5,6

AGG0330–Processamento de Sinais Digitais PROVA 1: 16/05/2012

Nome: Joyce Aguiar Calasans

1) Um sinal que possui um espectro de amplitude de banda limitada entre 100 e 350Hz foi amostrado com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a 2ms. O intervalo foi adequado para amostrar o sinal?

i) Se sim: explique porque. ii) Se não: explique qual intervalo você usaria.

2) Uma vez utilizado um intervalo de amostragem inadequado, existindo falseamento de frequência, é possível utilizar a teoria da amostragem para interpolar o sinal para um intervalo menor e recuperar o sinal original corretamente?

3) Esboce o espectro de amplitude da Transformada de Fourier calculado para a função **f(t)=cos (80 π t)**, discretizada com os seguintes intervalos de amostragem no tempo:

a) dt=0.001 s

b) dt=0.04 s

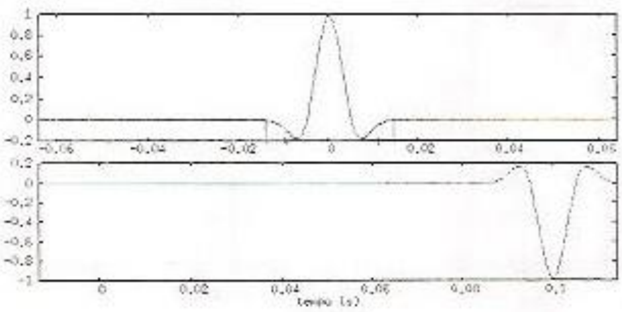
4) Os sinais da figura abaixo no domínio do tempo possuem o mesmo intervalo de discretização (dt) e número de amostras (N=128).

a) Quais foram os intervalos de discretização utilizados nos domínios do tempo (em segundos) e da frequência (em Hz)?

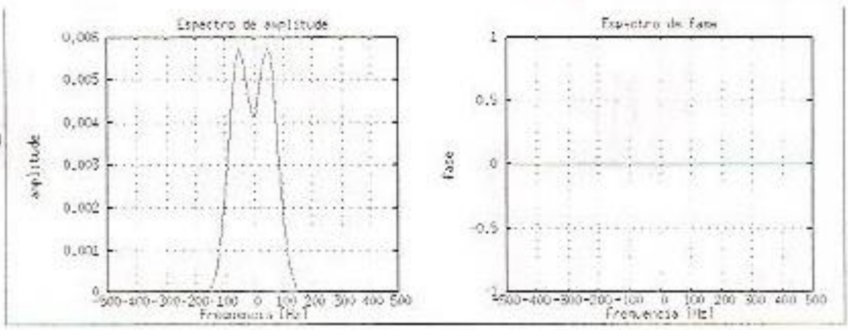
b) O que muda nos espectros de amplitude e de fase do sinal em (**II**) em relação aos espectros de (**I**). Explique sua resposta.

(I)

(II)



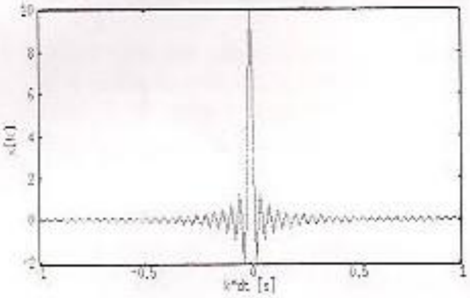
(I)

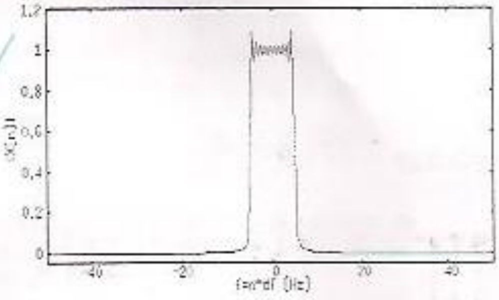


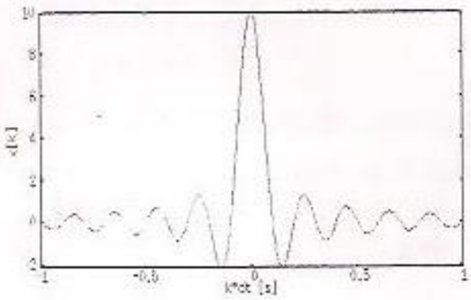
(II)

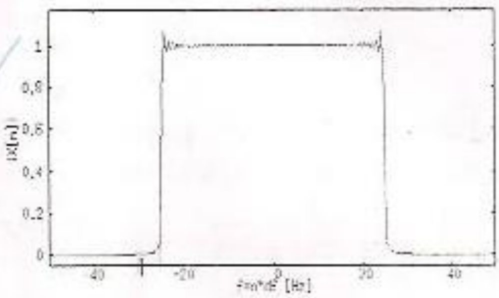
5) Associe na coluna da direita qual o espectro correto dos sinais apresentados no domínio do tempo:

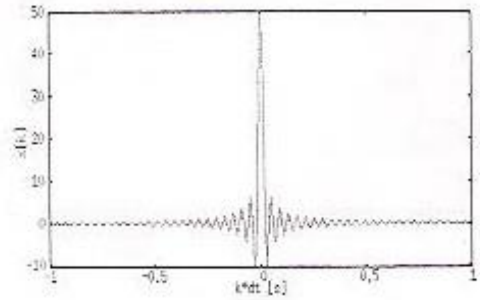
domínio do tempo | domínio da frequência

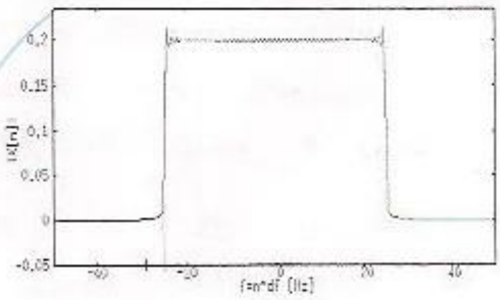
(a) 

b ( ) 

(b) 

c ( ) 

(c) 

a ( ) 

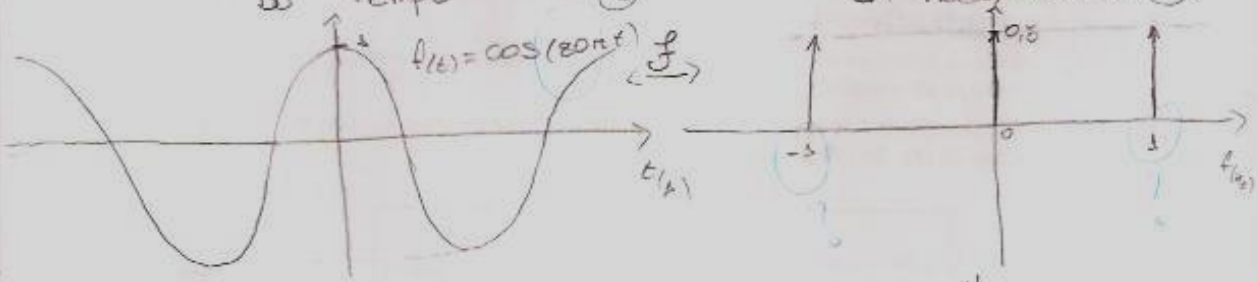
1-) a) $f_N = \frac{1}{2\,dt} \Rightarrow f_N = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow f_N = \frac{1000}{4} \Rightarrow f_N = 250\ Hz$

$\therefore$ O intervalo de 100 a 330 Hz não é adequado, pois ocorre falseamento.

Para não ocorrer falseamento $f_{máx} \leq f_N$. 0,5

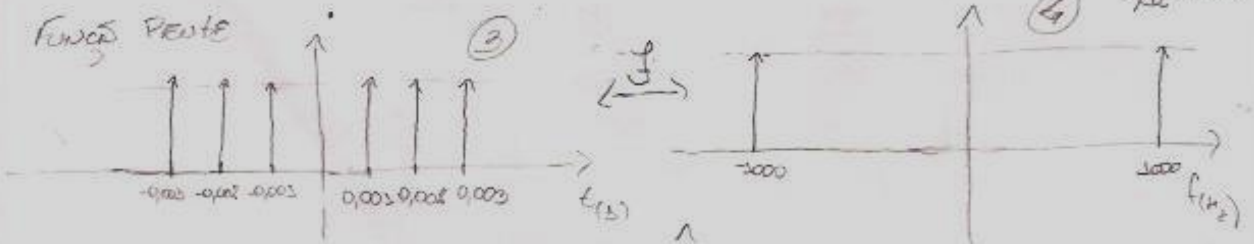
2-) Não, uma vez ocorrido o falseamento não é possível recuperar o sinal original, pois para recuperá-lo a função sinc, (a qual, pelo teorema da amostragem será convolvida com o sinal falseado no domínio da frequência), deveria ser contínua e infinita, o que não é possível na prática 1

3-) a) No Domínio do Tempo ①   No Domínio da Frequência ②



$*$

Função Pente ③   ④ $1/dt = 1000$



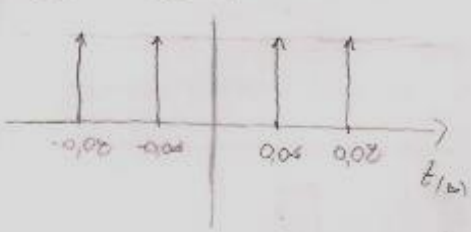
$\Rightarrow$ ② $*$ ④

$80\pi = 2\pi\nu$
$\nu = 40\pi$

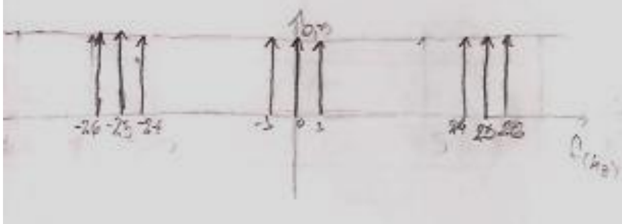
Continuação no outro verso $\Longrightarrow$

Domínio do tempo (5)

Domínio da Frequência (6)



Fazendo (2) * (6), temos:



1) a) Do gráfico é possível observar que a discretização vai de $\approx -0,015$ a $\approx 0,015 \Rightarrow dt \cong 0,03\,s$

$$df = \frac{1}{((N-1)\cdot dt)} \Rightarrow df = \frac{1}{((128-1)\cdot 0,03)} \Rightarrow df = 0,26\,Hz$$

N

1,5

b) A amplitude de II será deslocada de 0,1 horizontalmente, com relação à amplitude de I.

A fase de II além de ser defasada, será também invertida com relação à fase de II.

$+\pi$

Pela propriedade do atraso no tempo da Transformada de Fourier, temos:

$f(t-\Delta t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega\Delta t} F(\omega) \Rightarrow$ O espectro de fase será

$-\omega\Delta t \Rightarrow -\omega \cdot 0,1 = -\frac{20\pi}{3}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{2\pi}{3\cdot 10^{-2}}$

$\omega = \frac{200\pi}{3}$

0,5

AGG0330 – Processamento de sinais digitais / 2009 **PROVA 1: 14/05/2009**

NOME: MARCELO ALEXANDRE SEIXAS

1) Um sinal que possui um espectro de amplitude de banda limitada entre 100 e 300Hz foi amostrado com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a 2ms. Você considera que este intervalo foi adequado para amostrar o sinal? Explique.

2) Considere a função no tempo: **cosseno** com freqüência de **5Hz** e amplitude igual a 1.

(não esqueça de considerar as freqüências negativas dos espectros)

a) Desenhe o espectro de amplitude da função cosseno contínua.

b) Se essa função for discretizada com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a 0,25s, qual a frequência de Nyquist (f_N)? Nesse caso ocorre falseamento de frequência?

c) Desenhe o espectro de amplitude da função de amostragem, que possui período (intervalo de amostragem) citado em (b).

d) Utilize o teorema da convolução para desenhar o espectro de amplitude da função cosseno discretizada, com o intervalo de amostragem citado em (b). *Marque o intervalo que corresponde a [-f_N : f_N] e mostre no seu desenho que o espectro de amplitude de uma função discreta no tempo é periódico na frequência*

e) Do desenho feito em (d) conclua com que frequência aparece o cosseno que foi discretizado com dt=0,25ms?

3) Um sinal, que possui frequência máxima igual a 100Hz, foi registrado com um intervalo de 1ms (.001 segundos) precisa ser reamostrado para um intervalo de 2ms. O ruído presente nos dados cobre toda a faixa de frequências amostradas.

a) Que filtragem deve ser efetuada neste sinal antes da reamostragem?

b) Escreva a expressão analítica, **no domínio do tempo,** do filtro que deve ser aplicado neste sinal antes da reamostragem.

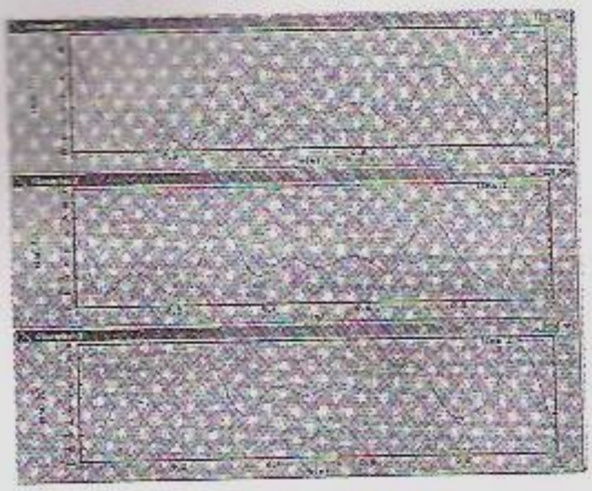
4) Sendo a Transformada de Fourier de x_t igual a $X_f = A_f exp\{i\theta_f\}$, e de y_t igual a

$Y_f = B_f\, exp\{i\varphi_f\}$, qual o espectro de amplitude e o espectro de fase do sinal:

$s_t = x_t * y_t$?

2A

5) Os três sinais abaixo possuem o mesmo espectro de amplitude. O que explica a diferença entre a forma dos sinais?



2B

$f_N > f_{max}$

MARCELO ALEXANDRE SEIXAS (14/05/09)

1ª PROVA PROCESSAMENTO DE SINAIS DIGITAIS

① f: 100 e 300 Hz
Δt: 2 ms

A frequência de Nyquist é dada por: $f_N = \frac{1}{2\Delta t}$

$$f_N = \frac{1}{2 \cdot 0{,}002} = \frac{1000}{4} = 250\ Hz$$

Sendo assim, com intervalo de amostragem de 2 ms o sinal de 300 Hz não será bem amostrado porque $f_N < 300\ Hz$, ou seja, há falseamento do sinal porque Δt não é adequado.

② $f(t) = A\cos(2\pi f n t)$

$A = 1 \therefore f = 5\ Hz$

a) $f(t) = 1\cos(2\pi \cdot 5t)$ (sinal)

representando na forma complexa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n f t}$$

onde $C_n = \frac{1}{2}(a_n \mp i b_n)$,

a_n está associado aos termos da série que contém senos, sua amplitude

continua >

como só temos cosseno, $b_n = 0$

temos $a_1 = 1$ então $C_{\pm 1} = 1/2 (a_1^2 + b_1^2)^{1/2}$

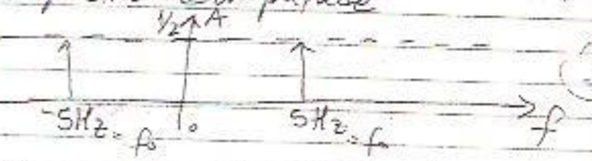
$= 1/2 (1^2 + 0^2)^{1/2}$

$C_{\pm 1} = 1/2$

então a série

$$f(t) = 1/2\, e^{i\omega_0 t} + 1/2\, e^{-i\omega_0 t}$$

daí o espectro da amplitude $\qquad \omega_0 = n f_0$



(5)

b) se $dt = 0{,}25\,s$ $\quad f_N = ?$ Há falseamento?

$$f_N = \frac{1}{2dt} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}25} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,Hz$$

(5)

Sim. Ocorre falseamento porque de acordo com a teoria um intervalo de amostragem de 0,25 s é suficiente para frequências menores que 2 Hz e o sinal amostrado é de 5 Hz

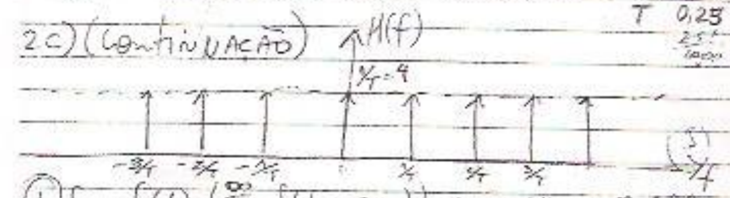
$$f_N = 2\,Hz < 5\,Hz \quad \text{(Há falseamento)}$$

c) $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Longleftrightarrow H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

$h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\,0{,}25) \Leftrightarrow H(f) = \frac{1}{0{,}25} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{0{,}25}\right)$

MARCELO ALEXANDRE SEIXAS $\frac{1}{T} = \frac{1}{0,25} = 4$

2c) (Continuação)



d) $f_t = f(t) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 0,25n) \right) \Leftrightarrow F_t = F(f) * \frac{1}{0,25} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{0,25}\right)$

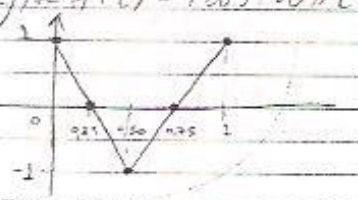
e) se $f(t) = 1\cos(10\pi t)$: $f(0) = 1$

$f(0,25) = 0$

$f(0,5) = -1$

$f(0,75) = 0$

$f(1,0) = 1$



Pelo desenho acima concluo que a frequên-cia do cosseno discretizado será 1 Hz.

2D

(/ /)

(4) $x_t \Longleftrightarrow X_f = A_f \exp(i\Theta_f)$

$y_t \Longleftrightarrow Y_f = B_f \exp\{i\varphi_f\}$

espectro de amplitude e fase de $S_t = x_t * y_t$

Pelo teorema da convolução

$\Delta_t = x_t * y_t \longleftrightarrow S_f = X_f \cdot Y_f$

$$X_f \cdot Y_f = A_f \exp(i\Theta_f) \cdot B_f \exp(i\varphi_f)$$
$$= \underbrace{A_f B_f}_{C_f = \text{espectro de amplitude}} \cdot \exp(i\underbrace{(\Theta_f + \varphi_f)}_{\phi_{sf} = \text{espectro de fase}})$$

(1)

$\Delta_t \longleftrightarrow C_f\, e^{i\phi_{sf}}$

(5) Se o espectro da amplitude é o mesmo então os 3 sinais possuem as mesmas frequências e amplitudes nas séries temporais e o que muda é a fase associada a cada termo da série. [illegible] (1)

spiral

(14/05/09)

MARCELO ALEXANDRE SEIXAS

1ª Prova Processamento de Sinais Digitais

3) $f_{máx} = 100Hz$ $\quad dt_1 = 0{,}001s \quad dt_2 = 0{,}002s$

a) $f_{N_1} = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}001} = \dfrac{1000}{2} = 500Hz$ (2)

$f_{N_2} = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}002} = \dfrac{100}{4} = 250Hz$

Queremos eliminar o ruído, que são as freqüências acima de 100Hz. Para se utiliza-se um filtro "passa baixa", que na prática significa multiplicar o espectro de amplitude por uma função caixa.

No domínio da freqüência:

$box_{f_{máx}}(f) \Longleftrightarrow f_{máx}\, sinc(2\pi \cdot f_{máx} \cdot t)$

Assim vamos "reforçar" as freqüências abaixo da $f_{máx}$ e "anular" as freqüências acima.

b) Devemos utilizar no sinal.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ sinal}}{f(t)} * \underset{\substack{\uparrow \\ f_{máx}}}{100}\, sinc(2\pi \cdot 100\, t)$$ 2,5

continua →

Cortando em 100Hz eliminamos "todo" ruído acima de 100Hz. Entretanto como a reamostragem mostrará corretamente frequências abaixo de 250Hz podemos fazer um filtro passa baixa utilizando $f_{max} = 250Hz$ que já será suficiente para termos um sinal com menos ruído e sem falseamento.

Um filtro passa-baixa de 100Hz resolve o problema mas um passa-baixa de 250Hz resolve ele "mais" na medida necessária.

para a reamostragem

3A-6

AGG0330 – Processamento de sinais digitais / 2008 **PROVA 1: 05/06/2008**

PARTE I:

1) Um sinal que possui um espectro de amplitude de banda limitada entre 100 e 300Hz foi amostrado com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a 2ms. Você considera que este intervalo foi adequado para amostrar o sinal? Explique.

2) Considere a função no tempo: **cosseno** com freqüência de **5Hz** e amplitude igual a 1.

a) Desenhe o espectro de amplitude da função cosseno contínua.

b) Se essa função for discretizada com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a 0,25s, qual a frequência de Nyquist (f_N)? Nesse caso ocorre falseamento de frequência?

c) Desenhe o espectro de amplitude da função cosseno discretizada com o intervalo de amostragem citado em (b)

recomendações para elaboração do desenho:

- não se esqueça de considerar a parte negativa do espectro da função contínua e do espectro da função de amostragem;

- marque o intervalo que corresponde a $[-f_N ; f_N]$;

- mostre no seu desenho que o espectro de amplitude de uma função discreta no tempo é periódico na frequência

d) Do desenho feito em (d) conclua com que frequência aparece o cosseno que foi discretizado com dt=0,25ms?

e) Qual o máximo intervalo de amostragem para garantir que não ocorre falseamento de sua frequência?

3) Considere um sinal amostrado (sem falseamento) e o seu respectivo espectro de amplitude, representados nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

a) Com base na informação do espectro de amplitude e do próprio sinal amostrado descreva as características do sinal.

b) Qual o intervalo de amostragem do sinal no domínio do tempo?

(lembre-se que na Figura 2 está representada a metade (valores para f > 0) do primeiro período do sinal no domínio da frequência)

4) Sendo a Transformada de Fourier de x_t igual a $X_f = A_f exp\{i\theta x_f\}$, e de y_t igual a $Y_f = B_f\, exp\{i\theta y_f\}$, qual o espectro de amplitude e o espectro de fase do sinal:

$s_t = x_t * y_t$?

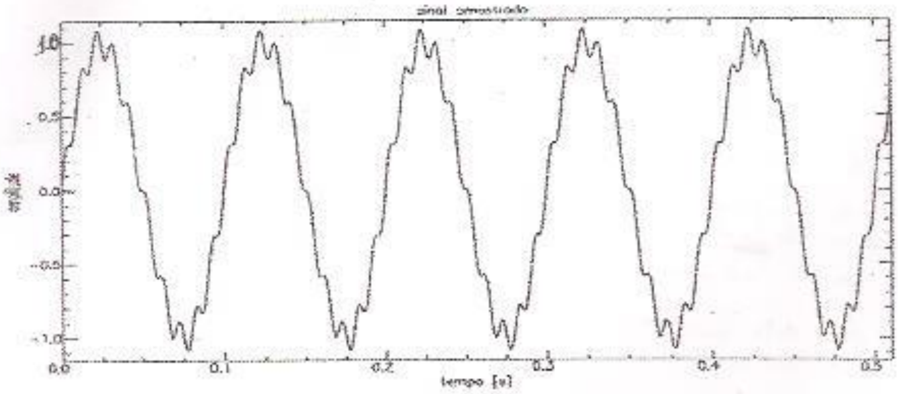


FIGURA 1

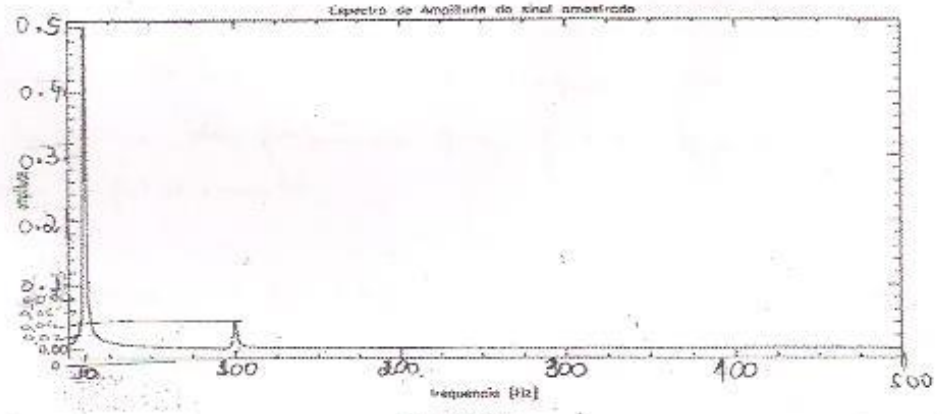


FIGURA 2

PARTE II: **Opcional, vale 1 ponto a mais na nota da prova**

Nas próximas aulas aprenderemos filtros de frequência. Vocês já aprenderam todas as ferramentas necessárias para realizar a filtragem, tentem perceber como seria possível eliminar a componente de 100Hz das Figuras 1 e 2.

Primeiro analisem como o filtro é aplicado no domínio da frequência. Qual seria o processo matemático a ser realizado no domínio da frequência, ou seja: como seria o espectro de amplitude do filtro e qual a conta a ser efetuada para zerar as frequências acima de 90Hz, e como seria o espectro de fase do filtro para não alterar o espectro de fase do sinal.

Em seguida descreva como o mesmo processo pode ser realizado diretamente no domínio do tempo.

1A-C

P1 → Sinais Digitais 05/06/08 (1

Paula Gomes de Carvalho - 5661511 (I) + (1)

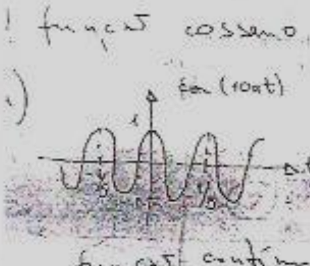
1) Banda limitada entre 100 e 300 Hz dt = 2 ms

$f_N = \frac{1}{2\cdot dt} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^{-3}} = \boxed{250\ Hz}$ $f_c = 300$ Hz
↳ frequência máxima do sinal

Para que um sinal seja bem amostrado, temos que ter $f_N \geq f_c$, sendo f_c a frequência máxima do sinal e f_N a frequência de Nyquist.
Como para dt = 2 ms obtivemos f_N = 250 Hz e f_c é 300 H[z]
⇒ $f_N < f_c$, logo o intervalo de amostragem não foi ideal! A f_N (frequência de Nyquist) corresponde ao limite máximo de frequência que o sinal pode ser reproduzido sem falseamento. (I)

2) função cosseno → f = 5 Hz A = 1 → cos(10πt)

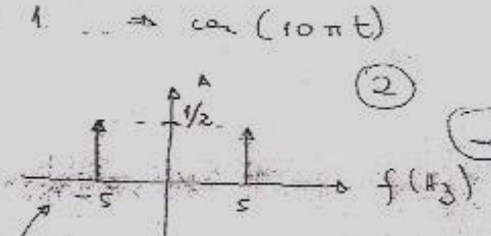
a) (1)



TE

função contínua

(2) (I)



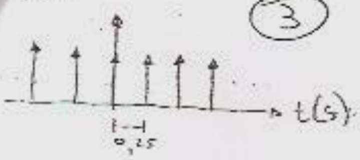
(espectro de amplitude da função contínua

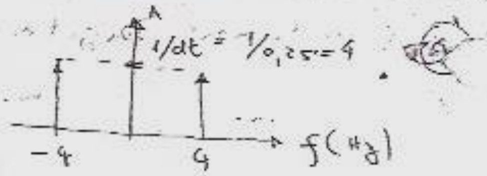
b) $f_{max} = 5$ Hz
função discretizada com dt = 0,25 ms
⇒ $f_N = \frac{1}{2\,dt} = \frac{1}{2\cdot 0{,}25} = \frac{1}{0{,}5} = \boxed{2\ Hz}$

Como $f_N < 5$ Hz, tem-se que ocorrerá falseamento! (I)

3

TF





$1/dt = 1/0{,}25 = 4$

função pente com $dt = 0{,}25$ ms

Espectro de amplitude da função pente (B)

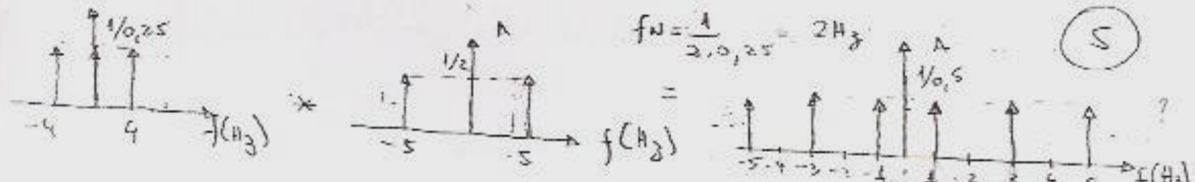
(1) . (3) $\xleftrightarrow{TF}$ (2) $*$ (4)

função discreta $\xleftrightarrow{TF}$ espectro de amplitude da função discretizada com dt

· Fazendo a convolução de (2) com (4) obtemos o espectro de amplitude da função discretizada.

$f_N = \frac{1}{2 \cdot 0{,}25} = 2$ Hz

(5)

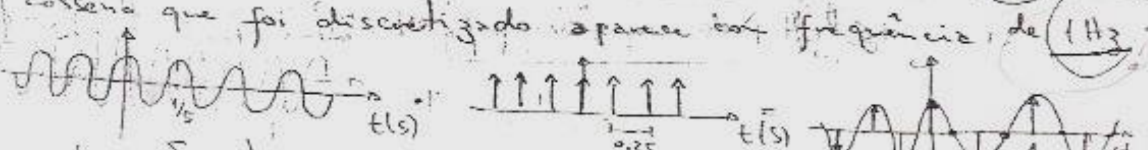


A (5) corresponde ao espectro de amplitude da função contínua do item (a) discretizada com um $dt = 0{,}25$. Como pode ser observado no desenho, a (5) é função periódica na frequência.

(d)

(1)

O cosseno que foi discretizado aparece na frequência de 1 Hz



função contínua

discretização

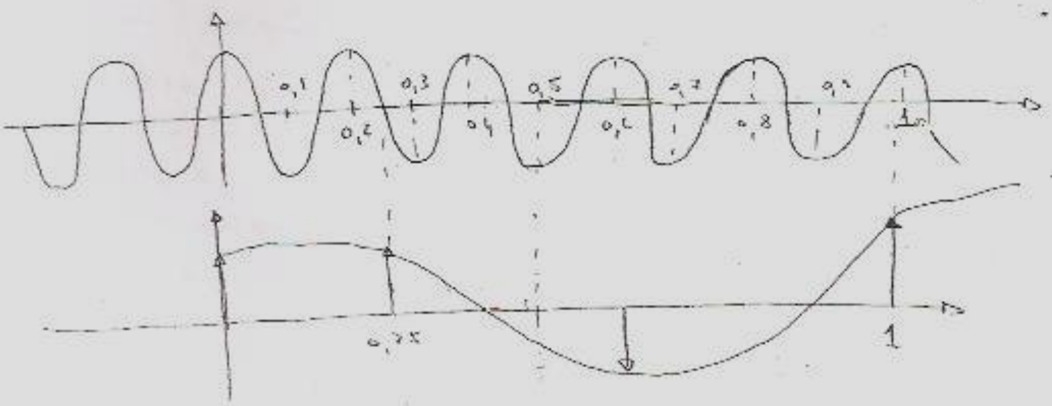
função pente ($dt = 0{,}25$s)

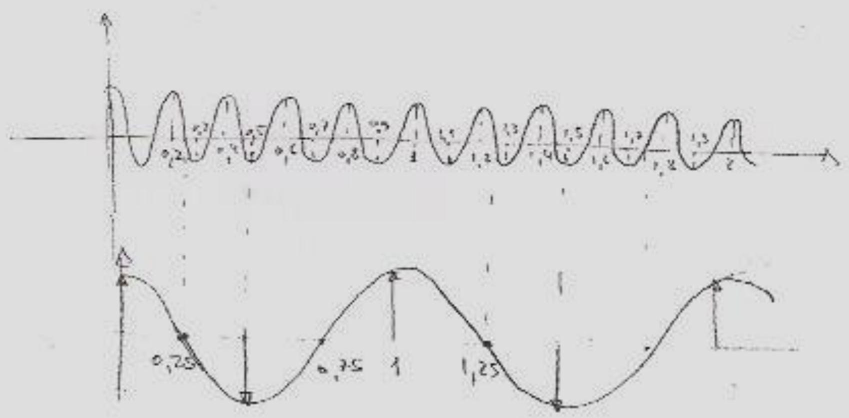
função discreta

Considerando a frequência do cosseno = 5 Hz:

$5 = \frac{1}{2 \cdot dt} \Rightarrow \boxed{dt_{max} = 0{,}1 s}$ //

(J) $f_a = 2 f_{max}$ ... $dt = 1/f_a$





cossено de f = 5 Hz discretizado com
dt = 0,25 t

1.b) É um sinal composto pela soma de ~~duas senóides~~ dois senos.
Uma com frequência de 10 Hz e amplitude igual à 0,5 e a outra com frequência de 100 Hz e amplitude de 0,
Sendo $f = 10\,Hz$ a frequência fundamental do sinal (f_0)
$f = 100\,Hz = 10 \cdot f_0$

ii) Podemos observar que a frequência máxima é igual a 500 Hz.

$$\Rightarrow 500 = \frac{1}{2dt} \Rightarrow dt = \frac{1}{2 \cdot 500} = \boxed{1\ ms}$$

↳ intervalo de amostragem do sinal no domínio do tempo.

i) $x_t \longleftrightarrow X_f \qquad y_t \longleftrightarrow Y_f$

$$X_f = A_f \cdot e^{i\theta_{xf}} \qquad Y_f = B_f\, e^{i\theta_{yf}}$$

Pelo "Teorema da Convolução" temos que:

$$S_t = x_t * y_t \longleftrightarrow S_f = X_f \cdot Y_f$$

$$\Rightarrow S_f = A_f \cdot e^{i\theta_{xf}} \cdot B_f\, e^{i\theta_{yf}} = A_f \cdot B_f \cdot e^{i(\theta_{xf}+\theta_{yf})}$$

$$\Rightarrow S_f = A_f \cdot B_f \cdot e^{i(\theta_{xf}+\theta_{yf})}$$

Logo,

- espectro de amplitude de $x_t * y_t = S_t$ $= A_f \cdot B_f$
- espectro de fase de $x_t * y_t = s_t$ $= \theta_{xf} + \theta_{yf}$

arte II

1

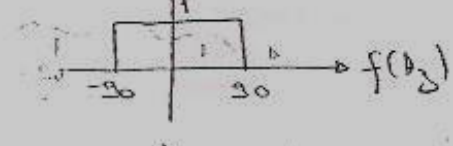
No domínio da frequência, o espectro de amplitude poderia ser multiplicado pela função caixa (box) centrada na origem, com altura 1 e largura igual a 180 Hz, ou seja, frequência $-90\ Hz < f < 90\ Hz$, assim, todas frequências menores que $-90\ Hz$ e maiores que $90\ Hz$ seriam eliminadas (zeradas).

No domínio do tempo o que deveria ser feito é a convolução do sinal amostrado pela função sinc (t), (cujo período entre $\left(-\frac{1}{90} < T < \frac{1}{90}\ s\right)$ que é a transformada da referida caixa (box) citada acima.

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $\quad \omega = 2\pi \cdot 90$

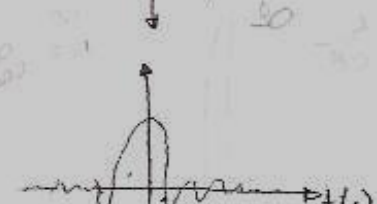
Definir os parâmetros da sinc

O espectro de fase do filtro deve ser sempre igual a zero para não alterar o espectro de fase do sinal.



→ função caixa, que multiplicada ao espectro de amplitude do sinal amostrado zera as frequências menores que $-90\ Hz$ e maiores que $90\ Hz$.

$\frac{1}{90}$



→ função sinc(), que convoluída com o sinal amostrado zera os períodos menores que -1 ... e maiores que ...

$f_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

$f_{(t)} \cdot g_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) * G(\omega)$

$f_{(t)} \cdot box \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) * \text{sinc}\,\frac{\omega}{\pi}$

AGG0330–Processamento de Sinais Digitais **PROVA 1: 20/05/2011**

Nome: Marco Antônio Scarpa Vilar Nº USP: 6818267

1) Um sinal que possui um espectro de amplitude de banda limitada entre 100 e 300Hz foi amostrado com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a 2ms. O intervalo foi adequado para amostrar o sinal?

i) Se sim: explique porque. ii) Se não: explique qual intervalo você usaria.

2) Seja a função no tempo: $\cos(10\pi t)$

2.1) Considere a Transformada de Fourier e desenhe o espectro de amplitude dessa função contínua.

2.2) Se essa função for discretizada com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a 0,25 s, qual a frequência de Nyquist (f_N)?

2.3) Se ocorrer falseamento de frequência para dt=0,25 s; explique para que freqüência foi falseada a frequência de 5Hz.

2.4) Desenhe um período do espectro da função $\cos(10\pi t)$ discretizada com dt=0,25 s.

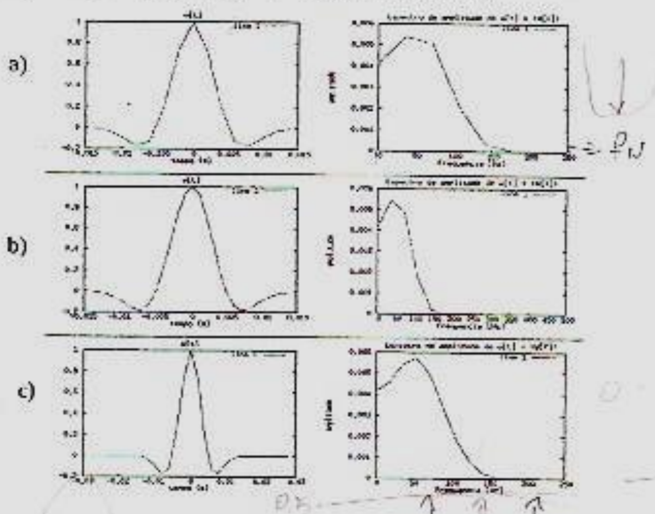
3) Uma vez utilizado um intervalo de amostragem inadequado, existindo falseamento de frequência, é possível utilizar a teoria da amostragem para interpolar o sinal para um intervalo menor e recuperar o sinal original corretamente?

4) Observe os gráficos abaixo:

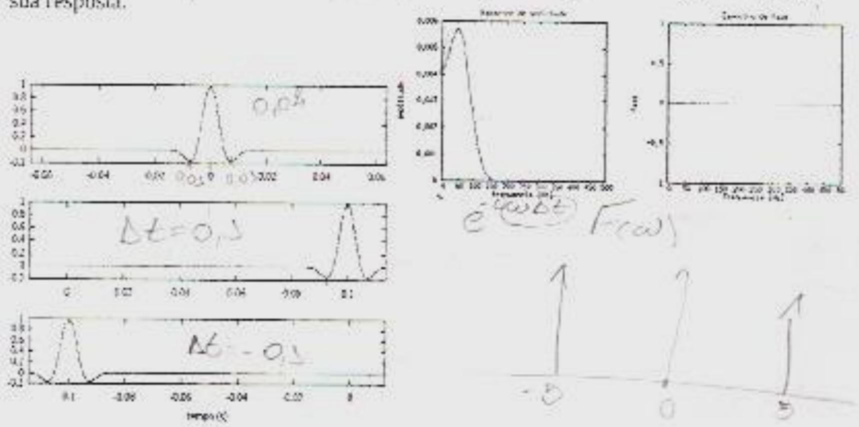
Obs.: No domínio da frequência está representada apenas a metade positiva do espectro da Transformada de Fourier

4.1) Quais os valores do intervalo de amostragem (ou de discretização) nos domínios do tempo (dt) e da frequência (df) para cada uma das situações (a), (b) e (c)?

4.2) Analise o que mudou na amostragem do sinal no domínio do tempo e comente sobre a consequência dessa mudança no cálculo do espectro de amplitude (**Explique conceitualmente**): **4.2.1)** de (a) para (b) **e** **4.2.2)** de (a) para (c)..



5) Os sinais da figura abaixo possuem o mesmo intervalo de discretização e número de amostras no domínio do tempo. Esboce graficamente o que muda nos espectros de amplitude e de fase dos sinais em (b) e (c) em relação aos espectros de (a). E **explique** sua resposta.



E.F = $\omega\Delta t$

EF = $+\omega\Delta t$

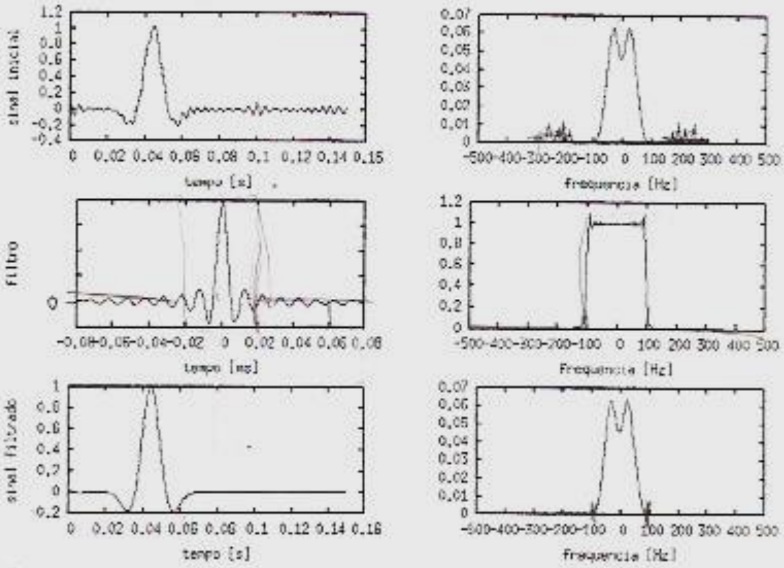
$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{2\pi}{2.10^{-2}}$

$E.F = \frac{2\pi}{2.10^{-2}} \cdot 0,1$

$= 10\pi$

6) A Figura abaixo ilustra um processo de filtragem de frequência corta-alta:

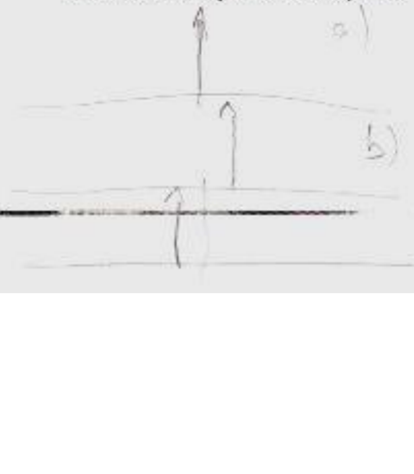


6.1) Explique como o filtro é aplicado ao sinal no domínio da frequência.

6.2) Explique como o filtro é aplicado ao sinal diretamente no domínio do tempo.

6.3) Qual a fórmula analítica do operador de filtragem no domínio do tempo?

6.4) Como o operador de filtragem no domínio do tempo pode ser modificado para atenuar as oscilações do seu espectro.



$\omega = \frac{2\pi}{T}$

1- Como o sinal possui um espectro de amplitude de banda limitada entre 100 e 300 Hz temos que $f_{max} = 300\,Hz$. Portanto com um intervalo de discretização dt igual a 2.10^{-3} s a frequência de Nyquist $f_n = \frac{1}{2.dt} = \frac{1}{4.10^{-3}} = 250\,Hz$.
Para não haver falseamento $f_n \geq f_{max}$ ∴
Neste caso $f_n < f_{max}$, portanto haverá falseamento e o intervalo utilizado não é adequado. Para melhorar o resultado deveria se utilizar $f_n \geq f_{max} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2dt} \geq 300 \Rightarrow \boxed{dt \geq \frac{1}{600}\,s}$$

02- $f(t) = \cos(10\pi t)$ $\quad \omega = 10\pi$
$2\pi f = 10\pi \Rightarrow f = 5\,Hz$

2.1|-
Como $\cos(10\pi t)$ é uma função par temos que $b_k = 0$ ∴ $c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$; $|c_k| = \frac{1}{2} a_k$

$a_1 = 1$; $a_n = 0$

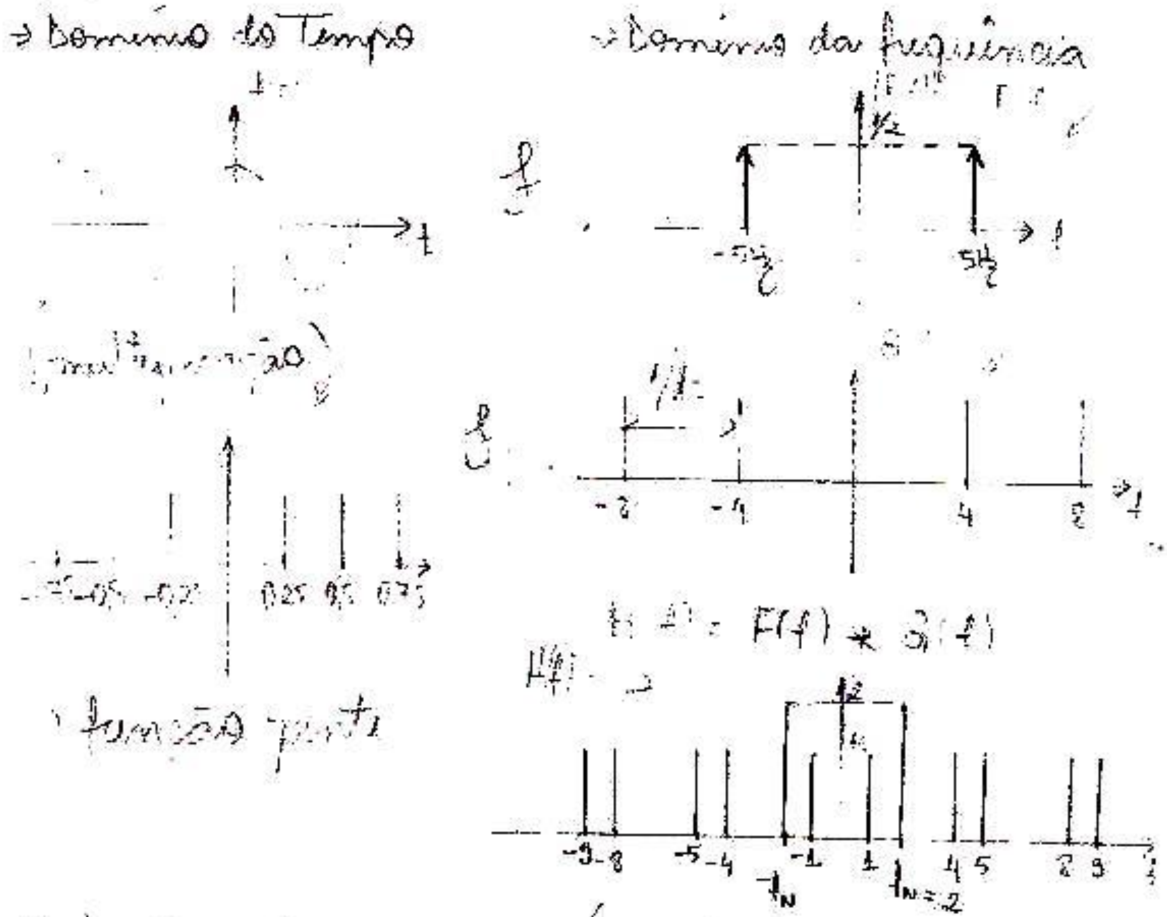
2.2|- Resposta dada na folha à parte.

2.2 - dt 0,25 s

Temos que a frequência de Nyquist é dada por $f_N = \frac{1}{2dt}$; portanto $\boxed{f_N = \frac{1}{0,5} = 2 Hz}$

2.3 - Temos que neste caso $f_N < f_{máx}$; portanto haverá falseamento.

Realizando uma interpretação gráfica temos:



∴ De acordo com o gráfico de H(f) ocorreu falseamento para a 1 Hz.

VIRE →

1 - Resposta Realizada na 2.3 gráfico de H(f).

3 - Sim, tem-se realizar a convolução do sinal com uma função sinc para poder recuperar o sinal original.

4 -

1.1 • Situação a: $dt_a = \frac{1}{2f_N} = \frac{1}{2.250} = \underline{2.10^{-3} s}$

$df_a = \frac{1}{T_{max}} = \frac{1}{0{,}015} \approx 66{,}66\ Hz$

• Situação b: $dt_b = \frac{1}{2f_N} = \frac{1}{2.500} = 10^{-3} s$

$df_b = \frac{1}{T_{max}} = \frac{1}{0{,}015} \approx 66{,}66\ Hz$

* Situação c: $dt_c = \frac{1}{2f_N} = \frac{1}{2.250} = \underline{2.10^{-3} s}$

$df_c = \frac{1}{T_{max}} = \frac{1}{0{,}03} = \underline{33{,}33\ Hz}$

2 -

4.2.1 - de (a) para (b):

Neste caso temos que o $dt_a > dt_b$, o que mostra no domínio do tempo uma função mais suave e no domínio da frequência temos o mesmo df porém o intervalo de amostragem é maior.

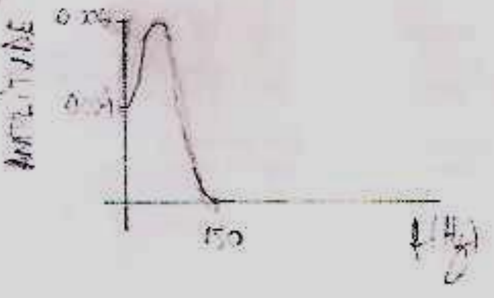
4.2.2 - de (a) para (c):

Neste caso temos que $dt_A = dt_c$ e o que muda é o valor de df ($d_{fA} > d_{fc}$). No domínio da frequência a função em c se mostra mais suave devido seu df ser maior que em a. Já no domínio do tempo o que muda é o intervalo de amostragem que é maior em c do que em a.

5 - Temos que nos três gráficos o espectro de amplitude não vão mudar, portanto o gráfico de b e c são:

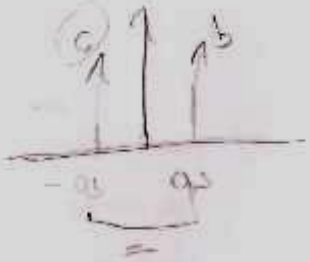
VIRE →

Espectro de amplitude b e c:



(b e c)

Neste caso o espectro de fase



(b) (c)

06 -

6.1 - Ele anula todas as frequências indesejadas multiplicando-se a função causada pela função inicial no domínio da frequência

6.2 - Realizando-se uma convolução do filtro com o sinal inicial.

6.3 - É a função sinc que é:

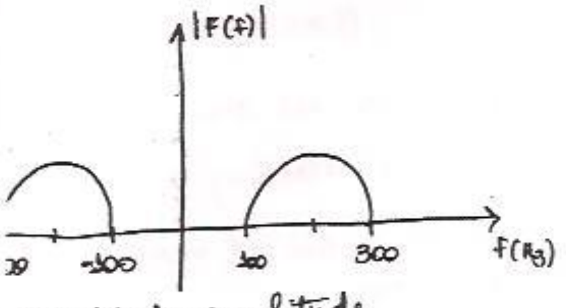
$$\text{sinc} = \frac{2 \cdot A \cdot f_0 \cdot \text{sen}(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$$

6.4 - Aumentar a sua frequência.

Prova 1 /2007 - Processamento de Sinais Digitais

Parte I

1_ $dt = 2ms$



O equivalente matemático da amostragem é a multiplicação da função contínua $f(t)$ por um trem de impulsos $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kdt)$. dt é o intervalo de amostragem.

Espectro de amplitude

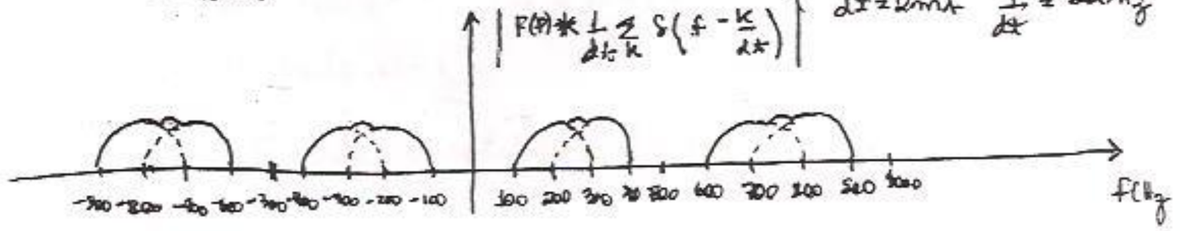
Esta multiplicação no domínio do tempo equivale a uma convolução no domínio da frequência.

$$f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kdt) \iff F(f) * \frac{1}{dt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{dt}\right)$$

$\frac{1}{T} \geq 2F_c$

$500 \geq 400$

$dt = 2ms \quad \frac{1}{dt} = 500Hz$



note que houve uma sobreposição dos gráficos, o que gera um falso espectro de amplitude.

A frequência de Nyquist (F_N) desta amostragem é $F_N = \frac{1}{2dt} = 250Hz$

para que este falseamento da frequência não ocorra, a frequência de nyquist deve ser tal que : $F_N \geq f_{máx}$, $f_{máx}$ = máxima frequência da função.

Como houve falseamento, o sinal foi mal amostrado pois o sinal não pode ser recuperado a partir do espectro de amplitude do sinal discreto.

$f = 5\,Hz$, $T = \frac{1}{f} = 0{,}2\,s$, $\omega = 2\pi f = 10\pi$ rad/s

amplitude = 1

(a) Desenhe o espectro de amplitude da função contínua.

$f(t) = \cos(10\pi t)$

$f(t)$ pode ser escrita como série de Fourier.

Os coeficientes c_k da série complexa são: $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp i b_k)$

Como b_k são os termos que correspondem aos senos, $b_k = 0$.

$$\cos(10\pi t) = \overset{a_1}{1} \cdot \cos(\overset{k}{1} \cdot \overbrace{2\pi \cdot 5}^{\omega_0} \cdot t)$$

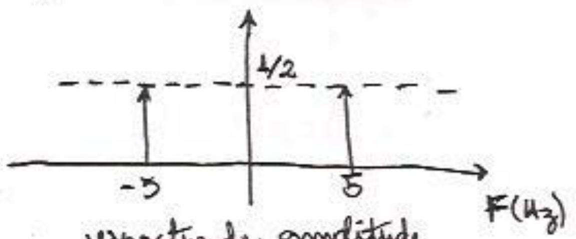
Logo, $a_1 = 1$ e $a_k = 0$ para qualquer $k \neq 1$.

Assim, $f(t)$ pode ser escrita como: $f(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_{-1} e^{-i\omega_0 t}$

$c_1 = |c_1| e^{i\theta_1}$ e $c_{-1} = |c_{-1}| e^{-i\theta_{-1}}$

$|c_1| = |c_{-1}| = \frac{1}{2}$

O espectro de amplitude de $f(t)$ é $|c_k|$



espectro de amplitude

Desenhe o espectro de amplitude da função discretizada com um intervalo de amostragem no tempo igual a 0,25 s:

[- f_N : f_N]

$f = 5$ Hz, $T = 0,2$ s, $w = 10\pi$ rad/s, amplitude = 1, $dt = 0,25$

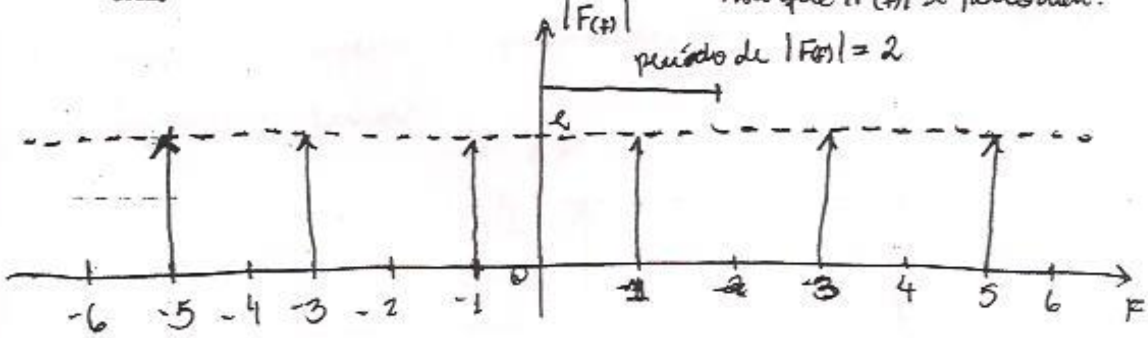
$$f_t = f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 0,25k) \Leftrightarrow F(f) = F(f) * \frac{1}{0,25} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{0,25}\right)$$

O espectro de amplitude da função discretizada (f_t) é $|F(f)|$:

[-2, 2]

$F_N = \frac{1}{2dt} = \frac{1}{0,5} = 2$ Hz

Como $f_{max} > F_N$, houve falseamento.
note que $|F(f)|$ é periódica.



Como $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/0,25)$ é uma função periódica, a convolução com $F(f)$ resulta em uma função periódica.

(a) O sinal é periódico. Isso é evidenciado no espectro de amplitude, pois este é composto de 2 picos, um em $f=10Hz$ e outro em $f=100Hz$. Esse sinal deve ser uma composição de funções senóides e/ou cossenóides com frequências 10Hz e 100Hz.

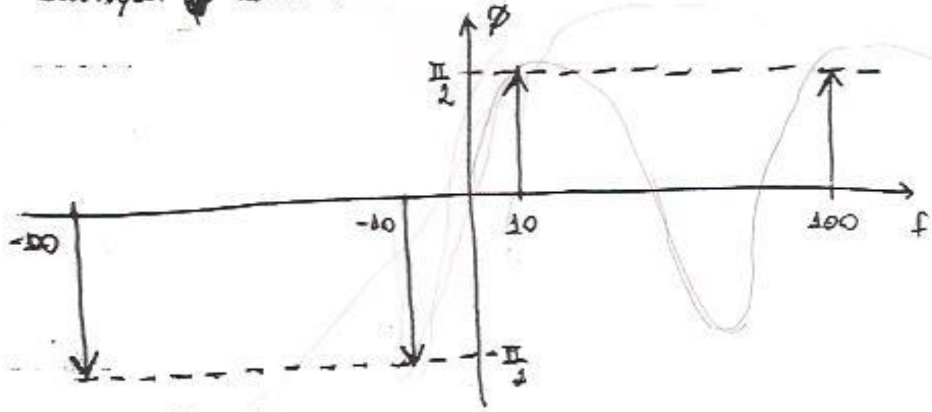
$$f(t) \cong 0{,}5 \cdot e^{i \frac{10 \cdot 2\pi}{\omega_0} \cdot t + \phi_1} + 0{,}04\, e^{i \frac{10}{k} \cdot \frac{10\, 2\pi}{\omega_0} t + \phi_0}$$

Aparentemente 10Hz é a frequência fundamental.

Obs: Trata-se de duas funções senos uma com $f_1 = 100Hz$ e outra com $f_2 = 10Hz$, sendo que esta possui uma amplitude maior que aquela.

(b) Como é o espectro de fase desse sinal?

Funções senos



(c) Qual o intervalo de amostragem do sinal no domínio do tempo?

A frequência máxima vista no espectro de amplitude é 500Hz

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2 f_N} = \frac{1}{2 \cdot 500} = 1\,ms$$

Portanto, o intervalo de amostragem do sinal no domínio do tempo é 1ms.

$f(t-a) \longleftrightarrow F(f)e^{-i2\pi fa}$

$f(t) \longleftrightarrow F(f)$

$g(t) = f(t-a)$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cdot e^{-i2\pi ft}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\cdot e^{-i2\pi ft}\,dt$$

$t - a = \lambda \Rightarrow t = \lambda + a \Rightarrow dt = d\lambda$

$t \to \infty \quad \lambda \to \infty$

$t \to -\infty \quad \lambda \to -\infty$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cdot e^{-i2\pi f(\lambda+a)}\,d\lambda = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cdot e^{-i2\pi f\lambda}\,d\lambda\right]\cdot e^{-i2\pi fa}$$

$G(f) = F(f)\cdot e^{-i2\pi fa}$

Como $f(t-a) \longleftrightarrow G(f)$

Portanto: $f(t-a) \longleftrightarrow F(f)\cdot e^{-i2\pi fa}$

- $x_t \leftrightarrow X_f = A_f e^{i\theta_{xf}}$

$y_t \leftrightarrow Y_f = B_f e^{i\theta_{yf}}$

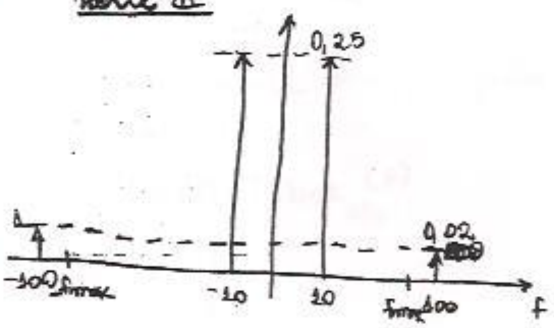
Qual o espectro de amplitude e de fase do sinal $s_t = x_t * y_t$?

$$s_t = x_t * y_t \longleftrightarrow S_f = X_f \cdot Y_f = C_f e^{i\theta_{sf}}$$

$$S_f = A_f e^{i\theta_{xf}} \cdot B_f e^{i\theta_{yf}} = \underbrace{A_f B_f}_{C_f} \cdot e^{i\overbrace{(\theta_{xf} + \theta_{yf})}^{\theta_{sf}}}$$

Logo, o espectro de amplitude de s_t é dado por: $C_f = A_f \cdot B_f$
e o espectro de fase de s_t é dado por: $\theta_{sf} = \theta_{xf} + \theta_{yf}$

Parte II



Para eliminar as frequências acima de $f_{máx}$, o espectro deve ser multiplicado por $box_{2f_{max}}(f)$, que é o espectro de amplitude do filtro. Como o espectro de fase do filtro será somado no do sinal, $\phi_{filtro} = 0$.

A função box no domínio da frequência corresponde a uma função sinc no domínio do tempo.

$$\boxed{box_{2f_{máx}}(f) \Leftrightarrow 2f_{máx}\, sinc(2\pi f_{máx} t)}$$

Como a função $box_{2f_{max}}(f)$ é real, $\phi \equiv 0$.

Logo, a função sinc satisfaz as condições de ser o filtro.

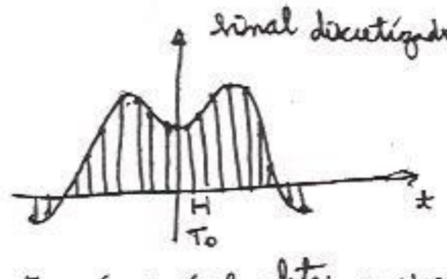
Para filtrar no domínio do tempo:

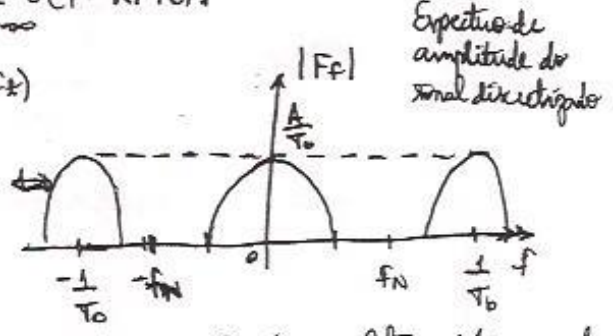
$$\boxed{f_t * 2f_{max}\, sinc(2\pi f_{max} t)}$$

- Amostragem de um sinal contínuo: como as amplitudes que não foram registradas podem ser recuperadas (interpoladas) a partir da teoria da amostragem?

Quando um sinal é amostrado, matematicamente ele é multiplicado por $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)$ (trem de impulsos).

Então, no domínio da frequência ocorre a convolução do espectro do sinal com $\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k/T_0)$.

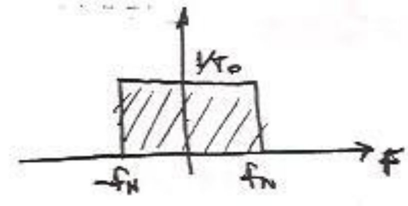




De F_f é possível obter o espectro do sinal $F(f)$:

$$F_f = F(f) \cdot T_0 \, \mathrm{box}_{2f_N}(f)$$

note que há um fator $1/T_0$ multiplicado por A = amplitude do sinal



Utilizando a transformada inversa de Fourier:

$$\boxed{f(t) = f_t * T_0 \, 2f_N \, \mathrm{sinc}(2\pi f_N t)}$$

Assim, se houve falseamento na amostragem, o sinal contínuo pode ser recuperado.

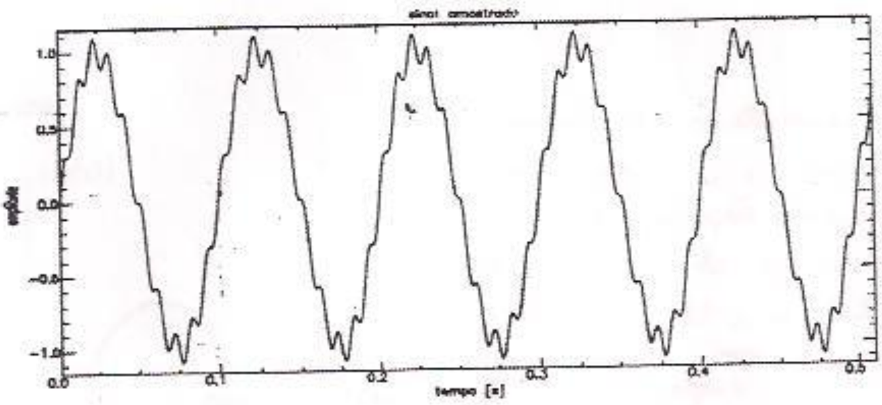


FIGURA 1

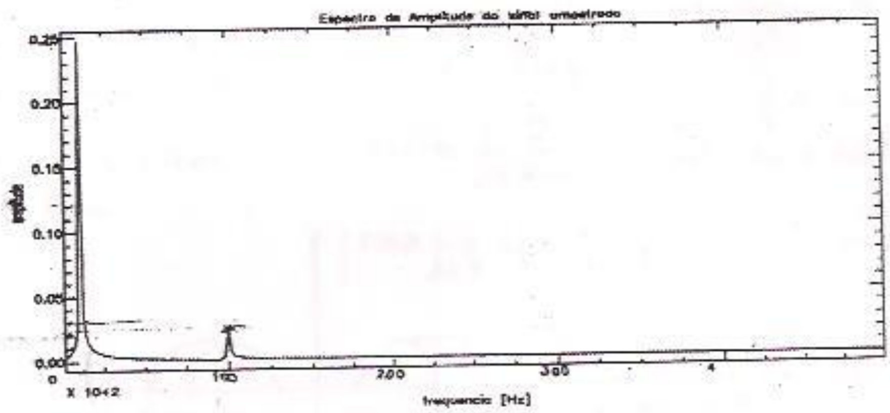


FIGURA 2

PARTE II

Nas próximas aulas aprenderemos filtros de frequência. Vocês já aprenderam todas as ferramentas necessárias para realizar a filtragem, tentem perceber como seria possível eliminar a componente de 100Hz das Figuras 1 e 2.

Primeiro analisem como o filtro é aplicado no domínio da frequência. Qual seria o processo matemático a ser realizado no domínio da frequência, ou seja: como seria o espectro de amplitude do filtro e qual a conta a ser efetuada para zerar as frequências acima de 90Hz, e como seria o espectro de fase do filtro para não alterar o espectro de fase do sinal.

Em seguida descreva como o mesmo processo pode ser realizado diretamente no domínio do tempo.

$\frac{1}{200} \cdot \frac{1}{2} \frac{}{100} = 0,5 \cdot 0,01$ 0,005