

**EUF**

**Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2018

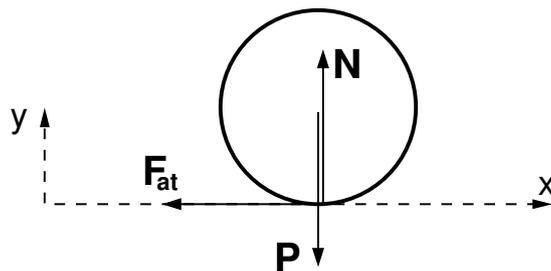
Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As forças que atuam no disco são a normal  $\mathbf{N}$ , o peso  $\mathbf{P}$  e a força de atrito  $\mathbf{F}_{at}$ :



(b) Para o movimento de translação do centro de massa na direção horizontal, temos

$$F_{at} = ma \Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g,$$

onde usamos que o módulo da normal é igual ao módulo do peso, pois não há aceleração vertical. Para o movimento de rotação em torno do centro do disco, temos

$$N_{at} = I\alpha \Rightarrow \mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu g}{R},$$

onde  $N_{at}$  é o torque devido ao atrito.

(c) Usando a aceleração linear do item (b) e notando que ela tem sentido oposto à velocidade inicial

$$v(t) = v_0 - at = v_0 - \mu gt.$$

Usando a aceleração angular do item (b) e que  $\omega(0) = 0$

$$\omega(t) = \frac{2\mu gt}{R}.$$

(d) No ponto A, temos que  $v = \omega R$ , pois o disco passa a rolar sem deslizar. Utilizando os resultados do item (c), temos que

$$v(t_A) = \omega(t_A)R \Rightarrow v_0 - \mu gt_A = \frac{2\mu gt_A}{R}R \Rightarrow t_A = \frac{v_0}{3\mu g}.$$

Q2. (a) Considerando as coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\varphi$  e  $z$  como coordenadas generalizadas e o vínculo  $z = \rho$ , tomaremos apenas as coordenadas  $\rho$  e  $\varphi$  como independentes. A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(2\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2).$$

Como  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$  é uma força conservativa, a energia potencial associada é

$$U = - \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^z (-mg\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{z}}dz') = mgz \quad \Rightarrow \quad U(\rho) = mg\rho.$$

Dessa forma, a lagrangiana da partícula é dada por

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(2\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\rho.$$

(b) Usando as seguintes derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\rho\dot{\varphi}^2 - mg, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= 2m\dot{\rho}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\rho^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

obtemos equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + mg = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\rho^2\dot{\varphi} = \text{cte} \quad (2)$$

(c) Expressando o momento angular em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= m(\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}) \times (\dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}}) \\ &= m[-\rho\dot{\varphi}z\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \rho^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{z}}] \end{aligned} \quad (3)$$

Impondo o vínculo  $z = \rho$ ,

$$\mathbf{L} = -m\rho^2\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\rho}} + m\rho^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{z}} \quad (4)$$

Comparando a Eq. (4) com os resultados do item (b), concluímos que

$$\mathbf{L}_z = m\rho^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{z}} = \text{cte.}$$

(d) Para a órbita circular, devemos ter  $\rho = \rho_0 \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ . Substituindo nas equações de movimento (1) e (2),

$$\rho_0\dot{\varphi}^2 = g, \quad (5)$$

$$m\rho_0^2\dot{\varphi} = L_z. \quad (6)$$

Essas equações admitem solução para  $\dot{\varphi} = \omega_c = \text{constante}$ , que corresponde a uma órbita circular uniforme. Usando a equação de movimento (6), obtemos a frequência angular procurada

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{\rho_0}}.$$

Q3. (a) No referencial do centro de massa ( $P_{\text{cm}} = 0$ ), a Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \frac{(p_r)^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r},$$

onde  $\mu = m_e/2$  é a massa reduzida do sistema,  $r$  é a coordenada relativa e  $p_r$  é o momento canonicamente conjugado a  $r$ . No caso de órbitas circulares,  $p_r = 0$  e a distância relativa de equilíbrio será dada por  $\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=R} = 0$  ou seja,

$$\frac{L^2}{\mu R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}.$$

Logo,

$$L^2 = \frac{\mu e^2 R}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{m_e e^2 R}{8\pi\epsilon_0}}.$$

(b) Aplicando a regra de quantização de Bohr dada no formulário ( $L = n\hbar$ ) temos:

$$\frac{m_e e^2 R_n}{8\pi\epsilon_0} = n^2 \hbar^2 \Rightarrow R_n = 2n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}.$$

Em termos do raio de Bohr  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$  (dado no formulário)

$$R_n = 2n^2 a_0.$$

(c) A energia do sistema será dada por

$$E = T + V = \frac{L^2}{2\mu R_n^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_n} = \frac{m_e R_n e^2}{8\pi m_e R_n^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_n} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_n}.$$

Em elétron-volts

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} \left( \frac{m_e e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} \right) = -\frac{6,8}{n^2} \text{ eV}.$$

(d) A energia do fóton emitido será  $E_f = \Delta E = E_2 - E_1 = -6,8 \left( \frac{1}{4} - 1 \right) \Rightarrow E_f = \frac{3 \cdot (6,8)}{4} = 5,1$  eV. Por conservação do momento, o momento total do positrônio será igual ao momento do fóton  $p_f = 5,1 \text{ eV}/c$ . Como  $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ , segue que

$$P = (2m_e) \cdot v = p_f \Rightarrow v = \frac{p_f}{2m_e} = \frac{5,1}{2 \cdot (5,11) \times 10^5} c = 5 \times 10^{-6} c = 1500 \text{ m/s}.$$

Q4. (a) A matriz que representa o hamiltoniano  $H$  na base descrita é

$$H = \begin{pmatrix} \Omega & 0 & \Omega \\ 0 & \Omega & \Delta \\ \Omega & \Delta & \Omega \end{pmatrix}.$$

(b) A matriz do operador  $D$  é diagonal com todos os elementos da diagonal iguais a  $\delta$ , ou seja, é proporcional à matriz unidade. Portanto, ela comuta com a matriz de  $H$ . Segue que  $D$  e a energia podem ser medidos simultaneamente.

(c) Para acharmos os auto-valores, precisamos resolver a equação secular

$$\begin{vmatrix} \Omega - \lambda & 0 & \Omega \\ 0 & \Omega - \lambda & \Delta \\ \Omega & \Delta & \Omega - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\Omega - \lambda)^3 - (\Omega - \lambda)(\Omega^2 + \Delta^2) = 0.$$

Os auto-valores são

$$\lambda_1 = \Omega, \quad \lambda_2 = \Omega + \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}, \quad \lambda_3 = \Omega - \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}.$$

Levando-se cada auto-valor  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) no sistema homogêneo de equações lineares

$$\begin{pmatrix} \Omega - \lambda_i & 0 & \Omega \\ 0 & \Omega - \lambda_i & \Delta \\ \Omega & \Delta & \Omega - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e resolvendo para  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ , obtemos, após normalização

$$\begin{aligned} |\lambda_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}} (\Delta|1\rangle - \Omega|2\rangle), \\ |\lambda_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\Omega|1\rangle + \Delta|2\rangle}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}} + |3\rangle \right], \\ |\lambda_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\Omega|1\rangle + \Delta|2\rangle}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}} - |3\rangle \right]. \end{aligned}$$

(d) O estado inicial  $|\psi(t=0)\rangle$  é exatamente o auto-estado de energia  $|\lambda_1\rangle$ . Portanto, para  $t > 0$ , o sistema permanecerá nesse estado, a menos de uma fase

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\Omega t/\hbar} |\lambda_1\rangle = \frac{e^{-i\Omega t/\hbar}}{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}} (\Delta|1\rangle - \Omega|2\rangle).$$

Q5. (a) Como o processo é isotérmico  $P_i V_i = P_f V_f$ . Como  $V = AL$ , onde  $A$  é a área transversal do tubo,

$$P_f = \frac{V_i}{V_f} P_i = \frac{L_i}{L_f} P_i = \frac{5,0}{4,5} 1,0 \times 10^5 = 1,1 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

(b) O trabalho isotérmico é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_i}^{V_f} P dV = nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right) = P_i V_i \ln \left( \frac{L_f}{L_i} \right) \\ &= 1,0 \times 10^5 \times 1,0 \times 10^{-4} \ln \left( \frac{4,5}{5,0} \right) = 10 \ln(0,9) \text{ J} = -1,1 \text{ J}. \end{aligned}$$

Esse é o trabalho realizado pelo gás. O trabalho realizado sobre o gás é 1,1 J.

(c) Como o processo é isotérmico,  $\Delta U = Q - W = 0$ . Portanto

$$Q = W = -1,1 \text{ J}.$$

O sinal negativo indica que 1,1 J de calor é transferido do gás para o ambiente.

(d) A pressão é a mesma a uma mesma altura nos dois lados do tubo. Do lado esquerdo, a pressão no ar comprimido  $P_f$  relaciona-se com a pressão **na altura final** do êmbolo  $P_{\text{emb}}$  por

$$P_{\text{emb}} = P_f + \rho_{H_2O} g [2(L_i - L_f)].$$

Do lado direito, a pressão na parte superior do líquido X,  $P_i$ , relaciona-se com a mesma  $P_{\text{emb}}$  por

$$P_{\text{emb}} = P_i + \rho_X g H.$$

Eliminado  $P_{\text{emb}}$ ,

$$\rho_X = \frac{1}{H} \left\{ \frac{P_f - P_i}{g} + 2\rho_{H_2O}(L_i - L_f) \right\} = 2,4 \times 10^4 \text{ kg/m}^3.$$

**EU**F

**Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2018

Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. (a) As diferenças de potenciais nas extremidades do resistor de resistência  $R_1$  e do capacitor são sempre iguais, donde pode-se escrever que  $q = R_1 C_1 I_1$ , onde  $q$  é a carga no capacitor e  $I_i$  é a corrente no resistor de resistência  $R_i$ . Como a carga inicial no capacitor é nula,  $I_1(0) = 0$ . Após um longo tempo, o capacitor está completamente carregado e a corrente só passa pelos dois resistores e não pelo ramo do capacitor. A aplicação simples da lei de Ohm leva a

$$I_1(\infty) = \frac{V}{R_1 + R_2},$$

onde  $\infty$  aqui quer dizer “após um longo tempo”.

Alternativamente, usando as leis dos circuitos (Kirchhoff)

$$V = R_2 I_2 + R_1 I_1, \quad (7)$$

$$I_2 = I_1 + I_C, \quad (8)$$

$$R_1 I_1 = \frac{q}{C_1}, \quad (9)$$

onde  $I_C = \dot{q}$  é a corrente pelo capacitor. Derivando a Eq. (9) em relação ao tempo e levando-a, juntamente com a Eq. (8), na Eq. (7), temos

$$V = R_2 (I_1 + R_1 C_1 \dot{I}_1) + R_1 I_1 \Rightarrow V = R I_1 + R_1 R_2 C_1 \dot{I}_1,$$

onde  $R = R_1 + R_2$ . Essa equação pode ser resolvida para  $I_1$  dando

$$I_1(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-\alpha t}),$$

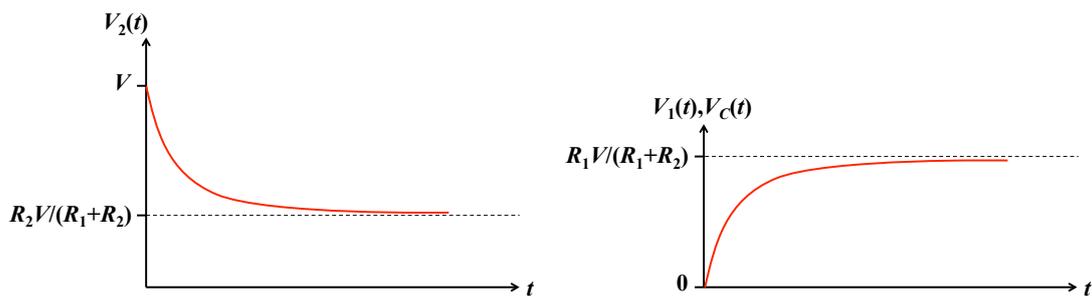
onde  $\alpha = R/(R_1 R_2 C_1)$  e usamos a condição inicial advinda da Eq. (9)  $q(0) = 0 \Rightarrow I_1(0) = 0$ . Segue que

$$I_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad I_1(\infty) = \frac{V}{R_1 + R_2}.$$

(b) Após um longo tempo

$$q(\infty) = R_1 C_1 I_1(\infty) = \frac{R_1 C_1 V}{R_1 + R_2}.$$

(c) A diferencial de potencial em  $R_i$  é  $V_i(t)$  e no capacitor é  $V_C(t)$ , como esboçado na figura abaixo



(d) Quando a chave  $S_1$  é desligada, temos apenas um circuito RC formado por  $R_1$  e  $C_1$ , cuja dinâmica é regida por

$$q = R_1 C_1 I_1 \quad \text{e} \quad \dot{q} = I_1 \Rightarrow q = R_1 C_1 \dot{q} \Rightarrow q(t) = q(t_d) e^{-(t-t_d)/(R_1 C_1)}.$$

A carga no capacitor cairá a  $1/e$  de seu valor em  $t_d$  após decorrer um tempo

$$\Delta t = R_1 C_1,$$

do fechamento da chave  $S_1$ .

Q7. (a) Considere um cabo longo de comprimento  $h$  e despreze efeitos de borda. Por simetria, o campo elétrico no dielétrico aponta na direção  $\hat{\rho}$ , considerando coordenadas cilíndricas com eixo  $z$  ao longo do eixo do cabo. Tomando uma superfície gaussiana cilíndrica com eixo ao longo de  $z$ , comprimento  $h$  e raio  $\rho \in (a, b)$  e aplicando a lei de Gauss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\rho} dA = \oint_S E dA = E 2\pi\rho h = \frac{q}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon\rho h}.$$

A diferença de potencial entre os condutores interno e externo é

$$\Delta V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \hat{\rho} d\rho = \int_a^b E d\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon h} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{q}{2\pi\epsilon h} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

A capacitância  $C$  do cabo coaxial é dada por

$$C = q \frac{1}{\Delta V} = q \frac{2\pi\epsilon h}{q \ln(b/a)} = \frac{2\pi\epsilon h}{\ln(b/a)}.$$

A capacitância por unidade de comprimento é, portanto,

$$\frac{C}{h} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}.$$

(b) Por simetria, o campo magnético  $\mathbf{B}$  tem a direção de  $\hat{\varphi}$ . Aplicando a lei de Ampère a um circuito circular com eixo de simetria ao longo de  $z$  e raio  $\rho \in (a, b)$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \hat{\varphi} dl = \oint_C B dl = B 2\pi\rho = \mu I \Rightarrow B = \frac{\mu I}{2\pi\rho},$$

onde  $I$  é a corrente total que passa pelo condutor interno. A energia armazenada no cabo é

$$U = \int \frac{1}{2\mu} B^2 dV = \frac{\mu I^2 h}{8\pi^2} \int_a^b \frac{2\pi\rho}{\rho^2} d\rho = \frac{\mu I^2 h}{4\pi} \ln(b/a).$$

Igualando o resultado a  $LI^2/2$ , obtemos

$$L = \frac{\mu h}{2\pi} \ln(b/a),$$

e a auto-indutância por unidade de comprimento é

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Alternativamente, o fluxo de campo magnético no dielétrico será

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\varphi} dA = \frac{\mu I}{2\pi} h \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Usando que

$$L = \frac{d\Phi}{dI},$$

obtemos

$$L = \frac{\mu h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

e a auto-indutância segue como antes.

Q8. (a) Da lei de deslocamento de Wien  $\lambda_{\max}T = W$  onde  $W = 2,898 \times 10^{-3}$  m-K obtemos, para  $T = 2,9$  K,  $\lambda_{\max} = W/T \approx 10^{-3}$  m ou 1 mm.

(b) Para um fóton de comprimento de onda  $\lambda_{\max} = 10^{-3}$  m, a frequência é  $\nu = c/\lambda_{\max} = 3 \times 10^8/10^{-3} = 3 \times 10^{11}$  Hz e a energia é  $E = h\nu = 4,14 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^{11} = 1,2 \times 10^{-4}$  eV.

(c) Se  $E_e^f$  é a energia do elétron após a colisão, a conservação de energia e momento relativísticos nos dá

$$\begin{aligned} E_i + E_e^i &= E_e^f + E_f \Rightarrow E_e^f = E_e^i - (E_f - E_i), \\ p_i - p_e^i &= p_e^f - p_f \Rightarrow p_e^f \cdot c = p_i \cdot c + p_f \cdot c - p_e^i \cdot c. \end{aligned}$$

Elevando as duas equações ao quadrado e substituindo  $(p_e^f c)^2 = (E_e^f)^2 - (m_e c^2)^2$ ,  $p_i \cdot c = E_i$  e  $p_f \cdot c = E_f$  na segunda equação, temos

$$\begin{aligned} (E_e^i)^2 + (E_f)^2 + (E_i)^2 - 2E_i E_f - 2E_e^i E_f + 2E_e^i E_i = \\ (E_f)^2 + (E_i)^2 + (p_e^i c)^2 + (m_e c^2)^2 - 2E_i (p_e^i c) + 2E_i E_f - 2E_f (p_e^i c). \end{aligned}$$

Após alguns cancelamentos e isolando  $E_f$ , obtemos

$$E_f = E_i \frac{E_e^i + p_e^i c}{2E_i + E_e^i - p_e^i c}.$$

Substituindo  $E_e^i = \gamma m_e c^2$  e  $p_e^i c = (\sqrt{\gamma^2 - 1}) m_e c^2$ , temos o resultado final

$$E_f = E_i \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\left(\frac{2E_i}{m_e c^2} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)}.$$

(d) Como  $E_e^i = 250$  MeV e  $m_e c^2 \approx 0,5$  MeV, temos  $\gamma = 500$ . Usando  $\sqrt{\gamma^2 - 1} = \gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx \gamma - \frac{1}{2\gamma}$ , temos

$$E_f \approx E_i \frac{2\gamma - \frac{1}{2\gamma}}{\frac{2E_i}{m_e c^2} + \frac{1}{2\gamma}}.$$

Do item (b), temos  $E_i = 1,242 \times 10^{-3}$  eV de modo que  $E_i/m_e c^2 \sim 10^{-9} \ll \frac{1}{2\gamma} = 10^{-3}$ . Logo

$$E_f \approx E_i \frac{2\gamma - \frac{1}{2\gamma}}{\frac{1}{2\gamma}} \approx 4\gamma^2 E_i.$$

Substituindo

$$E_f = 4.(500)^2.(1,24 \times 10^{-3}) = 1,2 \text{ keV}.$$

Q9. (a) A equação de Schrödinger independente do tempo (ESIT) para  $x < 0$  e  $x > a$  é da forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V_0 \psi(x) = E \psi(x),$$

enquanto que para  $0 < x < a$  ela é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \psi(x).$$

A forma geral das soluções  $\psi_1(x)$  (região 1:  $x < 0$ ),  $\psi_2(x)$  (região 2:  $0 < x < a$ ) e  $\psi_3(x)$  (região 3:  $x > a$ ) para  $E < V_0$  é

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A e^{k_I x}, & k_I &= \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar, \\ \psi_2(x) &= C e^{ikx} + D e^{-ikx}, & k &= \sqrt{2mE}/\hbar, \\ \psi_3(x) &= B e^{-k_I x}, \end{aligned}$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $D$  são constantes complexas a serem determinadas.

(b) A ESIT é uma equação diferencial linear de segunda ordem. Logo, para um potencial contínuo por partes não infinito, a função de onda e sua primeira derivada são sempre contínuas. Nas descontinuidades do potencial em  $x = 0$  e  $x = a$  isso nos dá

$$\begin{aligned} \psi(0^-) &= \psi(0^+), & \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{0^-} &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{0^+}, \\ \psi(a^-) &= \psi(a^+), & \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{a^-} &= \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{a^+}, \end{aligned}$$

onde  $x^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x \pm \epsilon)$ .

(c) A probabilidade de encontrar a partícula no intervalo é

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi_3(x)|^2 dx,$$

que é não nula, já que  $\psi_3(x)$  é não nula no intervalo.

(d) Não. Como se trata de um estado ligado no poço ( $E < V_0$ ), os valores permitidos para a energia  $E$  são quantizados/discretos. Numa medida de energia total apenas um dos valores permitidos pode ser obtido. Alternativamente, temos 5 incógnitas ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e a energia  $E$ ) e 5 equações a serem satisfeitas: as 4 condições de contorno do item (b) e a normalização da função de onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Apenas valores discretos/quantizados de  $E$  poderão ser obtidos desse sistema e o resto segue como acima.

(e) No caso do poço infinito, apenas as condições de contorno sobre a função de onda (e não aquelas sobre sua derivada) devem ser impostas. Além disso,  $\psi_1(x) = \psi_3(x) = 0$  para todo  $x < 0$  e  $x > a$ , respectivamente. Logo

$$\begin{aligned} \psi_2(0) &= 0 \Rightarrow C = -D, \\ \psi_2(a) &= 0 \Rightarrow C (e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iC \sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

donde pode-se usar a relação entre  $k$  e  $E$  do item (a) para obter  $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma}$ .

Q10. (a) A função de partição do sistema por partícula é  $Z = \zeta^N$ , onde

$$\zeta = 1 + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}.$$

A energia livre de Helmholtz é

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln(1 + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}).$$

(b) A energia interna é dada por

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = -N \frac{\partial}{\partial\beta} \ln(1 + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}).$$

A energia interna por partícula é obtida tomando a derivada

$$u = \frac{U}{N} = \left( \frac{4e^{-2\beta\varepsilon} + 3e^{-3\beta\varepsilon}}{1 + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}} \right) \varepsilon$$

(c) A entropia é dada por

$$S = \frac{U - F}{T} = k_B N \left( \frac{4e^{-2\beta\varepsilon} + 3e^{-3\beta\varepsilon}}{1 + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}} \right) \beta\varepsilon + k_B N \ln(1 + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}).$$

(d) No primeiro caso  $\beta\varepsilon \rightarrow \infty$  e, como exponenciais decaem mais rapidamente que qualquer polinômio,

$$s = \frac{S}{N} = k_B \ln 1 = 0.$$

Por outro lado, quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\beta\varepsilon \rightarrow 0$ , logo

$$s = \frac{S}{N} = k_B \ln(1 + 2 + 1) = k_B \ln 4.$$

O primeiro resultado é o que dita o postulado de Nernst ou terceira lei da termodinâmica, que diz que a entropia deve se anular quando  $T \rightarrow 0$ . Por outro lado, o segundo resultado nos diz que a entropia (em unidades de  $k_B$ ) tende ao logaritmo do número de estados quânticos possíveis, pois todos os estados são igualmente prováveis quando  $T \rightarrow \infty$ . De fato, nesse limite,  $S = k_B \ln 4^N$ .