 e C_2 são números complexos quaisquer, não simultaneamente nulos.

(c) O hamiltoniano total após $t = 0$ é

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E & W \\ 0 & W & E \end{pmatrix}.$$

Para acharmos os auto-valores, precisamos resolver a equação secular

$$\begin{vmatrix} E_0 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & E - \lambda & W \\ 0 & W & E - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (E_0 - \lambda) [(E - \lambda)^2 - W^2] = 0.$$

Os auto-valores são

$$\lambda_0 = E_0, \quad \lambda_+ = E + W, \quad \lambda_- = E - W.$$

Um dos auto-vetores é óbvio da forma bloco-diagonal do hamiltoniano.

$$|\lambda_0\rangle = |1\rangle$$

Os outros auto-vetores de $\lambda_{\pm}$ são obtidos de

$$\begin{pmatrix} E - \lambda_{\pm} & W \\ W & E - \lambda_{\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp W & W \\ W & \mp W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\pm} \\ b_{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde obtém-se $a_{\pm} = \pm b_{\pm}$. Assim, normalizando os auto-vetores,

$$|\lambda_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle \pm |3\rangle).$$

(d) Primeiramente, escrevemos o estado inicial $|\psi(t=0)\rangle = |2\rangle$ na base de auto-estados de H

$$|\psi(t=0)\rangle = |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda_+\rangle + |\lambda_-\rangle).$$

Para $t > 0$, a evolução temporal na base de auto-estados de H é simples

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\lambda_+}{\hbar}t} |\lambda_+\rangle + e^{-i\frac{\lambda_-}{\hbar}t} |\lambda_-\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{E+W}{\hbar}t} |\lambda_+\rangle + e^{-i\frac{E-W}{\hbar}t} |\lambda_-\rangle \right).$$

Alternativamente, na base inicial o estado é

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2} \left[e^{-i\frac{E+W}{\hbar}t} (|2\rangle + |3\rangle) + e^{-i\frac{E-W}{\hbar}t} (|2\rangle - |3\rangle) \right], \\ |\psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{E}{\hbar}t} [\cos(Wt/\hbar) |2\rangle - i \sin(Wt/\hbar) |3\rangle]. \end{aligned}$$

Q9. (a) A energia dos fótons $E = hc/\lambda$ é inversamente proporcional ao comprimento de onda. Portanto, os fótons espalhados, que transferiram parte de sua energia aos elétrons, têm comprimento de onda maior que os incidentes. Segue que o comprimento de onda dos raios X incidentes é λ_1 e o comprimento de onda dos fótons espalhados é $\lambda_2 > \lambda_1$.

(b) O comprimento de onda do fóton incidente é

$$\lambda_i = \frac{hc}{E_i} = \frac{1,24 \text{ keV nm}}{23 \times 10^3 \text{ eV}} = 0,54 \text{ \AA}.$$

(c) O comprimento de onda do fóton espalhado é, do formulário,

$$\lambda = \lambda_i + \frac{h}{m_0 c} [1 - \cos(60^\circ)] = \lambda_i + \frac{\lambda_C}{2} = 0,54 + \frac{0,0243}{2} = 0,55 \text{ \AA}.$$

(d) A variação da energia total relativística do elétron no evento é igual à variação procurada de sua energia cinética ΔK , já que a energia de repouso não varia. Como a energia cinética inicial do elétron é praticamente nula, sua energia cinética após o espalhamento é ΔK . Essa variação, por sua vez, é igual (em módulo) à variação da energia do fóton no espalhamento, ou seja,

$$\Delta K = E_i - \frac{hc}{\lambda} = 23 \text{ keV} - \frac{1,24 \text{ keV nm}}{0,055 \text{ nm}} = (23 - 22,5) \text{ keV} = 0,5 \text{ keV}.$$

Q10. a) Se o momento da partícula é $\mathbf{p} = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}$, seu hamiltoniano H_1 é a soma das energias cinética e potencial gravitacional

$$H_1 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz$$

b) Por se tratar de um sistema de partículas que não interagem entre si, sua função partição Z é

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!},$$

onde já incluímos o fator de correção de contagem de Gibbs e

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L dx dy dz \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y dp_z e^{-\beta H_1},$$

onde $\beta = 1/(k_B T)$. As integrais gaussianas sobre os momentos são dadas no formulário e obtém-se

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{L^2}{h^3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \right)^3 \int_0^L e^{-\beta mgz} dz \\ &= \frac{L^2}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \left(\frac{1 - e^{-\beta mgL}}{\beta mg} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$Z = \frac{1}{N!} \left[\frac{L^2}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \left(\frac{1 - e^{-\beta mgL}}{\beta mg} \right) \right]^N.$$

c) Usando que $e^{-\beta mgL} \approx 1 - \beta mgL$,

$$Z \approx \frac{1}{N!} \left[\frac{L^2}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \frac{(1 + \beta mgL - 1)}{\beta mg} \right]^N = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2}.$$

d) A energia livre de Helmholtz é

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T N \ln V - k_B T \ln \left[\frac{h^{-3N}}{N!} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2} \right].$$

Usando agora que

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}$$

e notando que o segundo termo da energia livre não depende de V , obtém-se

$$p = \frac{Nk_B T}{V} \Rightarrow pV = Nk_B T,$$

que é a equação de estado do gás ideal, como esperado, já que os efeitos do campo gravitacional são desprezíveis no regime em questão.