

**EUUF**

**Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2019

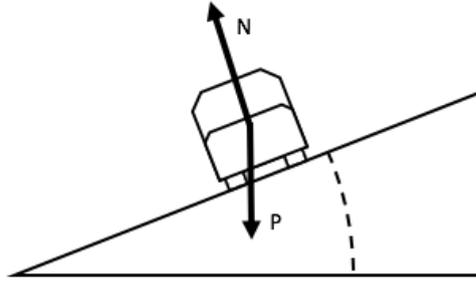
Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As forças que atuam no carro são a normal  $\mathbf{N}$  e o peso  $\mathbf{P}$ , como mostrado na figura abaixo.



(b) Tomando um sistema de referência fixo na pista e com origem na posição instantânea do carro com o eixo  $z$  na direção vertical, teremos equilíbrio na direção  $z$

$$N \cos \theta = mg, \quad (1)$$

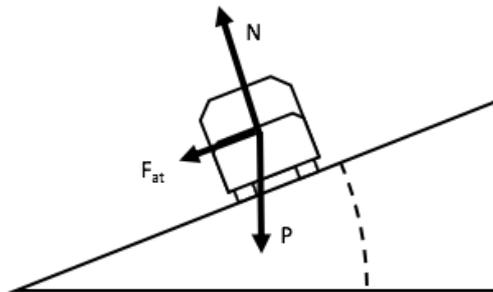
onde  $m$  é a massa do carro. No plano  $xy$  o carro realiza um movimento circular uniforme com velocidade  $v$  cuja resultante centrípeta é

$$N \sin \theta = \frac{mv^2}{R}. \quad (2)$$

Eliminando  $N$  das Eqs. (1) e (2),

$$v = \sqrt{gR \tan \theta}$$

(c) Se  $\mathbf{F}_{at}$  é a força de atrito, o diagrama de forças agora é



(d) Usando o mesmo sistema de referência do item (b), ainda há equilíbrio na direção  $z$

$$N \cos \theta = mg + F_{at} \sin \theta = mg + \mu N \sin \theta, \quad (3)$$

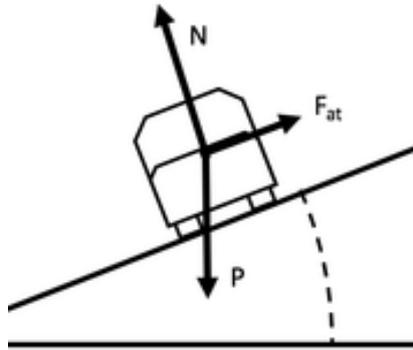
onde já usamos que, no limiar da derrapagem, a força de atrito estático  $F_{at}$  atinge seu valor máximo,  $\mu N$ . A resultante centrípeta no plano  $xy$  agora é

$$N \sin \theta + F_{at} \cos \theta = N \sin \theta + \mu N \cos \theta = \frac{mv_{max}^2}{R}, \quad (4)$$

onde  $v_{max}$  é a velocidade máxima sem derrapar. Eliminando novamente  $N$  das Eqs. (3) e (4),

$$v_{max} = \sqrt{gR \left( \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta} \right)}.$$

(e) Nesse caso, o sentido da força de atrito se inverte



O desenvolvimento do item (d) se repete bastando inverter o sinal de  $\mu \rightarrow -\mu$  e a velocidade mínima sem derrapar  $v_{min}$  é

$$v_{min} = \sqrt{gR \left( \frac{\tan \theta - \mu}{1 + \mu \tan \theta} \right)}.$$

Note que o enunciado diz que  $\tan \theta > \mu$ , o que garante que o resultado obtido é um número real. Do contrário, o carro consegue ficar em repouso na pista, pois o ângulo é menor que o ângulo crítico  $\theta_c = \arctan(\mu)$  e  $v_{min} = 0$ .

Q2. (a) Suponha um sistema de referência tal que o plano  $xy$  contenha o movimento do pêndulo, que sua origem esteja no ponto de sustentação do pêndulo e que o eixo  $y$  seja vertical para cima. As relações entre as coordenadas cartesianas do corpo e  $r$  e  $\theta$  são

$$x = (l + r) \sin \theta \quad \text{e} \quad y = -(l + r) \cos \theta.$$

A energia cinética assume a forma

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r + l)^2\dot{\theta}^2).$$

(b) A energia potencial do sistema está associada à mola,  $U_{mola}$ , e ao campo gravitacional  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$ ,  $U_g$ . Como o comprimento de equilíbrio da mola é igual a  $l$

$$U_{mola} = \frac{1}{2}kr^2$$

$$U_g = mgy = -mg(r + l) \cos \theta.$$

Dessa forma,

$$U = U_{mola} + U_g = \frac{1}{2}kr^2 - mg(r + l) \cos \theta.$$

(c) Utilizando os resultados dos itens (a) e (b) a lagrangiana da partícula é dada por

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r + l)^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2 + mg(r + l) \cos \theta. \end{aligned}$$

(d) Primeiramente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= m(r + l)\dot{\theta}^2 - kr + mg \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mg(r + l) \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m(r + l)^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

As Eqs. de Euler-Lagrange são

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{r} - (r + l)\dot{\theta}^2 - g \cos \theta + \frac{k}{m}r = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad (r + l)\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0. \quad (6)$$

(e) A equação de movimento (5) para  $\theta = \dot{\theta} = 0$  assume a forma

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}r = g. \quad (7)$$

A solução geral da Eq. (7) é dada por

$$r(t) = r_H(t) + r_P(t),$$

onde  $r_H(t)$  é a solução geral da equação homogênea (ou seja, fazendo  $g = 0$  na Eq. (7)) e  $r_P(t)$  é uma solução particular qualquer da equação não homogênea. Como a equação homogênea é igual à equação de movimento do oscilador harmônico simples, temos que

$$r_H(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

onde  $\omega = \sqrt{k/m}$  e  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias determinadas a partir das condições iniciais. Como o termo não homogêneo é constante, tentamos uma solução da forma

$$r_P(t) = Ct^2 + Dt + E.$$

Substituindo na Eq. (7), verifica-se que as constantes  $C = D = 0$  e  $E = g/\omega^2 = mg/k$ . Assim,

$$r_P(t) = \frac{g}{\omega^2} = \frac{mg}{k}.$$

Por fim, a solução geral da Eq. (7) é dada por

$$r(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{mg}{k}.$$

- Q3. (a) Segundo a física não relativística, o tempo gasto pelos múons para percorrer os 2.940 m do topo da montanha até o nível do mar (distância medida no referencial de  $D_2$ ) é

$$t = \frac{2,94 \times 10^3}{0,98 \times 3,0 \times 10^8} = 1,0 \times 10^{-5} \text{ s} = 10 \text{ } \mu\text{s}.$$

Desta forma, segundo o cálculo não relativístico, o número de múons detectados ao nível do mar seria

$$N_{n-rel}(t = 10 \text{ } \mu\text{s}) = 1,5 \times 10^3 e^{(-10/2,0)} \approx 10.$$

(b) O enunciado informa que a contagem medida é ordens de grandeza maior do que o esperado segundo a física não relativística. A razão da discrepância é o fato de que os múons detectados são partículas relativísticas ( $v \approx c$ ) e efeitos relativísticos devem ser levados em conta, como a dilatação temporal e/ou a contração dos comprimentos.

(c) (i) Tratando agora o sistema relativisticamente, o tempo de vida dos múons, no sistema de referência de  $D_2$ , não é  $\tau = 2,0 \text{ } \mu\text{s}$ , mas sim  $\tau_{D_2} = \gamma\tau$ , com  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , devido ao efeito de dilatação do tempo. Para o grupo de múons relevantes para o experimento,  $\gamma \approx 5,0$  e  $\tau_{D_2} \approx 10 \text{ } \mu\text{s}$ . Portanto,

$$N(t = 10 \text{ } \mu\text{s}) = 1,5 \times 10^3 e^{(-10/10)} \approx 5,5 \times 10^2,$$

contagem que, de fato, é 2 ordens de grandeza maior do que aquela prevista pela física não relativística.

(ii) Do ponto de vista de um observador que viaja junto com os múons, o que ocorre é que ele não mede uma distância percorrida de  $d = 2,94 \times 10^3 \text{ m}$ , mas sim uma distância  $d' = d/\gamma \approx 5,9 \times 10^2 \text{ m}$ , pela contração dos comprimentos. Desta forma, o tempo gasto pelos múons para percorrer esta distância será

$$t' = \frac{d'}{v} = \frac{5,9 \times 10^2}{0,98 \times 3,0 \times 10^8} = 2,0 \text{ } \mu\text{s}.$$

Logo,

$$N'(t = 2,0 \text{ } \mu\text{s}) = 1,5 \times 10^3 e^{(-2,0/2,0)} \approx 5,5 \times 10^2.$$

Um observador viajando com os múons medirá uma contagem dos mesmos  $5,5 \times 10^2$  múons medidos por um observador do grupo de físicos, no nível do mar.

(d) A resposta será igual. Isto é de se esperar, porque números de objetos são invariantes relativísticos.

Q4. (a) Dado que  $|\psi(x,t)|^2 dx$  representa a probabilidade de se encontrar a partícula no intervalo entre  $x$  e  $x + dx$ , tem-se que  $|\psi(x,t)|^2$  deve ter dimensão de inverso de comprimento  $[L^{-1}]$  (i.e.,  $|\psi(x,t)|^2$  é uma densidade de probabilidade linear). Como o termo  $(x^2 - \hbar/4am)$  tem unidade de comprimento ao quadrado  $[L^2]$ , chega-se à conclusão de que a constante  $C$  tem unidade de inverso do comprimento elevado a cinco meios  $[L^{-5/2}]$ .

(b) A função de onda representa um autoestado de energia se  $H\psi(x,t) = i\hbar\partial_t\psi(x,t) = E\psi(x,t)$ , onde  $H$  é o Hamiltoniano do sistema e  $E$  é uma constante, que representa o autovalor de energia do autoestado. De fato,  $i\hbar\partial_t\psi(x,t) = 5\hbar a\psi(x,t)$  e obtém-se imediatamente que o autovalor de energia correspondente é  $5\hbar a$ .

(c) O desvio padrão de um observável é definido como  $\Delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$ , onde  $\langle \hat{O} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x',t) O(x,x') \psi(x,t) dx dx'$ . Assim,

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) x \psi(x,t) dx = 0, \\ \langle \hat{p} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x,t) dx \\ &= \left( \frac{\hbar}{i} \right) C^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( x^2 - \frac{\hbar}{4am} \right) - \frac{am}{\hbar} \left( x^2 - \frac{\hbar}{4am} \right)^2 \right] 2xe^{-2amx^2/\hbar} dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto, utilizando os dados do enunciado obtém-se que  $\Delta x \Delta p = 5\hbar/2$ . Isso está em concordância com o princípio da incerteza, que determina que  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

(d) A dinâmica da partícula é determinada pela equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x,t) \psi(x,t),$$

onde  $V(x,t)$  representa o potencial da partícula. Como  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = 5\hbar a \psi(x,t)$  e  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{2am}{\hbar} \right)^2 x^2 - \frac{10am}{\hbar} \right] \psi(x,t)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} V(x,t) \psi(x,t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) = 2a^2 m x^2 \psi(x,t) \\ \implies V(x) &= \frac{m\omega^2}{2} x^2, \text{ onde } \omega \equiv 2a. \end{aligned}$$

Q5. (a) A partir da equação dos gases ideais,  $PV = nRT$ , com  $n = 1$  mol, temos

$$\begin{aligned} P_A V_A = RT_A &\Rightarrow T_A = \frac{P_i V_i}{R}, \\ P_B V_B = RT_B &\Rightarrow T_B = \frac{P_i V_i}{4R}, \\ P_C V_C = RT_C &\Rightarrow T_C = \frac{P_i V_i}{16R}. \end{aligned}$$

(b) Como a energia interna do gás é uma função de estado, sua variação ao longo de um ciclo é nula. Por outro lado, essa variação é a soma do trabalho líquido  $W_{\text{ciclo}}$  realizado pela vizinhança sobre o gás com a transferência líquida  $Q_{\text{ciclo}}$  de energia na forma de calor da vizinhança para o gás. Portanto,

$$Q_{\text{ciclo}} = -W_{\text{ciclo}},$$

O trabalho líquido  $-W_{\text{ciclo}}$  é igual à área delimitada pelo gráfico do ciclo. Logo,

$$Q_{\text{ciclo}} = \frac{1}{2} (P_A - P_C) (V_B - V_A) \Rightarrow Q_{\text{ciclo}} = \frac{45}{32} P_i V_i.$$

(c) Como se trata de um mol de gás ideal monoatômico, fazendo uso da primeira lei da termodinâmica,

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB},$$

com

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} R (T_B - T_A) = -\frac{9}{8} P_i V_i$$

e

$$W_{AB} = - \int_{A \rightarrow B} P dV = -\frac{1}{2} (P_B + P_A) (V_B - V_A) = -\frac{51}{32} P_i V_i,$$

obtemos o calor transferido da vizinhança ao gás no processo como sendo

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB} = \left( \frac{51}{32} - \frac{9}{8} \right) P_i V_i \Rightarrow Q_{AB} = \frac{15}{32} P_i V_i > 0.$$

(d) Como a entropia do gás é função de estado, sua variação entre os pontos A e B pode ser calculada ao longo de qualquer caminho que os conecte. Vamos efetuar o cálculo ao longo da combinação dos trechos retilíneos AC e CB. No primeiro trecho, correspondente a uma transformação isovolumétrica, temos

$$\Delta S_{AC} = \int_{A \rightarrow C} \frac{dQ}{T} = \int_{T_A}^{T_C} \frac{C_V dT}{T} = \frac{3}{2} R \ln \frac{T_C}{T_A} = -\frac{3}{2} R \ln(16),$$

em que  $C_V = (3/2) R$  é a capacidade térmica a volume constante de um mol de gás ideal monoatômico. No segundo trecho, correspondente a uma transformação isobárica, temos

$$\Delta S_{CB} = \int_{C \rightarrow B} \frac{dQ}{T} = \int_{T_C}^{T_B} \frac{C_P dT}{T} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_B}{T_C} = \frac{5}{2} R \ln(4),$$

em que  $C_P = (5/2) R$  é a capacidade térmica a pressão constante de um mol de gás ideal monoatômico. Combinando esses dois resultados, obtemos

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = \frac{5}{2} R \ln(4) - \frac{3}{2} R \ln(16)$$

$$\Delta S_{AB} = -R \ln(2) < 0.$$

**EUF**

**Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2019

Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. (a) O problema se resume a resolver a equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

No nosso caso a simetria do problema dita que  $V(\mathbf{r}) = V(z)$ . Portanto,

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon} e^{-\alpha z}. \quad (8)$$

Integrando a Eq. (8) uma vez em  $z$  teremos

$$\frac{dV}{dz} = B + \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha} e^{-\alpha z}. \quad (9)$$

Integrando agora a Eq. (9) uma vez em  $z$  teremos finalmente

$$V(z) = A + Bz - \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} e^{-\alpha z},$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração.

(b) Impondo as condições de contorno,

$$V(z=0) = 0 \Rightarrow 0 = A - \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} \Rightarrow A = \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2}.$$

$$V(z=d) = V_0 \Rightarrow V_0 = A + Bd - \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} e^{-\alpha d} \Rightarrow B = \frac{1}{d} \left[ V_0 + \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} (e^{-\alpha d} - 1) \right].$$

(c) Do item (b), o potencial é dado por

$$V(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} + \frac{1}{d} \left[ V_0 + \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} (e^{-\alpha d} - 1) \right] z - \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} e^{-\alpha z}.$$

Temos que

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{dV}{dz} \hat{\mathbf{z}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\left\{ \frac{1}{d} \left[ V_0 - \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} (1 - e^{-\alpha d}) \right] + \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} \alpha e^{-\alpha z} \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{d} \left[ \frac{\rho_0}{\epsilon\alpha^2} (1 - e^{-\alpha d} - \alpha d e^{-\alpha z}) - V_0 \right] \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Q7. (a) A lei de Biot-Savart é

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Tomando um sistema de referência tal que  $d\mathbf{l}' = dx' \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{r} = R \hat{\mathbf{y}}$ ,

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{R dx' \hat{\mathbf{z}}}{(R^2 + x'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R}{2\pi} \int_0^{L/2} \frac{dx'}{(R^2 + x'^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

Usando a integral fornecida no formulário

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

Portanto,

$$B(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}. \quad (10)$$

(b) A Eq. (10) no limite  $R \ll L$  torna-se

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}.$$

Este é o módulo do campo magnético gerado por um fio infinito, como obtido facilmente pela aplicação direta da lei de Ampère.

(c) A espira quadrada é formada pela junção de 4 segmentos de fio de comprimento  $L$ . Como as contribuições de cada segmento são vetorialmente idênticas, o campo no centro da espira será simplesmente a soma das contribuições individuais de cada segmento. O módulo resultante é, portanto,

$$B = 4 \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}} \Big|_{R=L/2} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 i}{\pi L}.$$

(d) O campo magnético gerado por um fio longo infinito, transportando uma corrente  $i'$ , em uma distância  $r'$  do fio, é dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i'}{2\pi r'} \hat{\mathbf{z}}$$

O fluxo de campo magnético  $\Phi_B$  através da superfície da espira é dado por

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da,$$

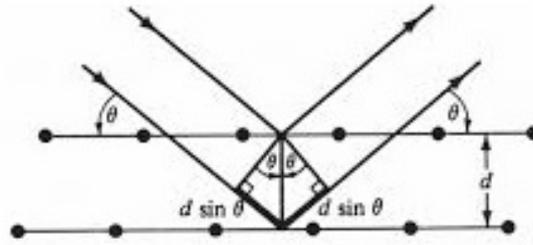
onde  $da = dxdy$  e  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ , logo,

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mu_0 i'}{2\pi r'} = \frac{\mu_0 i'}{2\pi y}.$$

Portanto,

$$\Phi_B = \int_S \frac{\mu_0 i'}{2\pi y} dxdy = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{D-L/2}^{D+L/2} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i'}{2\pi} L \ln \left( \frac{2D+L}{2D-L} \right).$$

Q8. (a)



Da geometria do diagrama acima, a diferença de caminho óptico entre os raios refletidos nos planos superior e inferior é  $2d \sin \theta$ . A condição de interferência construtiva entre os raios é obtida impondo que a diferença de caminho óptico seja um múltiplo inteiro  $n$  do comprimento de onda:  $n\lambda = 2d \sin \theta$ .

(b) O comprimento de onda da onda de matéria associada aos nêutrons é

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{hc}{\sqrt{2Kmc^2}} = \frac{1.240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2 \times 1,9 \times 9,4 \times 10^8 \text{ eV}^2}} = 0,21 \text{ \AA}.$$

O maior ângulo de reflexão de Bragg que pode ocorrer é de  $\theta = \pi/2$ , para o qual  $2d \sin(\pi/2) = n\lambda$  e  $n = 2d/\lambda$ . Usando o valor de  $d$  fornecido obtemos  $n = 10,5$ . Como  $n$  deve ser um inteiro, a mais alta ordem observada é a décima ( $n = 10$ ).

(c) A dispersão de velocidades dos nêutrons se traduz em uma dispersão de comprimentos de onda de de Broglie presentes no feixe de partículas. Assim, para um determinado ângulo de incidência do feixe de partículas, haverá um intervalo de ângulos de reflexão  $\varphi$  para cada ordem  $n$  de reflexão. Fixando-se um filtro espacial (uma fenda, por exemplo) em torno de um ângulo de detecção bem definido  $\varphi_{det}$ , estaremos deixando passar pelo aparato apenas os nêutrons cuja velocidade esteja relacionada com o comprimento de onda de de Broglie que satisfaz à condição  $n\lambda = 2d \sin \varphi_{det}$ , selecionando assim uma certa velocidade.

(d) A velocidade de fase pode ser escrita como

$$v_f = \lambda\nu = \frac{\lambda E}{h} = \frac{\lambda}{h} \sqrt{p^2 c^2 + (E_n^0)^2} = \frac{\lambda}{h} \sqrt{\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + (E_n^0)^2} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda E_n^0}{hc}\right)^2} > c,$$

onde usamos  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = p^2 c^2 + (E_n^0)^2$ . Por outro lado, a velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\nu}{d(\lambda^{-1})} = \frac{1}{h} \frac{dE}{d(\lambda^{-1})} = \frac{1}{h} \frac{d}{d(\lambda^{-1})} \sqrt{\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + (E_n^0)^2},$$

onde a última expressão para a energia total relativística foi obtida no cálculo de  $v_f$ . Tomando a derivada

$$v_g = \frac{1}{h} \frac{h^2 c^2}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + (E_n^0)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda E_n^0}{hc}\right)^2}} < c.$$

Conclui-se que  $v_f v_g = c^2$ . Uma partícula pode ser descrita na física quântica associando-a a um pacote de ondas formado pela superposição infinita de ondas planas, cada qual se movendo com uma velocidade  $v_f$ , que pode ser maior do que  $c$ . O pacote de ondas se move com velocidade  $v_g$ . Como é o pacote de ondas (e não as ondas planas que o formam) que carrega informação, sua velocidade não pode exceder a velocidade da luz, como de fato encontramos.

Q9. (a) Dado que  $[\hat{x}, \hat{x}] = [\hat{p}_x, \hat{p}_x] = 0$  e  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ , tem-se que  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -\frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}_x] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}_x, \hat{x}] = \hat{1}$ .  
Escrevendo  $\hat{x}$  e  $\hat{p}_x$  em termos de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \text{ e } \hat{p}_x = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = -\left(\frac{\hbar\omega}{4}\right)(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}) + \left(\frac{\hbar\omega}{4}\right)(\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}{2}) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

A ação do operador  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  no autoestado de energia  $|n\rangle$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger(\sqrt{n}|n-1\rangle) = n|n\rangle$$

mostra que ele conta o número de excitações presentes no autoestado de energia, sendo esta a razão pela qual  $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$  é denominado operador número.

(b) Este problema pode ser visto como o de dois osciladores harmônicos desacoplados, uma vez que não há interação entre os graus de liberdade associados às direções  $x$  e  $y$ . Portanto, a base produto dos autoestados de energia dos osciladores  $|n_x, n_y\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle$  é uma base de autoestados de energia do sistema bidimensional. Em termos dos operadores não hermitianos, o hamiltoniano tem a forma

$$\hat{H}_2 = \sum_{\alpha=x,y} \hbar\omega_\alpha(\hat{a}_\alpha^\dagger\hat{a}_\alpha + 1/2),$$

cujos autovalores são  $E_{n_x, n_y} = \hbar\omega_x(n_x + 1/2) + \hbar\omega_y(n_y + 1/2)$ , com  $n_\alpha = 0, 1, \dots$  sendo  $\alpha = x, y$ .

(c) Como o Hamiltoniano é independente do tempo, a evolução temporal de  $|\psi\rangle$ , a menos de uma fase global, será

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} [e^{-it(2\omega_x)}|n_x = 2, n_y = 0\rangle + 2e^{-it(\omega_x + \omega_y)}|n_x = 1, n_y = 1\rangle].$$

Ao medir a energia total no instante  $t'$ , o estado do sistema será projetado em um dos seguinte possíveis autoestados de energia: (1)  $|n_x = 2, n_y = 0\rangle$ , com probabilidade  $1/5$  ou (2)  $|n_x = 1, n_y = 1\rangle$ , com probabilidade  $4/5$ . Dado que

$$\hat{p}_x^2 = m\hbar\omega_x(\hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x - \hat{a}_x^{\dagger 2} - \hat{a}_x^2)/2,$$

tem-se que o seu valor esperado para o estado  $|n_x, n_y\rangle$  é dado por  $\langle p_x^2 \rangle = m\hbar\omega_x(n_x + 1/2)$ . Portanto, conclui-se que a probabilidade de se obter  $\langle p_x^2 \rangle = 5m\hbar\omega_x/2$  após a medição é  $1/5$ .

(d) Para o caso isotrópico, os autovalores de energia são dados por  $E_{n_x, n_y} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$ . Conseqüentemente, obtemos que

$$\begin{aligned} E_{0,0} &= \hbar\omega, \\ E_{1,0} = E_{0,1} &= 2\hbar\omega, \\ E_{2,0} = E_{1,1} = E_{0,2} &= 3\hbar\omega, \\ &\vdots \end{aligned}$$

O padrão sugere que o grau de degenerescência do  $n$ -ésimo estado excitado seja  $n + 1$ . De fato, fixado  $n$ ,  $n_x$  pode variar de 0 até  $n$ , o valor de  $n_y$  sendo determinado em cada caso por  $n_y = n - n_x$ . Há, portanto,  $n + 1$  valores possíveis de  $n_x$  e  $n_y$  para cada valor de  $n$ , como antecipado.

Q10. (a) O postulado estabelece que para energia fixa não há nenhum estado mais provável que outro (equiprobabilidade a priori), logo

$$\Pr(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) = \frac{1}{\Omega(E, N)} = \frac{(E/\Delta)!(N - E/\Delta)!}{N!}.$$

(b) A entropia é dada por

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \Omega \\ &= k_B \ln N! - k_B \ln(E/\Delta)! - k_B \ln(N - E/\Delta)! \\ &\approx k_B N \ln N - k_B N - k_B (E/\Delta) \ln(E/\Delta) + k_B (E/\Delta) \\ &\quad - k_B (N - E/\Delta) \ln(N - E/\Delta) + k_B (N - E/\Delta). \end{aligned}$$

Dividindo por  $N$  e reagrupando os termos,

$$s = -k_B \frac{u}{\Delta} \ln \frac{u}{\Delta} - k_B \left(1 - \frac{u}{\Delta}\right) \ln \left(1 - \frac{u}{\Delta}\right).$$

(c) Como

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial u},$$

obtemos

$$T = \frac{1}{k_B} \frac{\Delta}{\ln \left(\frac{\Delta-u}{u}\right)}. \quad (11)$$

Nota-se que quando  $\frac{\Delta-u}{u} < 1 \Rightarrow u > \Delta/2$ , tem-se  $T < 0$ . O valor máximo de  $u$  é  $\Delta$ . Assim, para  $\Delta/2 < u \leq \Delta$ , o sistema apresenta uma temperatura negativa. Isso é uma característica de sistemas cujo espectro de energias apresenta um valor máximo.

(d) Da Eq. (11)

$$u = \frac{\Delta}{1 + e^{\Delta/(k_B T)}}.$$

O calor específico é dado por

$$c = \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\Delta^2 e^{\Delta/(k_B T)}}{k_B T^2 (1 + e^{\Delta/(k_B T)})^2}.$$

Desta expressão, vê-se claramente que  $c \geq 0$ , ou seja, o calor específico nunca é negativo.