

EU F

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2018

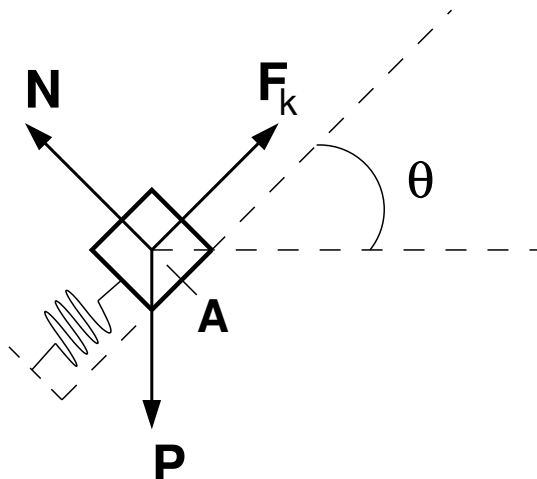
Gabarito

Parte 1 (Substitutiva)

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As forças que atuam no bloco são a normal $\mathbf{N}$, o peso $\mathbf{P}$ e a força da mola $\mathbf{F}_k$:



(b) Utilizando a conservação da energia mecânica e considerando que o zero do potencial gravitacional é dado pela linha tracejada, temos que

$$\begin{aligned} E_A &= E_B, \\ \frac{1}{2}kd^2 &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mgd \sin \theta. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$v_B = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - 2gd \sin \theta}.$$

(c) De modo análogo ao item (b)

$$\begin{aligned} E_A &= E_C, \\ \frac{1}{2}kd^2 &= \frac{1}{2}mv_C^2 + 4mgd. \end{aligned}$$

Assim,

$$v_C = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - 8gd}.$$

(d) O trabalho da força de atrito é igual à variação da energia cinética. Logo

$$\begin{aligned} W_{at} &= -\Delta T, \\ (\mu mg)L &= \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{kd^2}{m} - 8gd \right). \end{aligned}$$

Segue que

$$\mu = \frac{kd^2}{2mgL} - 4\frac{d}{L}.$$

Q2. (a) A força procurada é

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\rho) = -\hat{\rho} \frac{dU}{d\rho} = -\frac{U_0}{\rho} \hat{\rho}.$$

(b) Considerando coordenadas cilíndricas ρ , φ e z como coordenadas generalizadas, temos que a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Dessa forma, a lagrangiana da partícula é dada por

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U_0 \ln(\rho/a).$$

Calculando as derivadas parciais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{U_0}{\rho}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m\dot{\rho}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\rho^2\dot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}. \end{aligned}$$

temos as seguintes equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{U_0}{\rho} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\rho^2\dot{\varphi} = \text{cte.} \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{z} = \text{cte.} \quad (3)$$

(c) Utilizando os resultados do item (b), temos que

$$\begin{aligned} p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \end{aligned}$$

Comparando o resultado acima com as equações de movimento do item (b), temos que

$$p_\varphi = L_z = \text{cte.} \quad \text{e} \quad p_z = \text{cte.}$$

(d) A hamiltoniana está relacionada com a lagrangiana através da transformada de Legendre

$$H = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L.$$

Como

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

temos que

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} + U_0 \ln(\rho/a),$$

isto é, $H = T + U = E$.

Q3. (a) No referencial S , os momentos totais inicial e final são

$$P_i = \gamma_{1i} m_1 v_{1i} + 0 = \frac{5}{3} m_1 \frac{4c}{5} = \frac{4}{3} m_1 c,$$

$$P_f = \gamma_{3f} m_3 v_{3f} = \frac{5}{4} m_3 \frac{3c}{5} = \frac{3}{4} m_3 c,$$

Logo, por conservação de momento linear, $P_f = P_i \Rightarrow m_3 = \frac{16}{9} m_1$.

(b) No referencial S , as energias relativísticas totais inicial e final são

$$E_i = \gamma_{1i} m_1 c^2 + m_2 c^2 = \frac{5}{3} m_1 c^2 + m_2 c^2,$$

$$E_f = \gamma_{3f} m_3 c^2 = \frac{5}{4} \frac{16}{9} m_1 c^2 = \frac{20}{9} m_1 c^2,$$

Por conservação de energia, $E_f = E_i \Rightarrow m_2 = \frac{20}{9} m_1 - \frac{5}{3} m_1 = \frac{5}{9} m_1$.

(c) No segundo referencial S' , temos $v'_{2i} = -V$ e $v'_{1i} = \frac{v_{1i}-V}{(1-\frac{v_{1i}V}{c^2})}$. Como $v'_{1i} = -v'_{2i} = V$, temos

$$V = \frac{v_{1i} - V}{(1 - \frac{v_{1i}V}{c^2})} \Rightarrow 2V - \frac{v_{1i}V^2}{c^2} - v_{1i} = 0,$$

ou seja, uma equação de segundo grau para V . Sendo $v_{1i} = 4c/5$, temos

$$\frac{4}{5} \left(\frac{V}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{V}{c} \right) + \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \frac{V}{c} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{8/5} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

Escolhendo $V < c$ temos $V = c/2$.

Q4. (a) Para um ensemble de experimentos de partículas incidentes em uma barreira de potencial cuja altura é maior que a energia da partícula ($E < V_0$), observa-se que numa fração do conjunto de experimentos a partícula é refletida e no restante a partícula é transmitida. Assim, ao contrário do que a mecânica clássica determinaria para esta situação, há uma probabilidade não nula de que uma partícula incidente com $E < V_0$ seja transmitida através da barreira de potencial (fenômeno de tunelamento).

(b) A função de onda e a sua primeira derivada espacial devem ser contínuas para todos os pontos do espaço neste problema. Assim, se $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ é a função de onda associada à partícula de energia E , as condições de contorno em $x = 0$ e $x = a$ são

$$\begin{aligned}\psi(0^-) &= \psi(0^+), & \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{0^-} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{0^+}, \\ \psi(a^-) &= \psi(a^+), & \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{a^-} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{a^+},\end{aligned}$$

onde $x^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}(x \pm \epsilon)$.

(c) A forma geral das soluções $\psi_1(x)$ (região 1: $x < 0$), $\psi_2(x)$ (região 2: $0 < x < a$) e $\psi_3(x)$ (região 3: $x > a$) para $E > V_0$ é

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x}, & k_1 &= \sqrt{2mE}/\hbar, \\ \psi_2(x) &= C e^{ik_2x} + D e^{-ik_2x}, & k_2 &= \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar, \\ \psi_3(x) &= F e^{ik_1x},\end{aligned}$$

onde A, B, C, D e F são constantes complexas a serem determinadas.

(d) A fração R de partículas refletidas é dada pela razão da intensidade da onda refletida pela intensidade da onda incidente, ou seja,

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}.$$

(e) A transmissão perfeita é observada quando $\sin(a\sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar) = 0$, ou seja, para

$$a = \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{2m(E - V_0)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Q5. (a) Como o processo é isotérmico $T_D = T_0$. Como o gás é ideal $PV/T = \text{const.}$. Portanto, para o processo $A \rightarrow B$,

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_0/3}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{T_0}{3},$$

para o processo $B \rightarrow C$,

$$\frac{P_C}{T_C} = \frac{P_B}{T_B} = \frac{P_0}{T_0/3} \Rightarrow P_C = 2P_0.$$

Segue que $P_D = P_C = 2P_0$. Finalmente, para o processo $D \rightarrow A$,

$$P_D V_D = 2P_0 V_D = P_0 V_0 \Rightarrow V_D = \frac{V_0}{2}.$$

(b) O trabalho realizado pelo gás no processo $A \rightarrow B$ é

$$W_{AB} = P_0(V_0/3 - V_0) = -\frac{2}{3}P_0V_0.$$

No processo $B \rightarrow C$ não há realização de trabalho. No processo $C \rightarrow D$ o gás realiza o trabalho

$$W_{CD} = 2P_0(V_0/2 - V_0/3) = \frac{1}{3}P_0V_0.$$

Finalmente, no processo $D \rightarrow A$, o trabalho é

$$W_{DA} = \int_{V_0/2}^{V_0} \frac{nRT_0}{V} dV = nRT_0 \ln\left(\frac{V_0}{V_0/2}\right) = P_0V_0 \ln(2).$$

O trabalho líquido realizado pelo gás é

$$W = P_0V_0 \left[\ln(2) - \frac{1}{3} \right] = 0,36P_0V_0.$$

(c) A primeira lei da termodinâmica estabelece que $Q = W + \Delta U$, onde U é a energia interna. Para o gás ideal $\Delta U = nc_V \Delta T = 5nR\Delta T/2$. Usando os resultados do item (b),

$$Q_{AB} = P_0V_0 \left(-\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{7}{3}P_0V_0,$$

$$Q_{BC} = \frac{5}{2}nR\frac{T_0}{3} = \frac{5}{6}P_0V_0,$$

$$Q_{CD} = P_0V_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6} \right) = \frac{7}{6}P_0V_0,$$

$$Q_{DA} = P_0V_0 \ln(2).$$

Calor é transferido do ambiente para o gás nos processos em que $Q > 0$, ou seja, nos processos $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ e $D \rightarrow A$.

(d) A eficiência da máquina é dada por

$$\eta = \frac{W}{Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}} = \frac{P_0V_0 [\ln(2) - \frac{1}{3}]}{P_0V_0 [\ln(2) + 2]} = \frac{[\ln(2) - \frac{1}{3}]}{[\ln(2) + 2]} = 0,13.$$