7,1

AGG0330 – Prova 1

31/05/2017

Esta prova é composta de 6 questões, sendo 1 (uma) de múltipla alternativa e 5 discursivas.
Boa Prova!

Nome: Hugo Diego de Souza Diniz Oliveira 8962321

1,0 **[2,0] 1)** Espectro analítico da Transformada de Fourier X Espectro digital da DFT

1.1) Cite quais são as possíveis diferenças entre o espectro da Transformada de Fourier analítica (FT) de um sinal contínuo e o espectro da Transformada Discreta de Fourier (DFT) do mesmo sinal discretizado.

1.2) Explique porque ocorre cada uma das diferenças que você respondeu na questão acima.

1.3) Discuta se é possível evitar ou diminuir alguma das diferenças que você identificou e como isso deve ser implementado.

0,4 **[1,0] 2)** Sobre o Teorema de Amostragem, assinale a(s) alternativa(s) incorreta(s) abaixo:

a) Ele afirma que o espectro de um sinal amostrado e contínuo são iguais.

b) Mostra que a convolução no domínio do tempo equivale a uma multiplicação no domínio da frequência ✓

c) É uma forma de se corrigir a contaminação espectral pelo truncamento de um sinal no domínio do tempo.

d) O operador utilizado pelo teorema de amostragem no tempo é resultado da transformada de Fourier inversa de uma caixa com largura igual a frequência de Nyquist

e) O operador utilizado pelo teorema de amostragem no tempo é resultado da transformada de Fourier inversa de uma caixa com largura igual ao intervalo de amostragem do espectro no domínio da frequência. ✓

[1,0] 3) Considere a seguinte função $\cos(30\pi t)$. Desenhe o seu espectro de amplitude quando esta função fosse amostrada com um intervalo de discretização de 0.05s. **Explique a resposta.**

[2,0] 4) Qual é o maior valor de dt (intervalo de discretização) que pode ser utilizado para amostrar função f(t) = sinc(πt) ? **Explique.**

1,5 **[2,0] 5)** Considere dois sinais com o mesmo espectro de amplitude. Um dos sinais possui espectro de fase igual a zero. O outro sinal possui o espectro de fase linear dado pela função **φ(f)=-5πf.**

Como exatamente diferem esses sinais no domínio do tempo? Quantifique a sua resposta o máximo que você puder a partir das informações disponibilizadas.

(6)

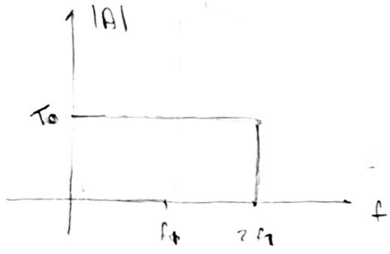
a) O espectro da função Delta foi truncada no domínio da frequência para um intervalo na frequência, isso é equivalente a uma função caixa, cuja T.I.F é a função sinc.

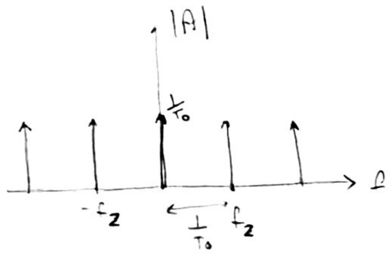
b) espectro do sinc

$T_0 = 20 \rightarrow f_2 = \frac{1}{2T_0} = \frac{1}{40}$

espectro do Delta

$T_0 = 20 \rightarrow f_2 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{20}$





O espectro da função Delta é periódico, ou seja, não limitado, já da função sinc é limitado.

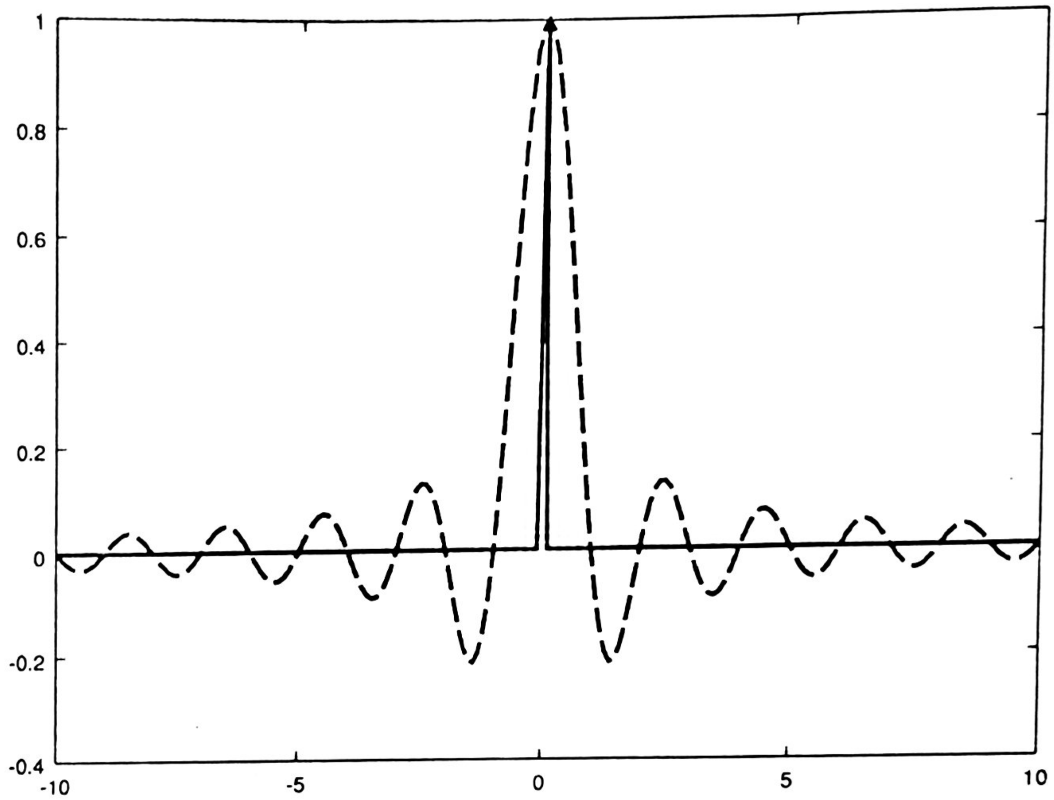
No caso da função Delta o Tmáx (janela de amostragem) é $T_0 = 20$, seu espectro de amplitude é uma função pente de período na frequência $f_2 = \frac{1}{T_0}$ e amplitude $\frac{1}{T_0}$.

No caso da função sinc, o espectro é uma função caixa, cuja largura é o dobro da frequência de Nyquist, nesse caso $2f_2$, $f_2 = \frac{1}{2 \cdot T_0}$ e a amplitude é T_0, sendo T_0 o período do sinc, $T_0 = 20$

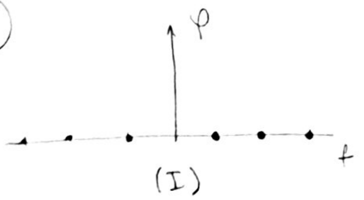
[2,0] 6) Seja um sinal impulso no domínio do tempo (função Delta, linha cheia na figura abaixo). Responda:

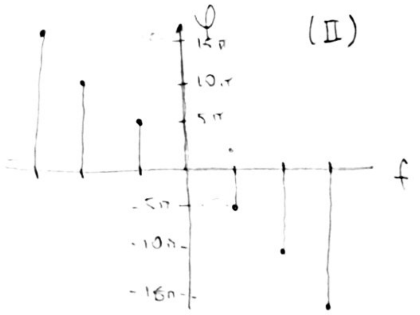
1,0 **a)** Que transformação ocorreu no espectro do impulso, que ao retornar para o domínio tempo, o impulso foi transformado para a função sinc(πt) (linha pontilhada)?

0,2 **b)** Descreva quantitativamente os espectros de amplitude dos sinais. Ambos os sinais são de espectro limitado ?



5





A partir do espectro de fase (I) podemos supor que o sinal dessa função possa ser $f(t) = \cos(3\pi f t)$, já que a fase é zero para qualquer f.

Já para o espectro de fase (II) há um aumento da fase de acordo com o aumento da frequência, ou seja a fase depende linearmente de f, podemos dizer então que o sinal de (II) é algo do tipo $g(t) = \cos(2\pi f t + \varphi(f))$, $\varphi(f)$ é dado por $\varphi(f) = -5\pi f$.

continua atrás

5

$f(t) = \cos(2\pi t)$; $g(t) = \cos(2\pi t - 5\pi)$

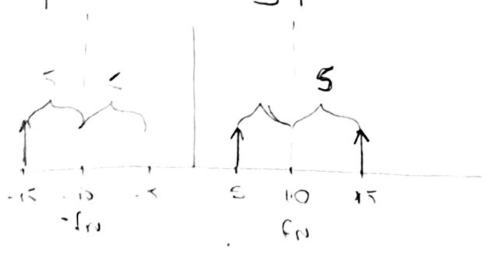
No caso para $T = 1$ ($f = 1$), há um deslocamento no tempo de $\overset{+}{-}5\pi$, ocorrendo inversão na polaridade do sinal. Com o aumento de f haverá um maior deslocamento de fase e outra inversão na polaridade (ex: $f = 2$, $\varphi(f) = -10\pi$, polaridade positiva), além da diminuição do período da função.

3 $f(t) = \cos(30\pi t) = \cos(2\pi\, 15 \cdot t)$ $dt = 0.05s$

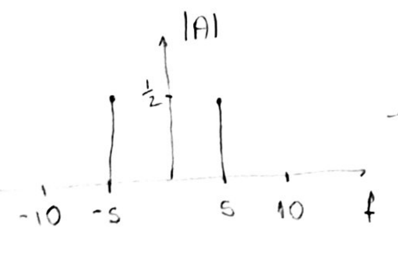
$f_0 = 15 Hz$

$$f_N = \frac{1}{2 \times 0.05} = \frac{1}{0.1} = 10 Hz$$

Temos que a frequência máxima do nosso sinal é maior que a f_N (frequência de Nyquist), dessa forma haverá falseamento.



→ cálculo do falseamento



→ espectro de amplitude

(1)

$f(t) = \text{sinc}(\pi t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

$\frac{\sin \pi t}{\pi t} = 0$, $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Quanto $t = n$, $n \in \mathbb{N}$, temos os zeros da função sinc, nesse caso um dt inteiro amostraria apenas os zeros, o máximo valor inteiro positivo que amostra os zeros é $dt = 1$, portanto para amostrar minimamente o sinc $dt < 1$.

(1)

1.1) No caso da DFT, é necessário discretizar e truncar o sinal, por isso pode ocorrer falseamento e contaminação do espectro

O espectro da DFT é discreto e periódico, o espectro da TF costuma ser contínuo (e ~~periódico~~)(exceto casos de funções já periódicas).

1.2) O falseamento ocorre pela escolha do intervalo de discretização que, quando mal escolhido, faz com que as altas frequências falseie as frequências mais baixas

A contaminação ocorre por causa do truncamento do sinal original que, dependendo da janela de amostragem escolhida pode gerar influências no espectro (geradas pela interpolação)?

1.3) O falseamento pode ser evitado ao escolher um intervalo de discretização suficientemente pequeno para englobar a maior frequência do sinal original ($dt = \frac{1}{2f_N}$)

atrás →

A contaminação pode ser reduzido ao truncar (o sinal original

e se o sinal não for periódico?

em um período), dessa forma evita que a contaminação apareça

no espectro. Em alguns casos é válido aumentar a janela de amos-

tragem ao acrescentar zeros, porque isso fará com que o intervalo de

amostragem da frequência diminua e o espectro seja melhor amostrado,

mas ainda haverá contaminação.

12/15 → 8

AGG330 **PROVA 2 – 05/07/2017**

Nome: Hugo Rugo de Souza Ruiz Oliveira 8962381

Amostragem

X (1.0) **1)** Qual a importância do conceito de falseamento de frequência para definir a amostragem de um sinal?

2) Um sinal que possui um espectro de amplitude de banda limitada entre 100 e 250Hz foi registrado com um intervalo de amostragem no tempo (dt) igual a **1ms**. O ruído presente nos dados cobre toda a faixa de frequências amostradas. Se for necessário diminuir o tamanho do arquivo de dados, reamostrando o sinal para um intervalo maior:

X (1.0) **a)** alguma filtragem deve ser efetuada neste sinal antes da reamostragem?

(1.0) **b)** qual o máximo intervalo que poderia ser utilizado para reamostrar o sinal?

DFT

0,5 (1.0) **3)** Que cuidado devemos ter para truncar um sinal periódico antes de calcular a DFT ?

4) Quando acrescentar amostras de valor zero no final de um sinal :

0,5 (1.0) **a)** traz vantagens para o cálculo do espectro? **Justifique.**

(1.0) **b) não** traz vantagens para o cálculo do espectro? **Justifique.**

5) Sobre sistemas lineares

(1.0) **a)** Qual a definição de resposta impulsiva de um sistema linear ?

X (1.0) **b)** Como o espectro de amplitude da resposta impulsiva de um sistema linear modifica o espectro de amplitude do sinal de entrada nesse sistema?

6) Filtro passa-banda entre 100 e 400Hz no domínio da frequência

O espectro de amplitude de um filtro passa-banda pode ser desenhado subtraindo-se dois filtros corta-alta: (F1(f) – F2(f)), sendo a frequência de corte maior igual a 300 Hz e a frequência de corte menor igual a 80 Hz.

Para evitar os pontos de descontinuidade do filtro passa-banda idealizado acima, será projetada uma rampa linear com largura de 20Hz em F2(f) (lateral da parte corta-baixa do filtro passa-banda) e uma rampa linear com largura de 100Hz em F1(f) (lateral da parte corta-alta do filtro passa-banda). Essas rampas lineares deverão ser construídas pela convolução de duas funções caixa. Em ambas as rampas a frequência de corte será planejada no meio da rampa linear.

✓ (1.0) **a)** Faça um desenho dos **espectros de amplitude e de fase do filtro passa-banda** descrito acima.

✓ (2.0) **b)** Determine a resposta impulsiva do sistema que corresponde ao processo de filtragem de frequência idealizado nos itens acima.

✓ (1.0) **c)** A resposta do item b é um operador causal ?

7) Filtro inverso

(1.0) **a)** Qual o objetivo da convolução de uma *wavelet* com o seu filtro inverso?

(1.0) **b)** Verifique para quais das *wavelets* abaixo o processo de filtragem inversa funciona. Justifique sua resposta.

I) w[t] = (1,2)*(0.5,1)*(-0.5,1)

II) w[t] = (1,2)*(1,0.5)*(-0.5,1)

III) w[t] = (2,1)*(1,0.5)*(1,-0.5)

8) Correlação

(1.0) **a)** Como a correlação pode ser usada para medir a energia do sinal?

(1.0) **b)** Qual o lag que resulta em maior valor na autocorrelação de um sinal?

X (1.0) **c)** Qual o lag de máxima correlação Rxy(t) entre os sinais:

x_t = (0 1 0 -2 0 1 0 0), y_t = (0 0 0 2 0 -4 0 2) ?

Igor Riego de Souza Diniz Oliveira 8962381

① A definição do intervalo de amostragem pode causar ou não o falseamento de frequência. Isso vai depender da maior frequência que o sinal possui, em termos teóricos, essa frequência máxima deve ser menor q. é a frequência de Nyquist e está relacionada ao intervalo de amostragem (dt) da seguinte forma: $2f_N = 1/dt$. Ou seja se o dt for muito espaçado, o suficiente para a frequência f_{max} do sinal (f_N) ser menor que f_N, haverá falseamento, a amplitude máxima estará na frequência errada.

② $dt = 1 \times 10^{-3}$ s

$$f_N = \frac{1}{2\,dt} = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} = 0{,}5 \times 10^{3} = 500\,Hz$$

? a) Pode ser usado um filtro corta-alta e corta-baixa, para tirar as altas e baixas frequências, respectivamente

b) $f_N = 250\,Hz$

$$dt = \frac{1}{2 f_N} = \frac{1}{500} = 0{,}2 \times 10^{-2} = 0{,}002\,s = 2\,ms$$

Sendo a frequência máxima do sinal 250 Hz, o maior intervalo que amostraria esse sinal é dt = 2 ms

③ O truncamento de um sinal é o produto do sinal por uma função caixa (domínio do tempo), no domínio da frequência é uma convolução do espectro do sinal por uma função sinc (TF da box). Essa convolução pode gerar contaminação no espectro.

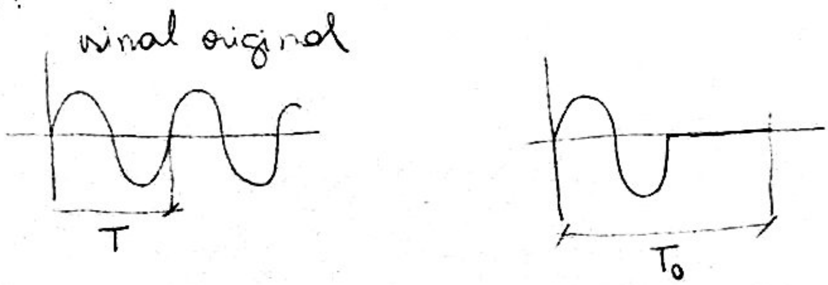
Como a função é periódica o truncamento deve conter em nº inteiro de período ~~no mínimo~~, um período do sinal, caso contrário o período do sinal truncado será outro e o cálculo da DFT será errado

④

a) Quando não se sabe o período do sinal. Uma aquisição real, na qual não se sabe se o sinal é periódico e, caso seja, qual é o seu período acrescentar zeros no final do sinal aumenta a janela de amostragem ($T_{máx}$) e o $T_{máx}$ é relacionado ao intervalo de amostragem na frequência (Δf), pela equação: $2\,T_{máx} = 1/\Delta f$, então quanto maior $T_{máx}$ for melhor amostrado é o sinal. e Quando o sinal for finito.

b) Para um sinal periódico de período conhecido. Um sinal periódico não nulo (tudo zero) não é igual um sinal de um período acrescido de zeros, já que ao acrescentar zeros muda-se o período do sinal, como no exemplo abaixo:

sinal original



$T \neq T_0$, T = período.

Nesse caso o cálculo com o acréscimo de zeros modifica o sinal original não trazendo nenhuma vantagem.

por uma função
... convolução

$h_1(t) - h_2(t) = 600\,\text{sinc}(600\pi t)\,\text{sinc}(100\pi t) - 160\,\text{sinc}(160\pi t)\,\text{sinc}(20\pi t)$ ✓

✓
c) Não, um sinal causal não possui valores diferentes de zero para $t<0$ a função sinc, que é a TFI das funções caixas tem valores para $t<0$

(7)

a) Quando se convolui uma wavelet com seu filtro inverso, busca-se que o resultado seja um impulso ($\delta[t]$)

b)

I - fase máxima
II - fase mista
III - fase mínima

Apenas na wavelet III a filtragem inversa será sucedida porque o resultado da convolução entre uma wavelet e seu filtro inverso só resultará em um impulso se a wavelet for de fase mínima

(8)

a) A autocorrelação de um sinal para o lag $\tau=0$ é o valor da energia do sinal.

b) Na autocorrelação, sempre ocorre o maior valor no lag $\tau=0$.

c)

```
0 1 0 -2 0 1 0 0
0 0 0 2 0 4 0 2    Rxy(0) = -4 -4 = -8
  0 0 0 2 0 4 0    Rxy(1) = 0
    0 0 0 2 0 4    Rxy(2) = 2
      0 0 0 2 0    Rxy(3) = 5
        0 0 0 2    Rxy(4) = 0
          0 0 0
```

O lag $\tau=2$ é o de máxima correlação

X

Higor Diego de Souza Diniz Oliveira 8962381

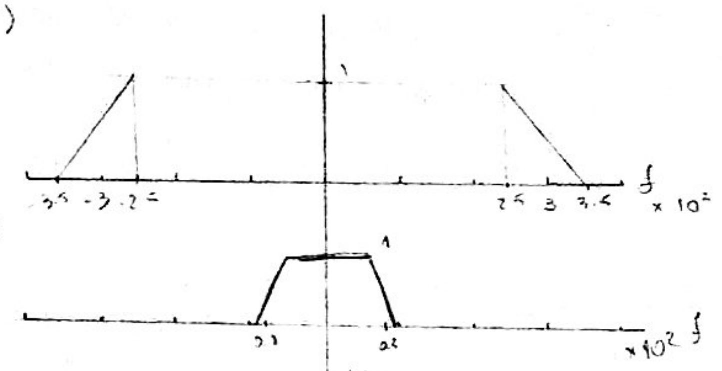
(5)

a) É a resposta de um sistema quando a entrada é um impulso.

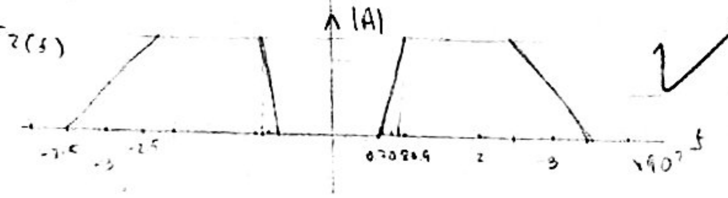
$$\delta(t) \rightarrow \boxed{} \rightarrow h(t)$$

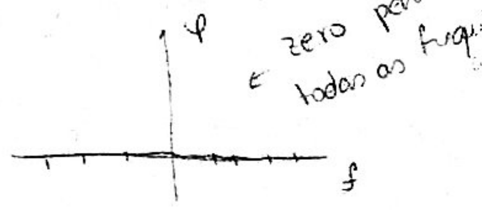
b) Pela convolução do sinal de entrada com a resposta impulsiva do sistema, que gera a saída do sistema

(6) $F_1(f)$



a) $F_1(f) - F_2(f)$





← zero para todas as frequências

b) $F_1(f) \Rightarrow$

$\begin{cases} L + l = 700 \\ L - l = 500 \end{cases}$ $l = 100$, $L = 600$

$h\,l = 1$

$h = \frac{1}{100}$

$h_1(t) = L.H \operatorname{sinc}(L\pi t)\ l\,h \operatorname{sinc}(l\pi t)$

$h_1(t) = 600 \operatorname{sinc}(600\pi t) \operatorname{sinc}(100\pi t)$

$F_2(f) \rightarrow$

$\begin{cases} L + l = 180 \\ L - l = 140 \end{cases}$ $l = 20$, $L = 160$

$h\,l = 1 \rightarrow h = \frac{1}{20}$

$h_2(t) = 160 \operatorname{sinc}(160\pi t) \operatorname{sinc}(20\pi t)$