

EUf

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o primeiro semestre de 2020

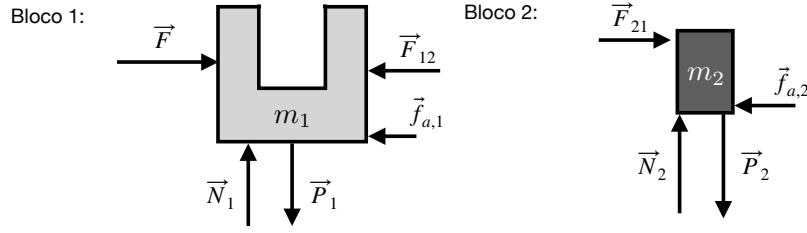
Gabarito

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) As figuras abaixo mostram as forças atuando em cada bloco.



As forças esquematizadas são as seguintes:

$\vec{F}_{ij}$: Forças de contato entre os blocos (par de ação e reação: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$).

$\vec{f}_{a,i}$: Força de atrito no i -ésimo bloco devido ao chão ($|\vec{f}_{a,i}| = \mu_i |\vec{N}_i|$).

$\vec{N}_i$: Força de reação normal no i -ésimo bloco devido ao chão.

$\vec{P}_i$: Força peso no i -ésimo bloco ($\vec{P}_i = m_i \vec{g}$).

(b) Aplicando a segunda lei de Newton a cada um dos blocos e usando que os blocos movem-se com a mesma aceleração horizontal a_x

- na direção x: $F(x) - F_{1,2} - f_{a,1} = m_1 a_x$ e $F_{2,1} - f_{a,2} = m_2 a_x$,

- na direção y: $N_1 = P_1$ e $N_2 = P_2$.

$$\Rightarrow a_x = \frac{F(x) - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{m_1 + m_2}.$$

(c) Do teorema trabalho-energia cinética, sabe-se que a variação total da energia cinética é igual ao trabalho da força resultante $\vec{F}_R$ sobre o sistema. Esta é dada por

$$\vec{F}_R = (F(x) - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)) \hat{x} = (\alpha x - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)) \hat{x}.$$

Segue que a variação da energia cinética ΔK entre as posições x_1 e x_2 é

$$\Delta K = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_R \cdot d\vec{l} = \frac{\alpha}{2} (x_2^2 - x_1^2) - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) (x_2 - x_1).$$

(d) A potência total instantânea dissipada pelo atrito é $P = \vec{f}_{a,tot} \cdot \vec{v} = -f_{a,tot} v$, onde $\vec{f}_{a,tot}$ é a força de atrito total atuando no sistema. Impondo-se a condição do enunciado $P_{fig,2} = 2P_{fig,1}$ e usando

$$f_{a,tot,fig,1} = f_{a,1} + f_{a,2} = g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) \quad f_{a,tot,fig,2} = g\mu_1 (m_1 + m_2),$$

obtem-se

$$\mu_1 (m_1 + m_2) = 2(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) \Rightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{m_2 - m_1}{2m_2}.$$

- Q2. (a) No sistema de referência do enunciado, as posições do bloco de massa M e da massa do pêndulo m são dadas, respectivamente, por $\vec{r}_M = x(t)\hat{i}$ e $\vec{r}_m = [x(t) + l\sin\theta(t)]\hat{i} - l\cos\theta(t)\hat{j}$. Deste modo,

$$v_m^2 = \left| \frac{d\vec{r}_m}{dt} \right|^2 = \left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta \right)^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta.$$

Portanto, adotando a posição $y = 0$ ($\theta = \pi/2$) como o zero de energia potencial gravitacional, a lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta.$$

Das equações de Euler-Lagrange, as equações de movimento são

$$(m + M)\ddot{x} + (ml\cos\theta)\ddot{\theta} - (ml\sin\theta)\dot{\theta}^2 = 0, \quad (1)$$

$$l\ddot{\theta} + \cos\theta\ddot{x} + g\sin\theta = 0. \quad (2)$$

- (b) Sim, a componente x do momentum linear total do sistema P_x se conserva. Isto decorre do fato de que a força total no sistema só tem componente na direção y . De fato,

$$\begin{aligned} P_x &= (\vec{p}_M + \vec{p}_m) \cdot \hat{i} = M\dot{x} + m\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ \implies \frac{dP_x}{dt} &= (m + M)\ddot{x} + (ml\cos\theta)\ddot{\theta} - (ml\sin\theta)\dot{\theta}^2 = 0, \end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (1) no último passo. Alternativamente, percebe-se que a coordenada x é ignorável, ou seja, a lagrangiana não depende de x . Portanto, o momento canonicamente conjugado a x , que é o lado esquerdo da Eq. (1), é conservado.

- (c) Com $\theta \ll 1$ ($\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$), as equações de movimento podem ser linearizadas

$$(m + M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \approx 0, \quad (3)$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta \approx 0. \quad (4)$$

Isolando a equação para θ , obtém-se

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{m + M}{M} \right) \frac{g}{l} \theta = 0,$$

cujas soluções gerais são $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, onde $\omega = \sqrt{\left(\frac{m+M}{M} \right) \frac{g}{l}}$ e A e φ são constantes determinadas pelas condições iniciais. Integrando duas vezes a Eq. (3) em relação ao tempo obtém-se

$$x(t) = -\frac{ml}{m + M}\theta(t) + Bt + C,$$

onde B e C são duas outras constantes determinadas pelas condições iniciais. Portanto,

$$x(t) = -\frac{ml}{m + M}A\cos(\omega t + \varphi) + Bt + C.$$

Nesse modo, o bloco M e a massa m oscilam com a mesma frequência ω mas em sentidos opostos (além de um movimento do centro de massa do sistema com velocidade constante na direção x).

- (d) Sim. Fazendo $A = 0$ na solução do item (c), obtém-se $\theta(t) = 0$ e $x(t) = Bt + C$, isto é, o sistema se move com um todo com velocidade constante B , com o pêndulo sempre na vertical $\theta = 0$. Este é o outro modo normal do problema, cuja frequência de oscilação é nula. Deve-se notar que essa é uma solução exata das Eqs. de movimento (1) e (2).

Q3. (a) O observador D observa um comprimento L' relacionado a L através da contração de Lorentz,

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$L' = 280 \text{ km}.$$

(b) Supondo, sem perda de generalidade, que as naves situam-se ao longo do eixo x/x' em ambos os referenciais de C e D, e que as origens destes coincidem no instante $t = t' = 0$, os referenciais relacionam-se pela transformação de Lorentz

$$x' = \gamma(x - ut) \quad \text{e} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right),$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Denotando por 1 e 2 as explosões das naves da civilizações A e B, respectivamente, temos

$$\Delta x = x_2 - x_1 = L \quad \text{e} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = T,$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) = \gamma\left(T - \frac{u}{c^2}L\right).$$

Para que o observador D registre o evento 2 como anterior ao evento 1, é preciso que

$$\Delta t' < 0 \quad \Rightarrow \quad T - \frac{u}{c^2}L < 0,$$

ou seja,

$$u > \frac{c^2 T}{L} = 9 \times 10^4 \text{ km/s}.$$

(c) Vamos denotar por m_A e m_C as massas da nave da civilização A e do veículo de C. A energia liberada na explosão é $m_A c^2$. Igualando-a à energia cinética de C

$$m_A c^2 = \frac{m_C c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_C c^2.$$

Portanto,

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_C}{m_A + m_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_C}{m_A + m_C}\right)^2$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_C}{m_A + m_C}\right)^2}.$$

Com $m_A = m_C$, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}}c.$$

Q4. (a) Nesse caso, a equação de Schrödinger independente do tempo para a partícula tem a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0, \quad (0 < x < a)$$

onde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. A solução geral da equação diferencial acima pode ser escrita como

$$\varphi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (0 < x < a).$$

As autofunções devem satisfazer as condições de contorno $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$, pois elas devem ser contínuas em $x = 0$ e $x = a$, e $\varphi(x) = 0$ se $x < 0$ e $x > a$. Assim,

$$\begin{aligned} \psi(0) &= B = 0, \\ \psi(a) &= A \sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, as auto-energias E_n e as autofunções $\varphi_n(x)$ são dadas por

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 \quad \text{e} \quad \varphi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

onde a constante A é determinada através da condição de normalização da autofunção.

(b) Da continuidade de $\psi(x)$ em $x = 0$ e $x = a$ (ver item (a)), temos que $\psi(0) = \psi(a) = 0$. A primeira condição é satisfeita por $\psi(x)$ independentemente do valor da constante B . Em relação à segunda condição, temos que

$$\psi(a) = A(Ba - a^2) = 0 \Rightarrow B = a.$$

(c) A constante A é determinada a partir da condição de normalização da função de onda:

$$\int_0^a dx |\psi(x)|^2 = 1.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_0^a dx |\psi(x)|^2 &= A^2 \int_0^a dx (a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4) = \frac{A^2 a^5}{30} = 1 \\ \Rightarrow A &= \sqrt{\frac{30}{a^5}}. \end{aligned}$$

(d) Na representação de coordenadas, temos que

$$\langle T \rangle = \langle \psi | T | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^a dx \psi^*(x) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}.$$

Como

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -2A,$$

segue que

$$\langle T \rangle = \frac{2A^2 \hbar^2}{2m} \int_0^a (ax - x^2) = \frac{5\hbar^2}{ma^2}.$$

Q5. (a) No caso isotérmico

$$P_0 V_0 = P_f V_f \Rightarrow P_f = 10 P_0 = 10,1 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

(b) No caso adiabático

$$P_0 V_0^\gamma = P_f V_f^\gamma \Rightarrow P_f = 10^\gamma P_0 = 10^{1,4} P_0 \approx 25,3 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

(c) O número de moles ao final da compressão é o mesmo em ambos os casos porque as variáveis de estado são as mesmas. O número de moles inicial era, da equação do gás ideal,

$$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0}.$$

Após a exaustão, com $T_2 = 300 \text{ K}$, o número de moles será

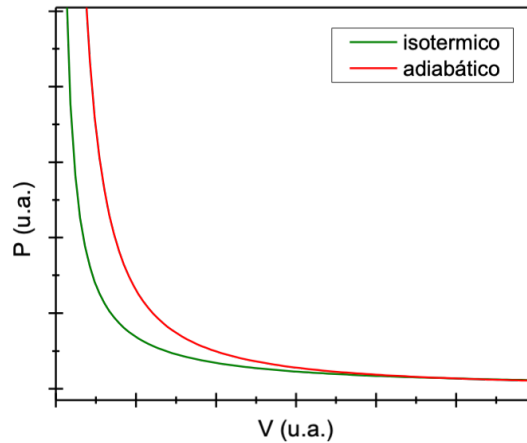
$$n' = \frac{P_0 V_f}{RT_2}.$$

Portanto,

$$\frac{n'}{n} = \frac{T_0 V_f}{T_2 V_0} = \frac{330 \times 0,1}{300 \times 1} = 0,11.$$

e conclui-se que uma fração de 0,89 do gás inicial é liberada (ou 89%).

(d) Um esboço dos dois processos pode ser visto na figura abaixo.



Como o trabalho realizado (em módulo) é a área sob a curva, é óbvio que ele é menor no caso isotérmico. Alternativamente, pode-se calcular os dois trabalhos. No caso isotérmico

$$W_{\text{isoter}} = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} = -P_0 V_0 \ln \left(\frac{V_f}{V_0} \right) = 101 \ln 10 \approx 233 \text{ J}.$$

No caso adiabático

$$\begin{aligned} W_{\text{adia}} &= -P_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{1}{\gamma - 1} P_0 V_0^\gamma \left[V_f^{(1-\gamma)} - V_0^{(1-\gamma)} \right] = \frac{1}{\gamma - 1} P_0 V_0 \left[\left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{(\gamma-1)} - 1 \right] \\ &= 2,5 \times 101 \times (10^{0,4} - 1) = 2,5 \times 101 \times \left(\frac{10^{1,4}}{10} - 1 \right) \approx 380 \text{ J}. \end{aligned}$$

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o primeiro semestre de 2020

Gabarito

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**

Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

- Q6. (a) Por simetria, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. A lei de Ampère é válida no limite quase-estático. Aplicando-a a um circuito retangular com dois lados paralelos de comprimento L na direção z , sendo um dentro do solenoide e outro fora, e os dois outros lados na direção radial,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_z L = \mu_0 I(S) = \mu_0 n L I(t) \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 n I_0 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (r < R).$$

onde $I(S)$ é a corrente total que atravessa o circuito e usamos que a contribuição dos lados radiais do circuito para a circulação de $\mathbf{B}$ é nula (porque $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$) e o campo magnético é nulo fora do solenoide.

- (b) Usando a lei de indução de Faraday

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

aplicada a um circuito circular de raio $r < R$, com eixo ao longo de z e concêntrico ao solenoide ($\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$) e usando que, por simetria, o campo elétrico é azimutal $\mathbf{E} = E\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$E 2\pi r = -\pi r^2 \frac{d}{dt} B, \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \mu_0 n \omega I_0 r \cos(\omega t) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (r < R).$$

- (c) Procedendo de maneira análoga ao item anterior mas agora com $r > R$

$$E 2\pi r = -\pi R^2 \frac{d}{dt} B, \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2r} \mu_0 n \omega I_0 R^2 \cos(\omega t) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (r > R).$$

Q7. (a) A densidade superficial de carga σ na placa com carga total Q é relacionada ao campo elétrico E entre as placas por $\sigma = Q/(\pi a^2) = \epsilon_0 E$. A diferença de potencial entre as placas U é relacionada ao campo elétrico por $E = U/d$. Como, por definição, $Q = CU$, segue que

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}.$$

(b) Pela lei de Kirchhoff

$$V = RI + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

A solução dessa equação diferencial que satisfaz a condição inicial $Q(0) = 0$ é

$$Q = VC (1 - e^{-t/\tau}), \text{ com } \tau = RC.$$

Segue que,

$$I = \frac{d}{dt}Q = \frac{V}{R} e^{-t/\tau}.$$

(c) Como a carga (e o campo elétrico) no capacitor muda(m), campo magnético é gerado. Aplicaremos a lei de Ampère-Maxwell

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,$$

a um circuito circular de raio a paralelo às placas do capacitor, a meio caminho entre elas e com centro no seu eixo. Nesse caso, $\mathbf{J} = 0$ e $\hat{\mathbf{n}} \parallel \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$. Além disso, $\mathbf{B} = B \hat{\boldsymbol{\theta}}$ (por simetria). Segue que

$$\begin{aligned} B 2\pi a &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int E dS = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi a^2} dS = \mu_0 \frac{d}{dt} Q(t) = \mu_0 I(t) \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

(d) O vetor de Poynting na borda do capacitor é

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi a^2} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{I(t)}{2\pi a} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \Rightarrow \mathbf{S} = -\frac{QI}{\epsilon_0 2\pi^2 a^3} \hat{\mathbf{r}}.$$

A taxa temporal de energia eletromagnética que flui para dentro do capacitor é a integral do módulo do vetor de Poynting na sua área lateral

$$P = S 2\pi a d = \frac{QId}{\epsilon_0 \pi a^2} = IEd = IU,$$

onde, como antes, U é a diferença de potencial entre as placas.

- Q8. (a) Pela lei do deslocamento de Wien, o produto da temperatura de um corpo negro pelo comprimento de onda que maximiza sua radiância espectral é constante. Logo, para o Sol (S) e Betelgeuse (B) vale

$$\lambda_S T_S = \lambda_B T_B \Rightarrow \frac{\lambda_S}{\lambda_B} = \frac{T_B}{T_S} = \frac{3,0 \times 10^3}{6,0 \times 10^3} = \frac{1}{2}.$$

- (b) Pela lei de Stefan–Boltzmann, a radiância a partir da superfície de um corpo negro é proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta, com uma constante de proporcionalidade universal. Logo, para o Sol e Betelgeuse vale

$$\frac{I_B}{T_B^4} = \frac{I_S}{T_S^4} \Rightarrow \frac{I_S}{I_B} = \left(\frac{T_S}{T_B} \right)^4 = \left(\frac{6,0 \times 10^3}{3,0 \times 10^3} \right)^4 = 16.$$

- (c) Ainda pela lei de Stefan–Boltzmann, e da definição de radiância como potência (P) por unidade de área (A), temos

$$\frac{I_B}{I_S} = \frac{P_B/A_B}{P_S/A_S} = \left(\frac{T_B}{T_S} \right)^4.$$

Levando em conta que a área superficial de uma estrela é proporcional ao quadrado de seu raio,

$$\frac{P_B/R_B^2}{P_S/R_S^2} = \frac{P_B}{P_S} \left(\frac{R_S}{R_B} \right)^2 = \left(\frac{T_B}{T_S} \right)^4,$$

donde

$$\frac{R_B}{R_S} = \sqrt{\frac{P_B}{P_S}} \left(\frac{T_S}{T_B} \right)^2 = \sqrt{4 \times 10^4} \left(\frac{6,0 \times 10^3}{3,0 \times 10^3} \right)^2 = 8,0 \times 10^2.$$

- Q9. (a) Da matriz que representa o hamiltoniano H na base $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$ e $|\alpha_3\rangle$, verifica-se que o estado $|\alpha_3\rangle$ é um autovetor de H com autovalor $2\hbar\omega$. Diagonalizando o hamiltoniano apenas no subespaço gerado pelos estados $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$, temos que

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Portanto, os autovalores de energia são dados por

$$\epsilon_1 = -\hbar\omega, \quad \epsilon_2 = \hbar\omega, \quad \epsilon_3 = 2\hbar\omega.$$

Os autovetores são determinados a partir da relação

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = -1$ ($\epsilon_1 = -\hbar\omega$) e $\lambda = 1$ ($\epsilon_2 = \hbar\omega$), verifica-se que, respectivamente,

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle - |\alpha_2\rangle) \quad \text{e} \quad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle).$$

Além disso, como já mencionado

$$|\varphi_3\rangle = |\alpha_3\rangle.$$

(b) A partir dos resultados do item (a), podemos reescrever o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ em termos dos autovetores $|\varphi_i\rangle$ do hamiltoniano H

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_3\rangle.$$

Dessa forma, as probabilidades de uma medida da energia do sistema retornar os valores $E = \epsilon_1$, ϵ_2 ou ϵ_3 são

$$\begin{aligned} P(E = \epsilon_1) &= |\langle\varphi_1|\psi(0)\rangle|^2 = 0, \\ P(E = \epsilon_2) &= |\langle\varphi_2|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \\ P(E = \epsilon_3) &= |\langle\varphi_3|\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) O estado do sistema no instante $t > 0$ pode ser determinado através da ação do operador de evolução temporal $U(t,0)$ no estado inicial,

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle.$$

Usando a expansão do estado inicial $|\psi(0)\rangle$ em termos dos autovetores $|\varphi_i\rangle$ do hamiltoniano H obtida no item (b), temos que

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\epsilon_2 t/\hbar}|\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\epsilon_3 t/\hbar}|\varphi_3\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|\varphi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega t}|\varphi_3\rangle. \end{aligned}$$

Em termos da base $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$ e $|\alpha_3\rangle$, temos

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}|\alpha_1\rangle + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}|\alpha_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega t}|\alpha_3\rangle.$$

(d) Como determinado no item (a), o estado fundamental do Hamiltoniano H é o estado $|\varphi_1\rangle$. Considerando a expansão do estado $|\varphi_1\rangle$ na base $|\alpha_1\rangle$, $|\alpha_2\rangle$ e $|\alpha_3\rangle$, temos

$$\langle A \rangle = \langle \varphi_1 | A | \varphi_1 \rangle = a \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -a.$$

Q10. (a) O Hamiltoniano do sistema por ser escrito como:

$$H = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j,$$

onde ε_j é a energia do j -ésimo átomo. Como os átomos não interagem entre si, a função de partição do sistema é

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta H}] = Z_1^N,$$

onde Z_1 é a função partição de um átomo e $\beta = (k_B T)^{-1}$. Esta última pode ser facilmente calculada

$$Z_1 = 1 + 2e^{-\beta\Delta},$$

donde se obtém

$$Z = (1 + 2e^{-\beta\Delta})^N.$$

A energia interna pode agora ser calculada diretamente

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = N \frac{2\Delta e^{-\beta\Delta}}{(1 + 2e^{-\beta\Delta})}.$$

(b) A energia livre de Helmholtz é:

$$F = -k_B T \ln Z = -\frac{N}{\beta} \ln (1 + 2e^{-\beta\Delta}).$$

A entropia é dada por $S = k_B \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$, donde

$$S = Nk_B \ln (1 + 2e^{-\beta\Delta}) + 2\Delta Nk_B \beta \frac{e^{-\beta\Delta}}{(1 + 2e^{-\beta\Delta})}.$$

(c) Se $\Delta > 0$, então

(i) $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$, $e^{-\beta\Delta} \rightarrow 0$, logo $S \rightarrow 0$.

(ii) $T \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 0$, $e^{-\beta\Delta} \rightarrow 1$, assim $S \rightarrow Nk_B \ln 3$.

(d) Se $\Delta < 0$, então

(i) $T \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$, $e^{-\beta\Delta} \rightarrow \infty$, logo $S \rightarrow Nk_B \ln (2e^{-\beta\Delta}) + \Delta Nk_B \beta \rightarrow Nk_B \ln 2$.

(ii) $T \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 0$, $e^{-\beta\Delta} \rightarrow 1$, assim $S \rightarrow Nk_B \ln 3$.