

Relações trigonométricas

■ $\text{sen}(a+b)$

■ $\text{sen}(a-b)$

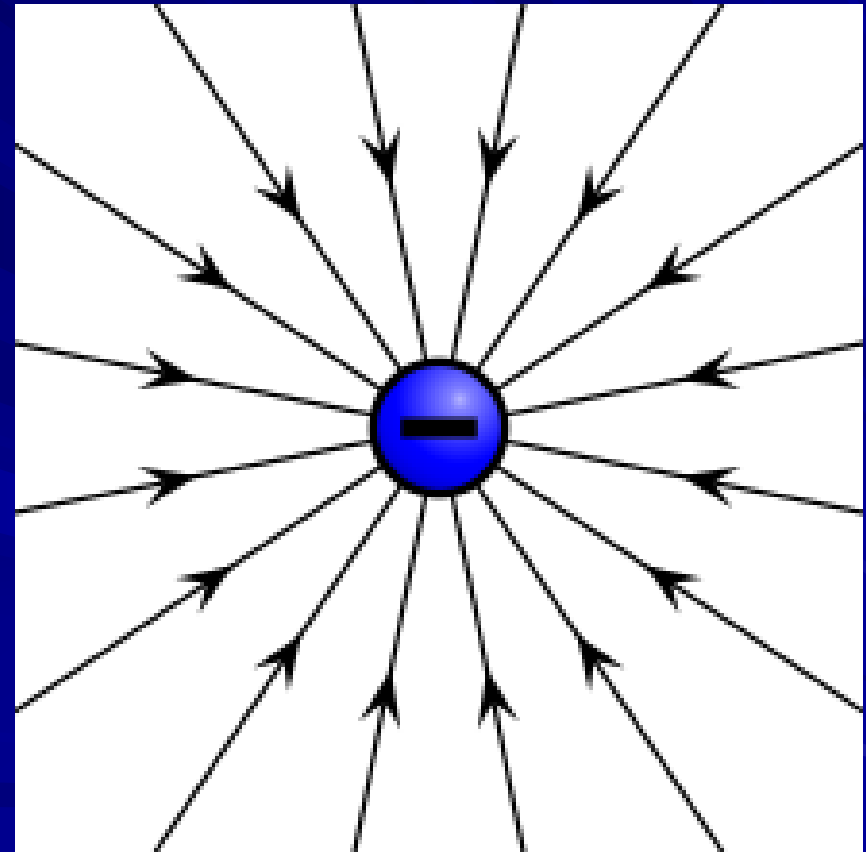
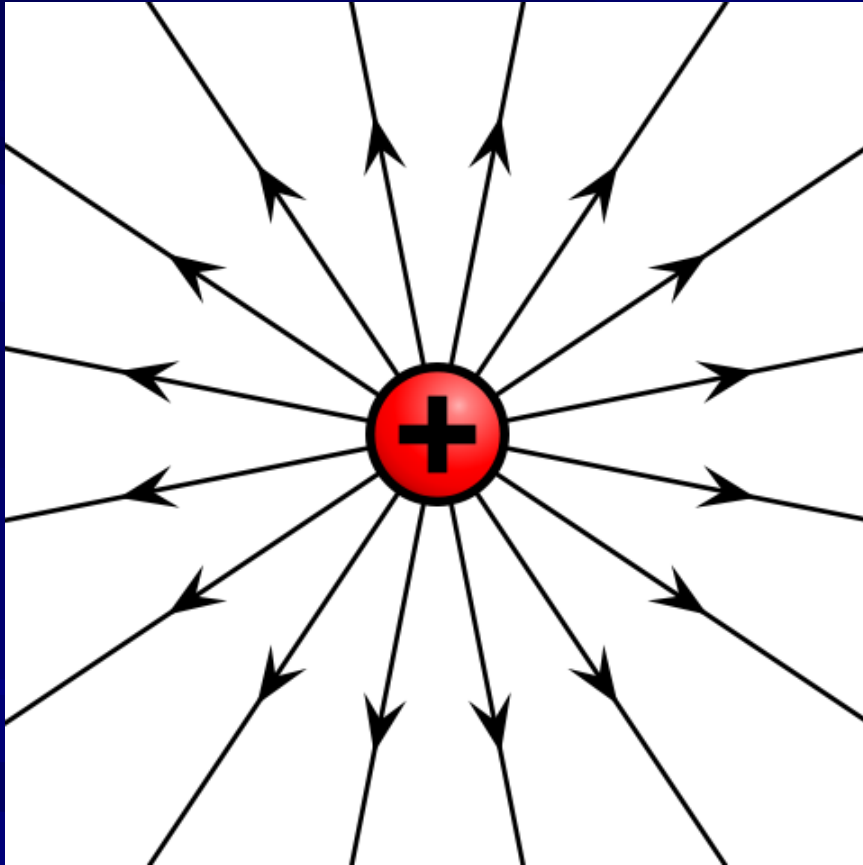
■ $\text{cos}(a+b)$

■ $\text{cos}(a-b)$

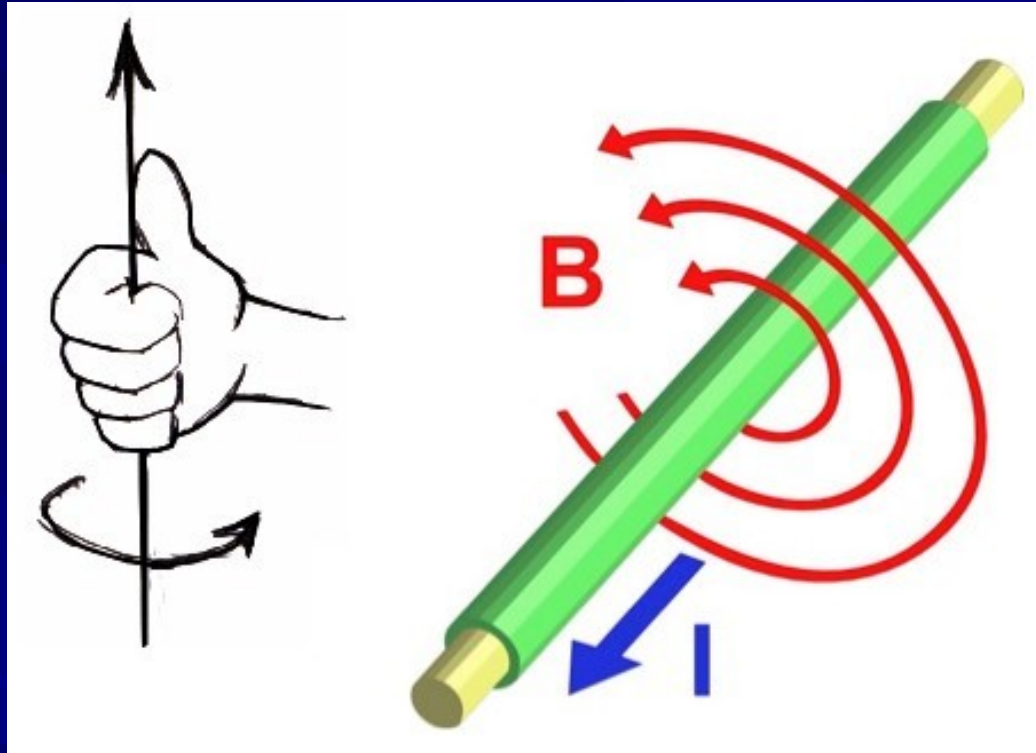
Espalhamento de radiação

Meteorologia Física II

■ Carga elétrica em repouso=> campo eletrostático, constante no tempo



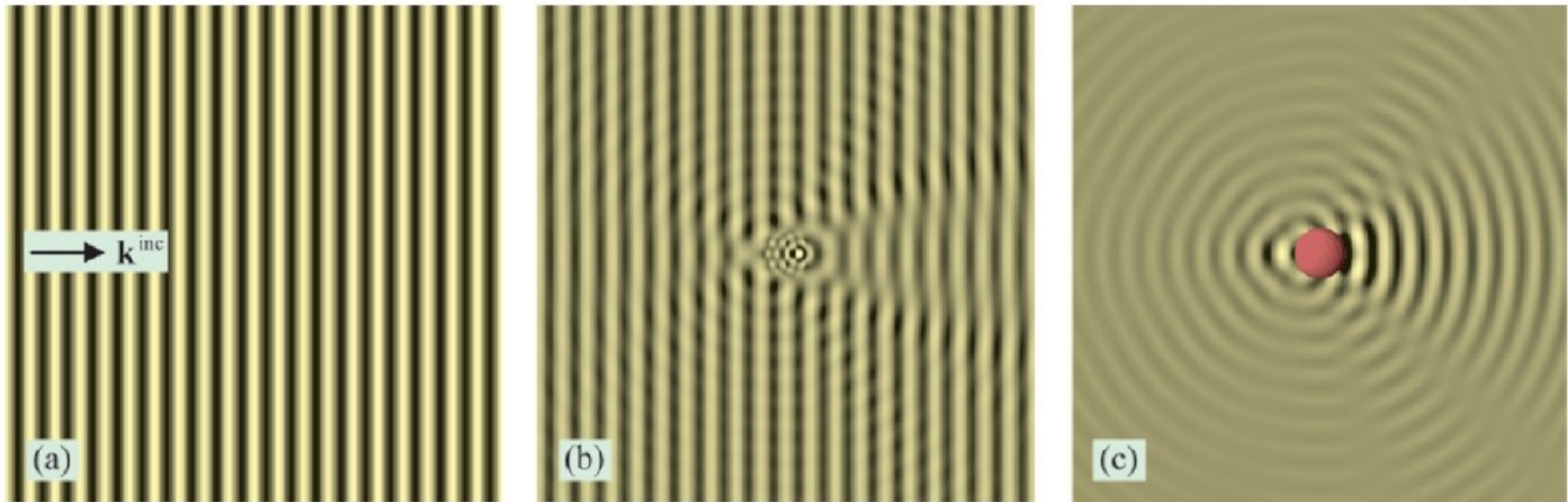
■ Carga elétrica em movimento uniforme =>
campo magnético, constante no tempo



■ Carga elétrica acelerada => campo eletromagnético variável

- Matéria: constituída por **cargas elétricas discretas**
- Quando exposta à radiação => as cargas oscilam com frequência igual à da radiação incidente
- Cargas elétricas oscilantes - origem a ondas eletromagnéticas
- ... as **ondas espalhadas**
- Portanto, a radiação incidente, ao excitar os espalhadores, gera ondas secundárias
- superposição de todas essas ondas eletromagnéticas é o que é observado (medido).

Propagação de onda plana



- a) Na ausência de partícula;
- b) na presença de uma partícula esférica;
- c) onda espalhada (diferença entre a e b), que se propaga em todas as direções!!! (Extraído de Mishchenko, J. Quant. Spectroscopy & Radiative Transfer 110, 2009)

- Grande parte da luz que percebemos chega aos nossos olhos por espalhamento
- Na atmosfera, o espalhamento é causado por:
 - Moléculas de gases (quais os mais abundantes?)
 - Partículas de aerossol
 - Nuvens

Type	Size	Number
Gas molecule	$\sim 10^{-4} \mu\text{m}$	$< 3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$
Aerosol, Aitken	$< 0.1 \mu\text{m}$	$\sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$
Aerosol, Large	$0.1\text{--}1 \mu\text{m}$	$\sim 10^2 \text{ cm}^{-3}$
Aerosol, Giant	$> 1 \mu\text{m}$	$\sim 10^{-1} \text{ cm}^{-3}$
Cloud droplet	$5\text{--}50 \mu\text{m}$	$10^2\text{--}10^3 \text{ cm}^{-3}$
Drizzle drop	$\sim 100 \mu\text{m}$	$\sim 10^3 \text{ m}^{-3}$
Ice crystal	$10\text{--}10^2 \mu\text{m}$	$10^3\text{--}10^5 \text{ m}^{-3}$
Rain drop	$0.1\text{--}3 \text{ mm}$	$10\text{--}10^3 \text{ m}^{-3}$
Graupel	$0.1\text{--}3 \text{ mm}$	$1\text{--}10^2 \text{ m}^{-3}$
Hailstone	$\sim 1 \text{ cm}$	$10^{-2}\text{--}1 \text{ m}^{-3}$
Insect	$\sim 1 \text{ cm}$	$< 1 \text{ m}^{-3}$
Bird	$\sim 10 \text{ cm}$	$< 10^{-4} \text{ m}^{-3}$
Airplane	$\sim 10 \text{ m}$	$< 1 \text{ km}^{-3}$

Tabela 12.1 de G. W. Petty (2006)

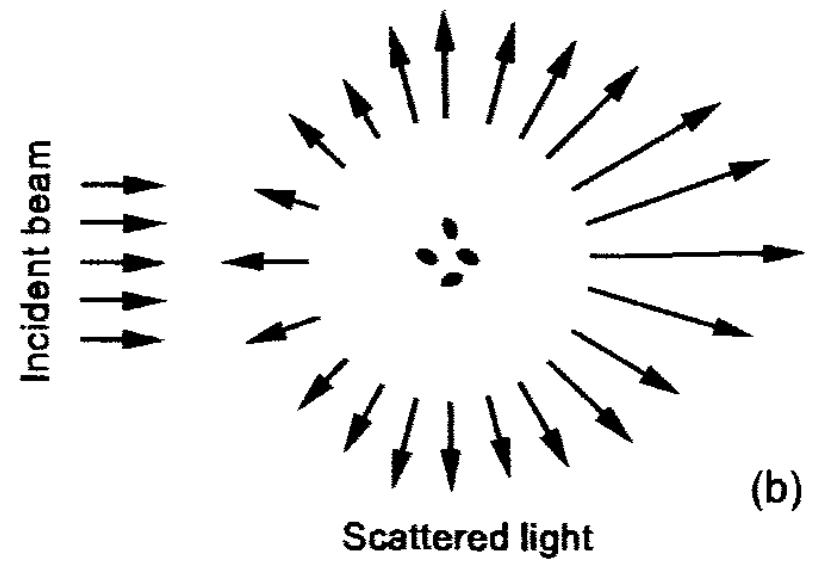
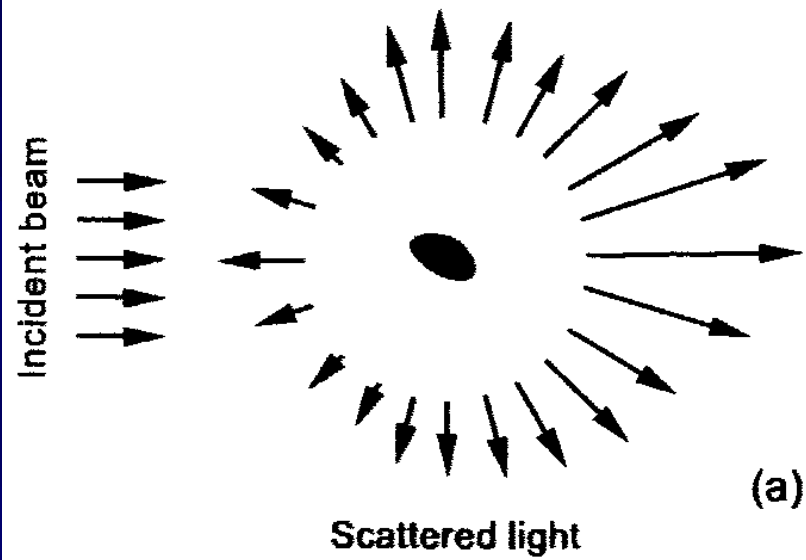
Espalhamento explica:

- Céu azul
- Nuvens branco
- Arco-íris
- Halos
- E outros fenô
ópticos

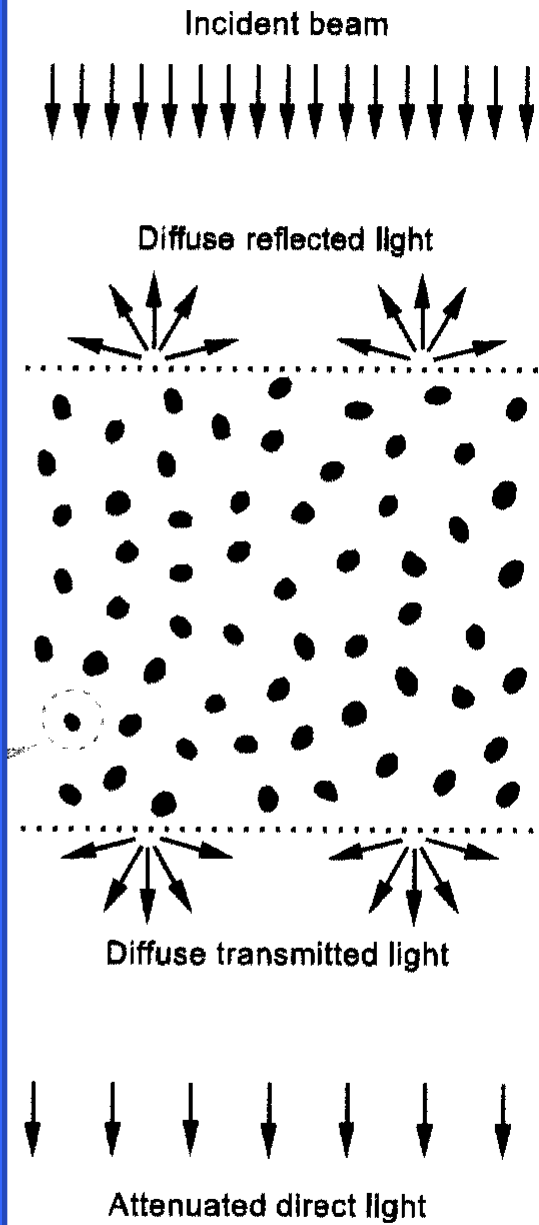


- As ondas eletromagnéticas secundárias são denominadas elasticamente (ou coerentemente) espalhadas
- Reflexão, refração, difração são particularidades para descrever o espalhamento de radiação
- O espalhamento não acontece em orientações aleatórias, mas segue um padrão angular

- A distribuição angular da radiância espectral espalhada nas diferentes direções/orientações (θ, φ) depende:
 - Da relação entre o tamanho da partícula espalhadora e o comprimento de onda da radiação incidente
 - Da composição química da partícula (índice de refração)
 - Da forma da partícula



(Extraído de Mishchenko et al., 2002)



- Partícula esférica de raio: r
- Radiação com comprimento de onda: λ
- Parâmetro de tamanho:

$$x = 2\pi r/\lambda$$

Função de fase: $P(\theta_{\text{inc}}, \varphi_{\text{inc}}, \theta_{\text{esp}}, \varphi_{\text{esp}})$

- Função matemática que descreve a probabilidade do espalhamento ocorrer em determinada orientação

onde:

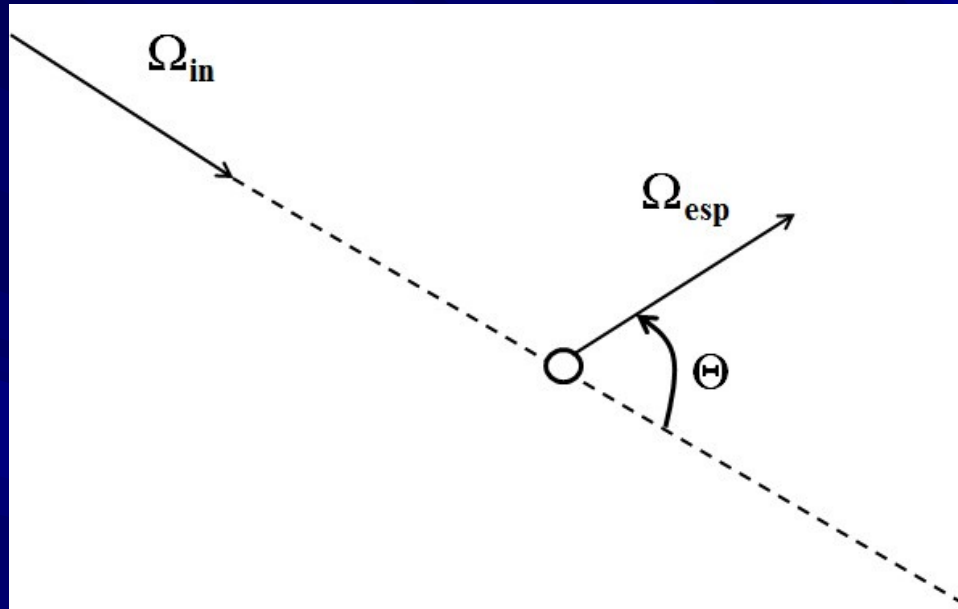
$\Omega_{\text{inc}} = (\theta_{\text{inc}}, \varphi_{\text{inc}}) \equiv$ orientação da radiação incidente

$\Omega_{\text{esp}} = (\theta_{\text{esp}}, \varphi_{\text{esp}}) \equiv$ orientação da radiação espalhada

■ A função de fase é normalizada, tal que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{P(\Theta) \sin \Theta d\Theta d\varphi}{4\pi} = 1$$

Ângulo de espalhamento

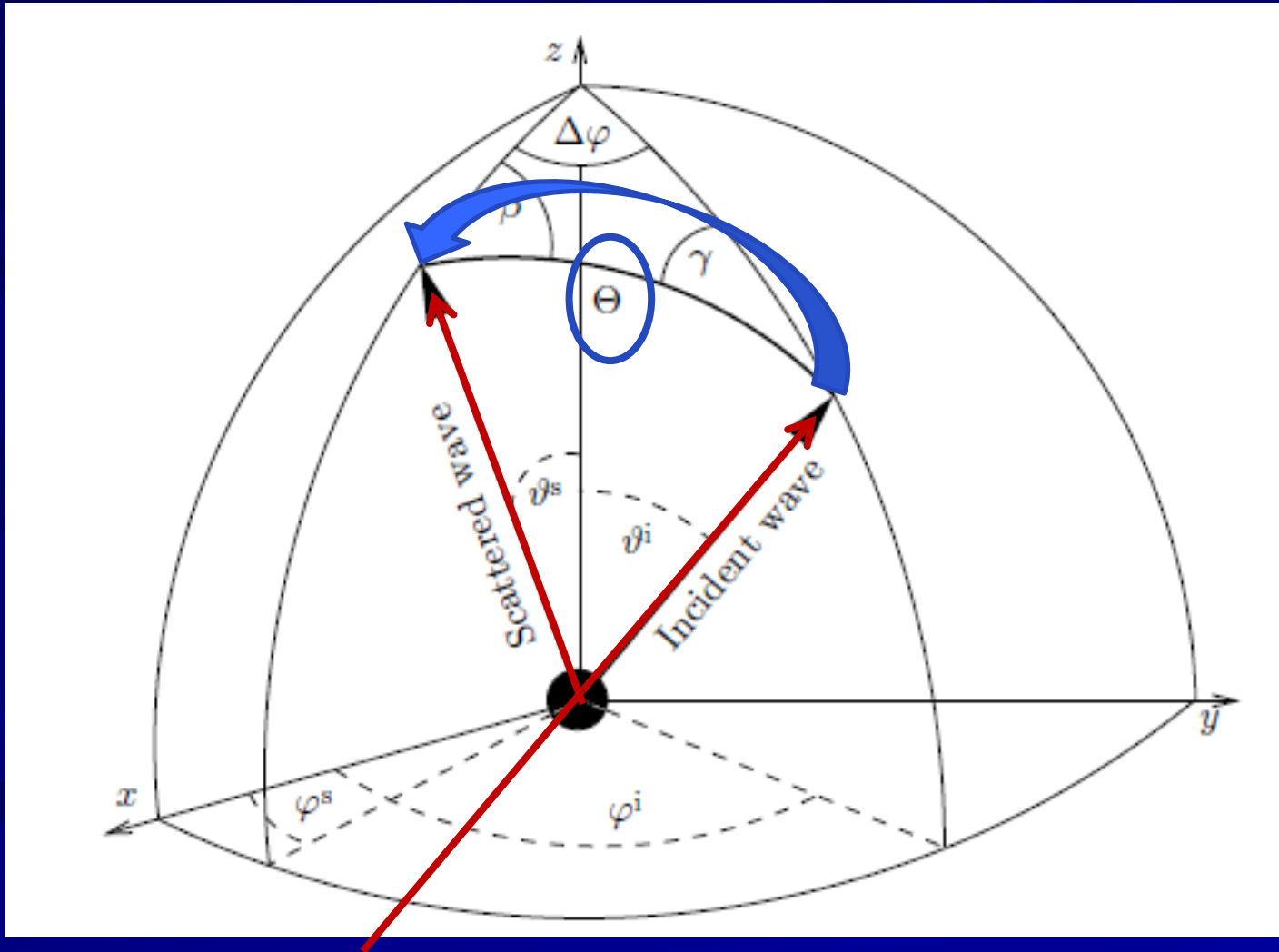


■ Da geometria esférica:

$$\cos\Theta =$$

$$\cos\theta_{\text{inc}}\cos\theta_{\text{esp}} + \sin\theta_{\text{inc}}\sin\theta_{\text{esp}}\cos(\varphi_{\text{inc}} - \varphi_{\text{esp}})$$

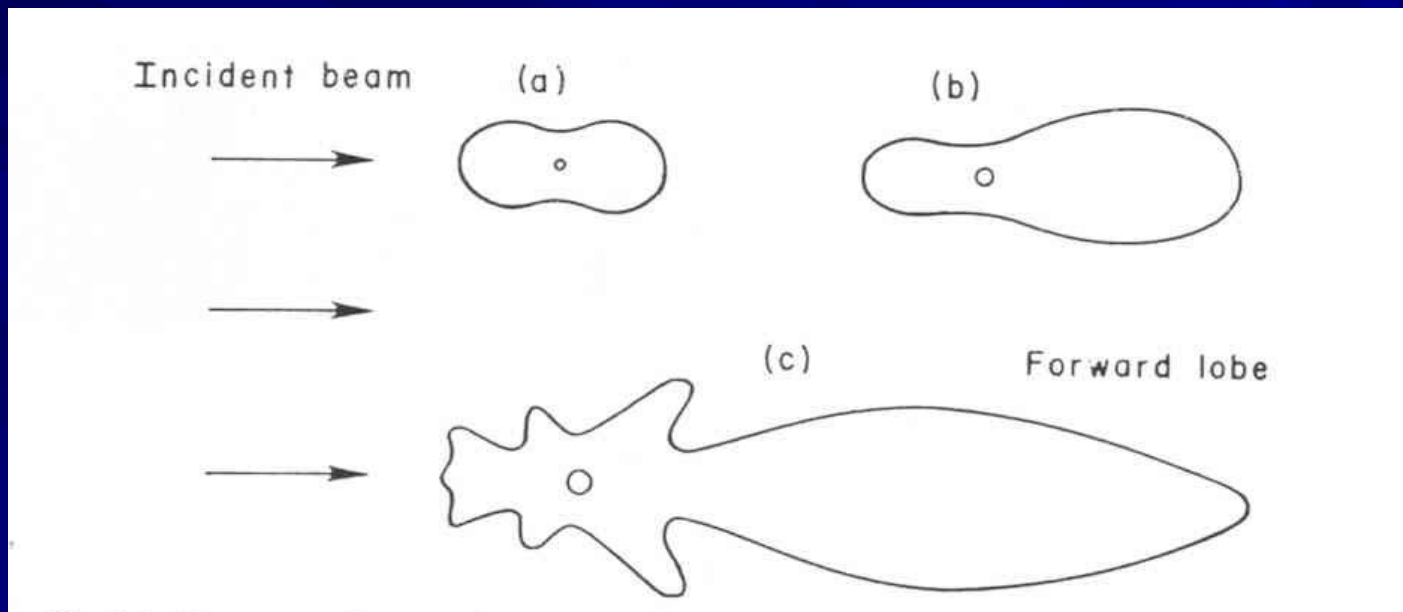
Ângulo de espalhamento



Função de fase

- Função matemática que permite estimar a fração da radiância incidente em (θ_i, φ_i) que foi espalhada para a orientação (θ_e, φ_e)

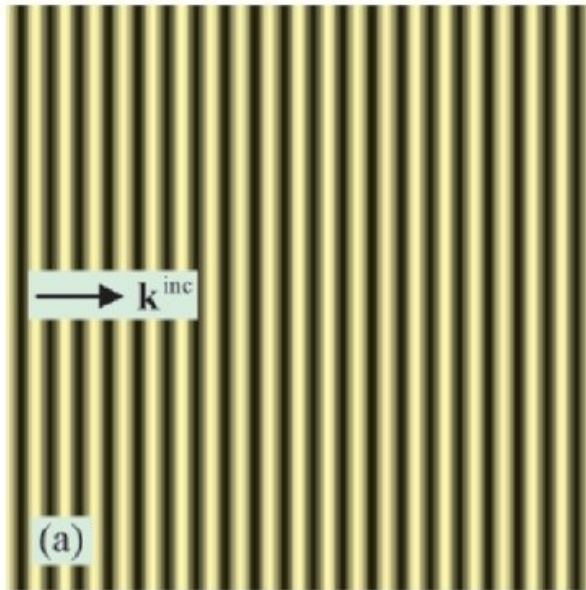
Função de fase



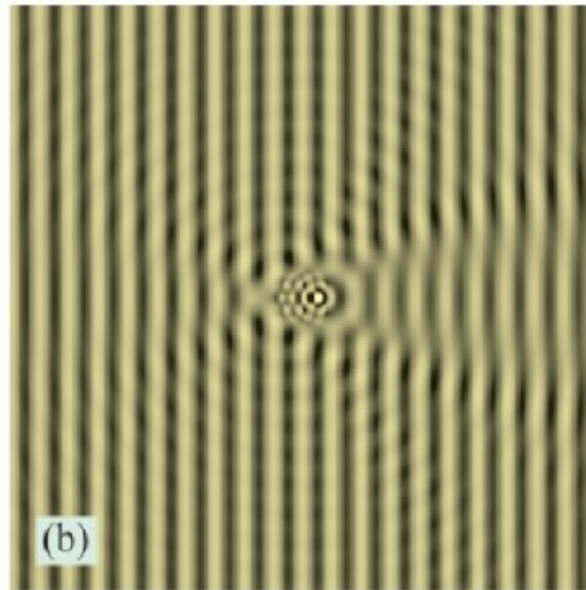
Espalhamento Rayleigh

- Lord Rayleigh em 1871: Radiação incide sobre partícula esférica homogênea com raio $\ll \lambda$
- Radiação produz campo eletromagnético
- $E_0 \rightarrow$ vetor campo elétrico incidente gera configuração de dipolo sobre a partícula que oscila em resposta a E_0 gerando o campo elétrico combinado E

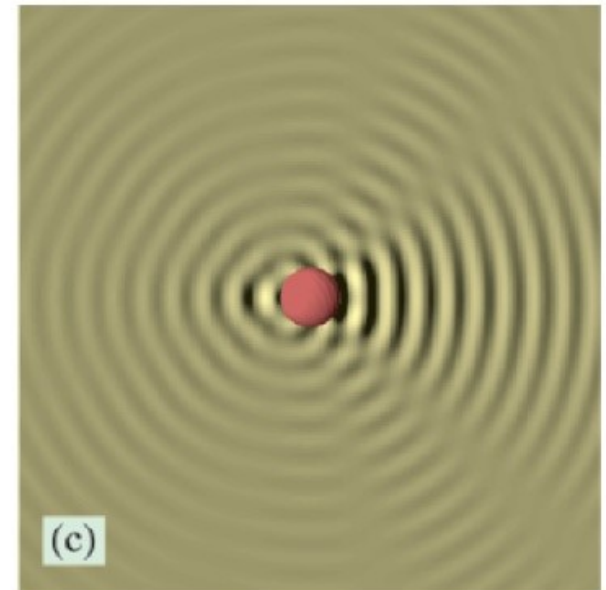
Propagação de onda plana



E_0



E



campo da partícula

■ $\mathbf{p}_0$ -> momento de dipolo induzido

■ $\mathbf{p}_0 = \alpha \mathbf{E}_0$

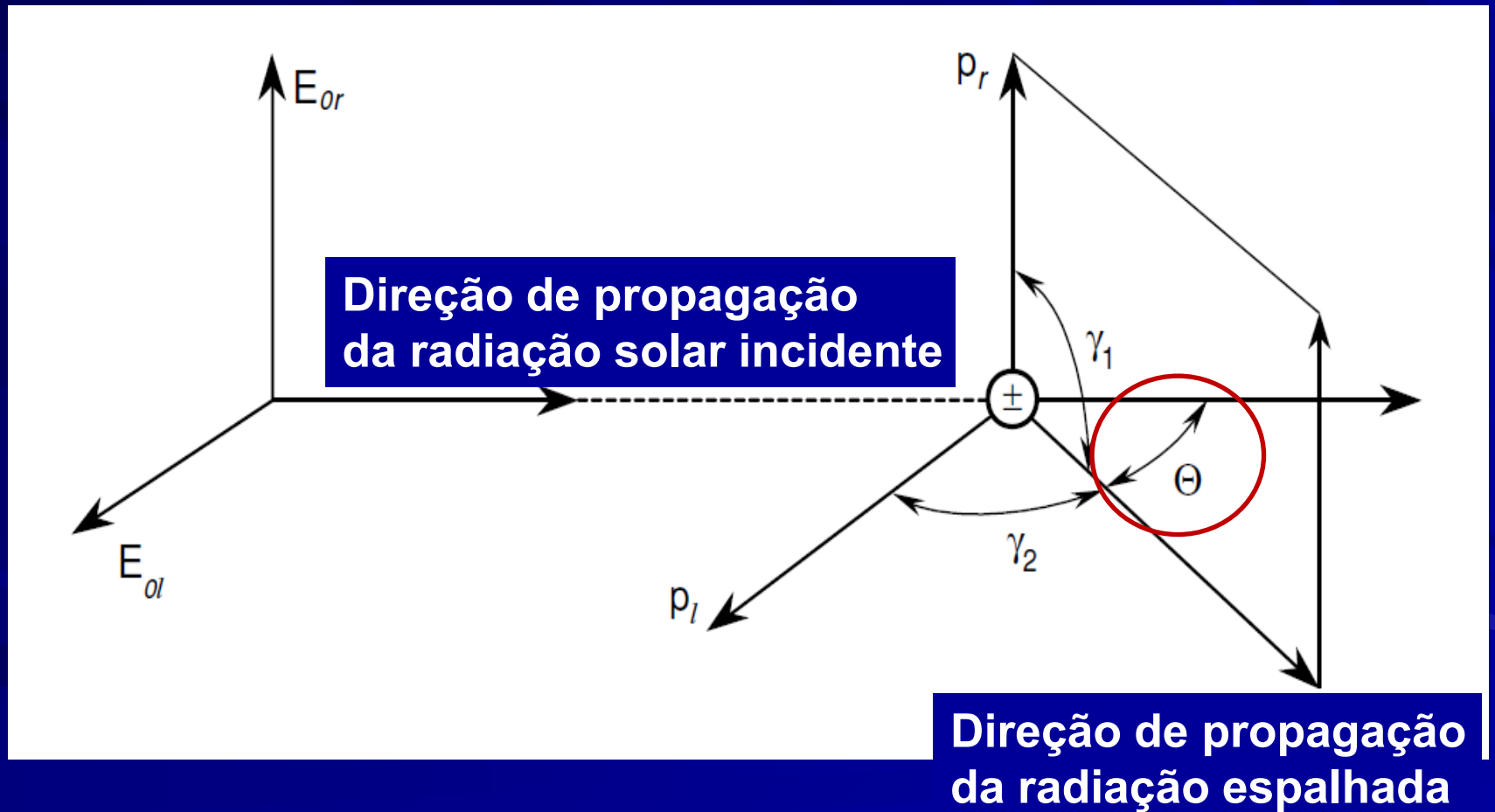
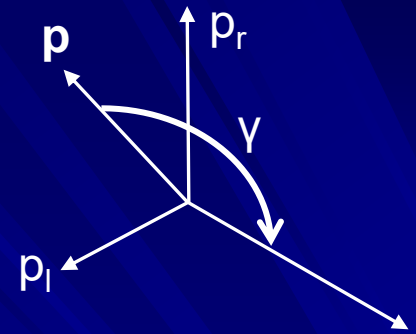
onde α é a polarizabilidade da partícula

- Bem longe da partícula, a uma distância r , o campo elétrico resultante é dado por :

$$E = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \sin \gamma$$

onde $\mathbf{p}$ é o momento de dipolo espalhado e γ é o ângulo entre $\mathbf{p}$ e a direção de observação

Espalhamento Rayleigh



$$p = p_0 e^{-ik(r-ct)}$$

■ onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda modificado

■ Mas, como $E = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \text{sen} \gamma$ e $p_0 = \alpha E_0$

$$\Rightarrow E = -E_0 \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \text{sen} \gamma$$

$$E_r = -E_{0r} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \text{sen} \gamma_1$$

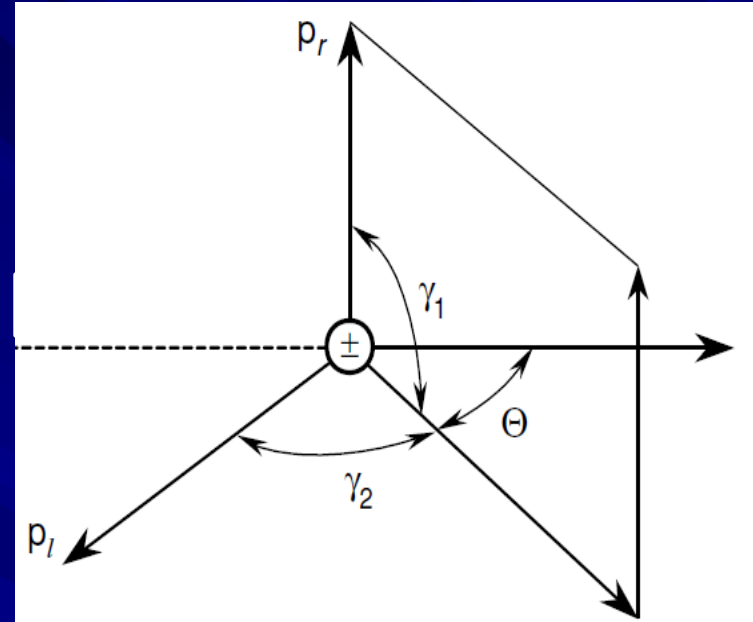
$$E_l = -E_{0l} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \text{sen} \gamma_2$$

Da figura

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \Theta$$

$$E_r = -E_{0r} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha$$

$$E_l = -E_{0l} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \cos \Theta$$



Mas, a radiância é dada por:

$$L_0 = C|E_0|^2 \text{ e } L = C|E|^2$$

onde C é tal que $C/r^2 \sim \text{ângulo sólido}$

Portanto

$$L_r = \frac{L_{or} k^4 \alpha^2}{r^2}$$

$$L_l = \frac{L_{ol} k^4 \alpha^2 \cos^2 \Theta}{r^2}$$

$$L = L_r + L_l = (L_{or} + L_{ol} \cos^2 \Theta) k^4 \alpha^2 / r^2$$

Para radiação não polarizada

$$L_{or} = L_{ol} = \frac{L_0}{2}$$

e lembrando que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow L = \frac{L_0}{r^2} \alpha^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}$$

Radiância espalhada por partícula esférica muito menor que $\lambda \Rightarrow$ Espalhamento Rayleigh ou espalhamento molecular!

A função de fase é dada por

$$P(\cos\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta)$$

$$\Rightarrow L = \frac{L_0}{r^2} \alpha^2 \frac{128\pi^5}{3\lambda^4} \frac{P(\Theta)}{4\pi}$$

■ Θ é o ângulo de espalhamento:

$\Omega_{inc} = (\theta_{inc}, \varphi_{inc}) \equiv$ orientação da radiação incidente

$\Omega_{esp} = (\theta_{esp}, \varphi_{esp}) \equiv$ orientação da radiação
espalhada

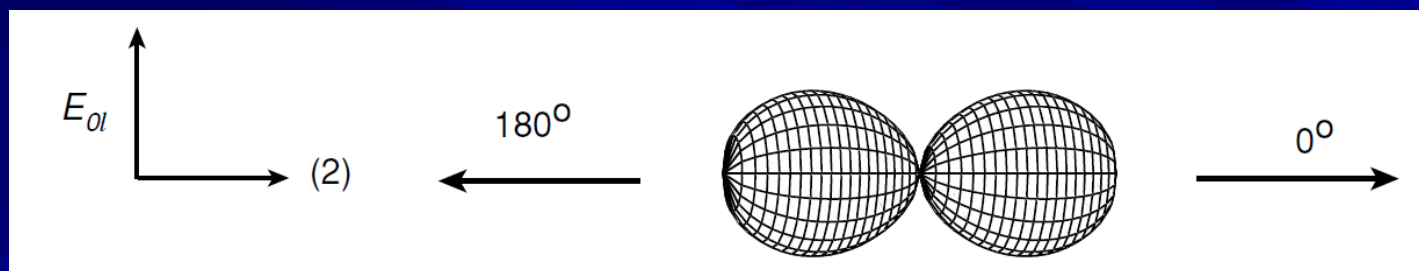
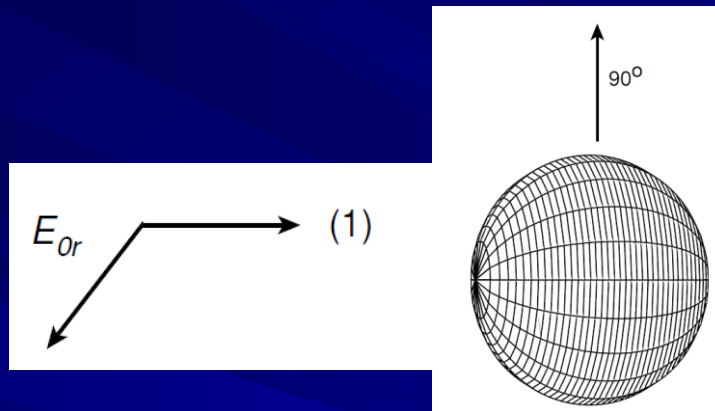
$\cos\Theta$

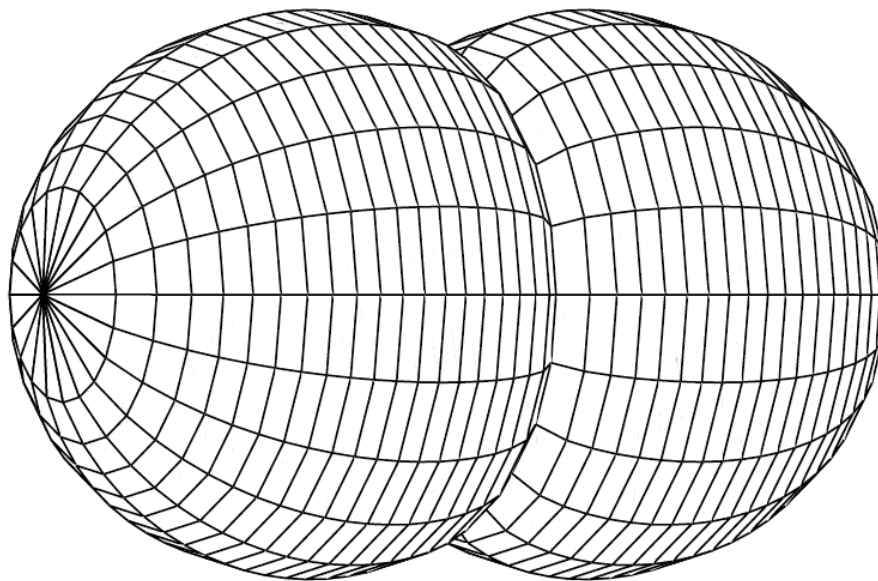
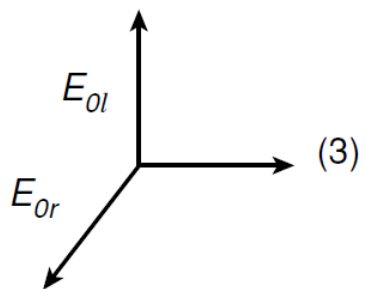
$$= \cos\theta_{inc}\cos\theta_{esp} + \sin\theta_{inc}\sin\theta_{esp}\cos(\varphi_{inc} - \varphi_{esp})$$

Prove que

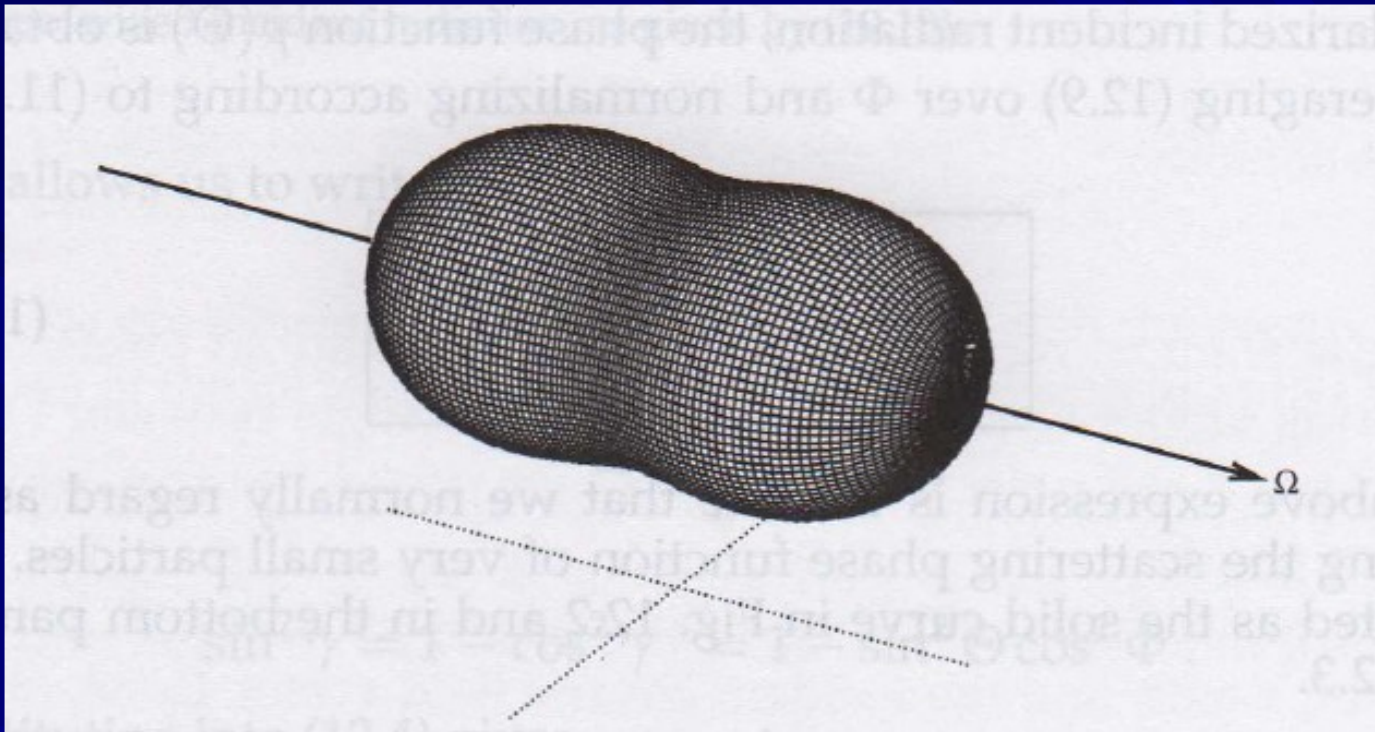
$$P(\cos\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta)$$

está corretamente normalizada





Função de fase para o espalhamento Rayleigh



Para partículas maiores

- Teoria Mie:

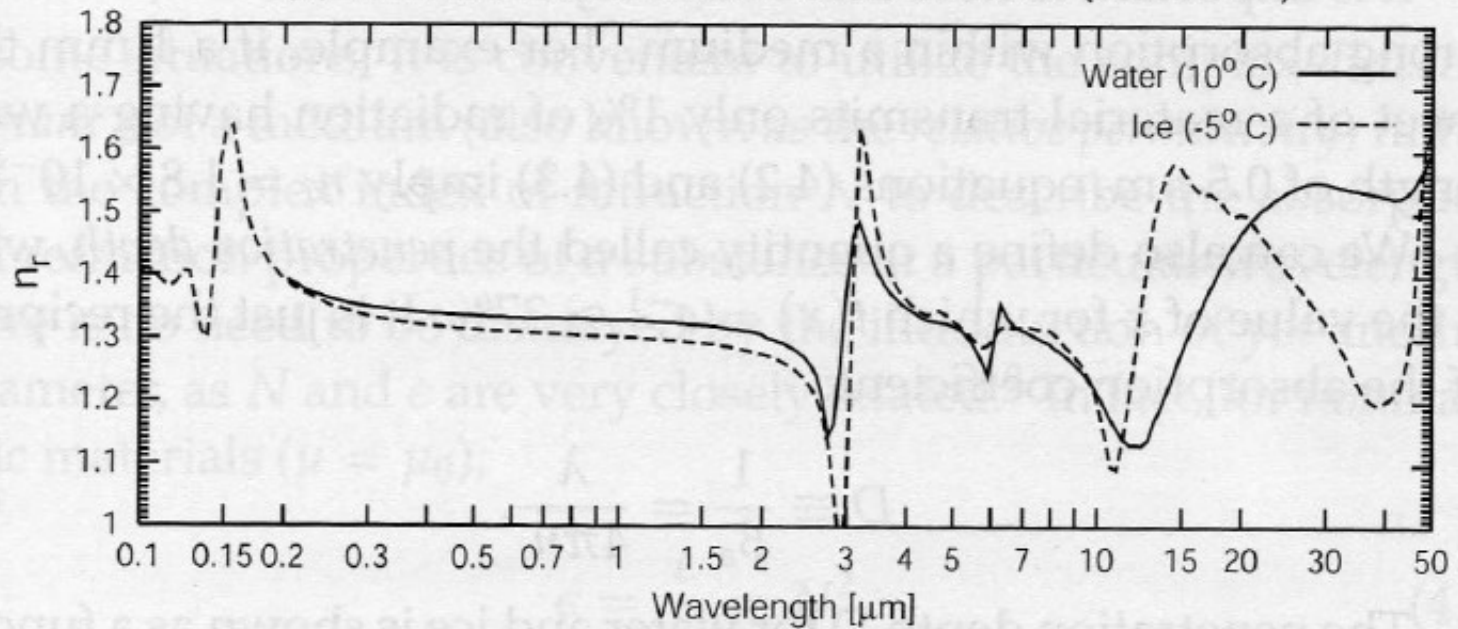
- Partículas esféricas homogêneas de raio $r \sim \lambda$

Índice de refração

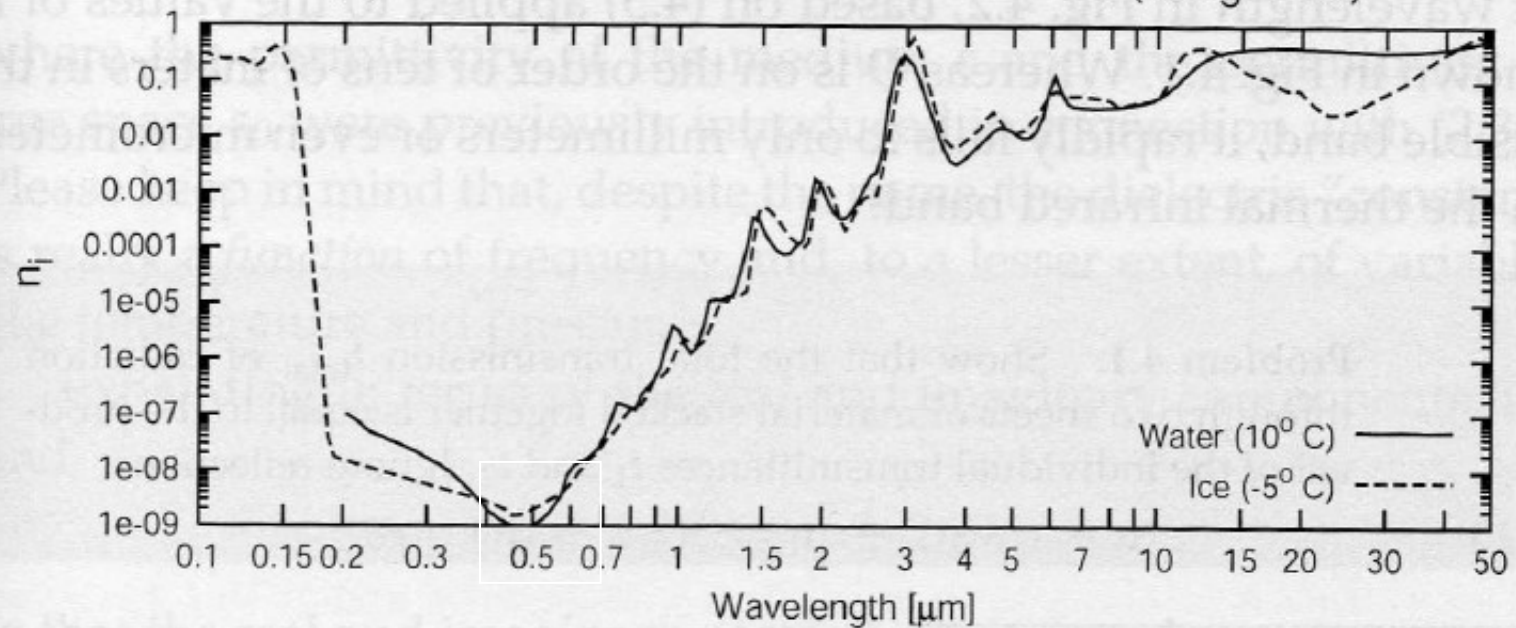
- Número complexo
 - Parte real: velocidade de fase
 - Parte imaginária: absorção
- Depende da composição química e da fase (sólida ou líquida) da partícula
- Varia com o comprimento de onda

$$n(\lambda) = n_r(\lambda) + in_i(\lambda)$$

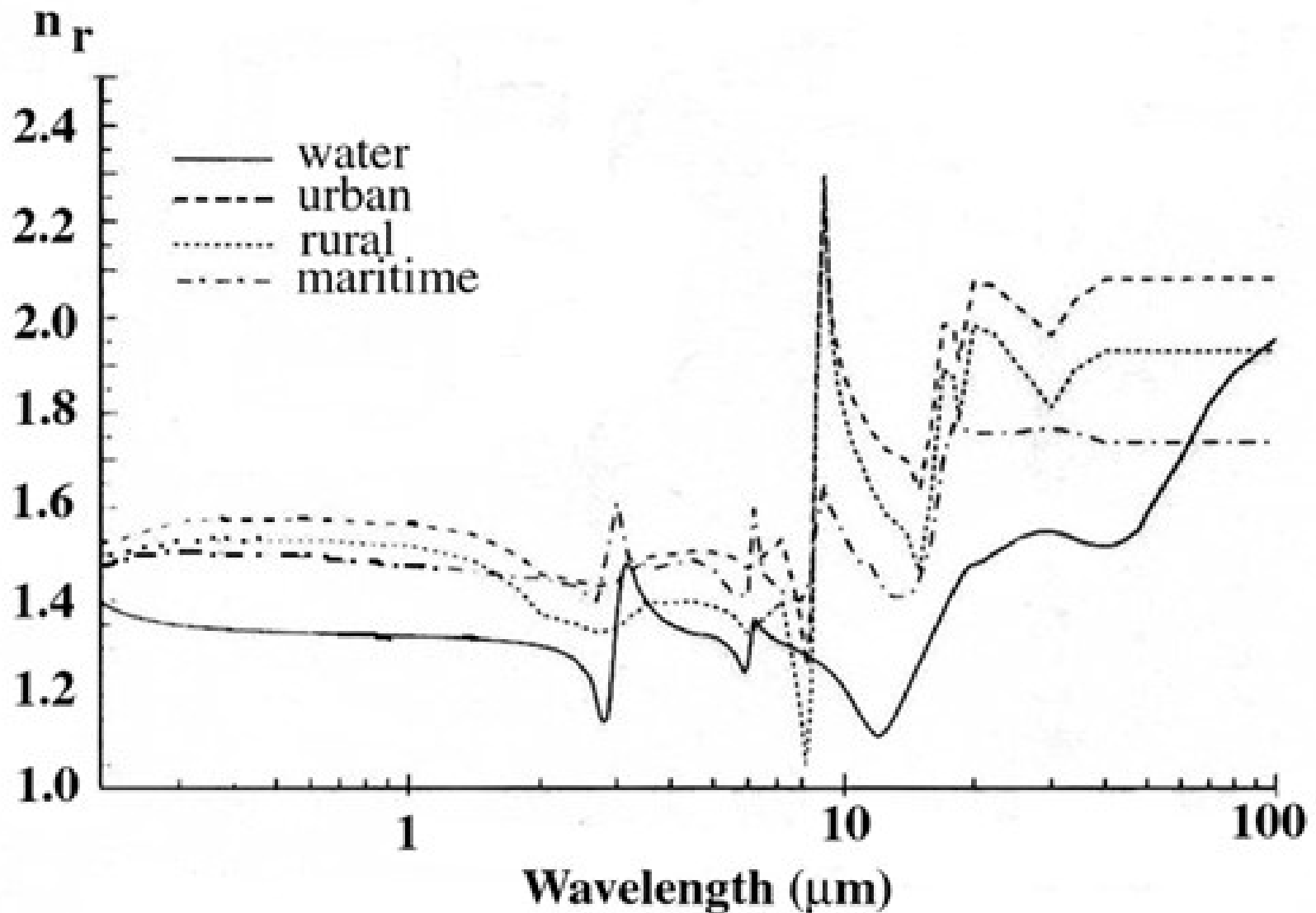
(a) Index of Refraction of Water and Ice (Real Part)



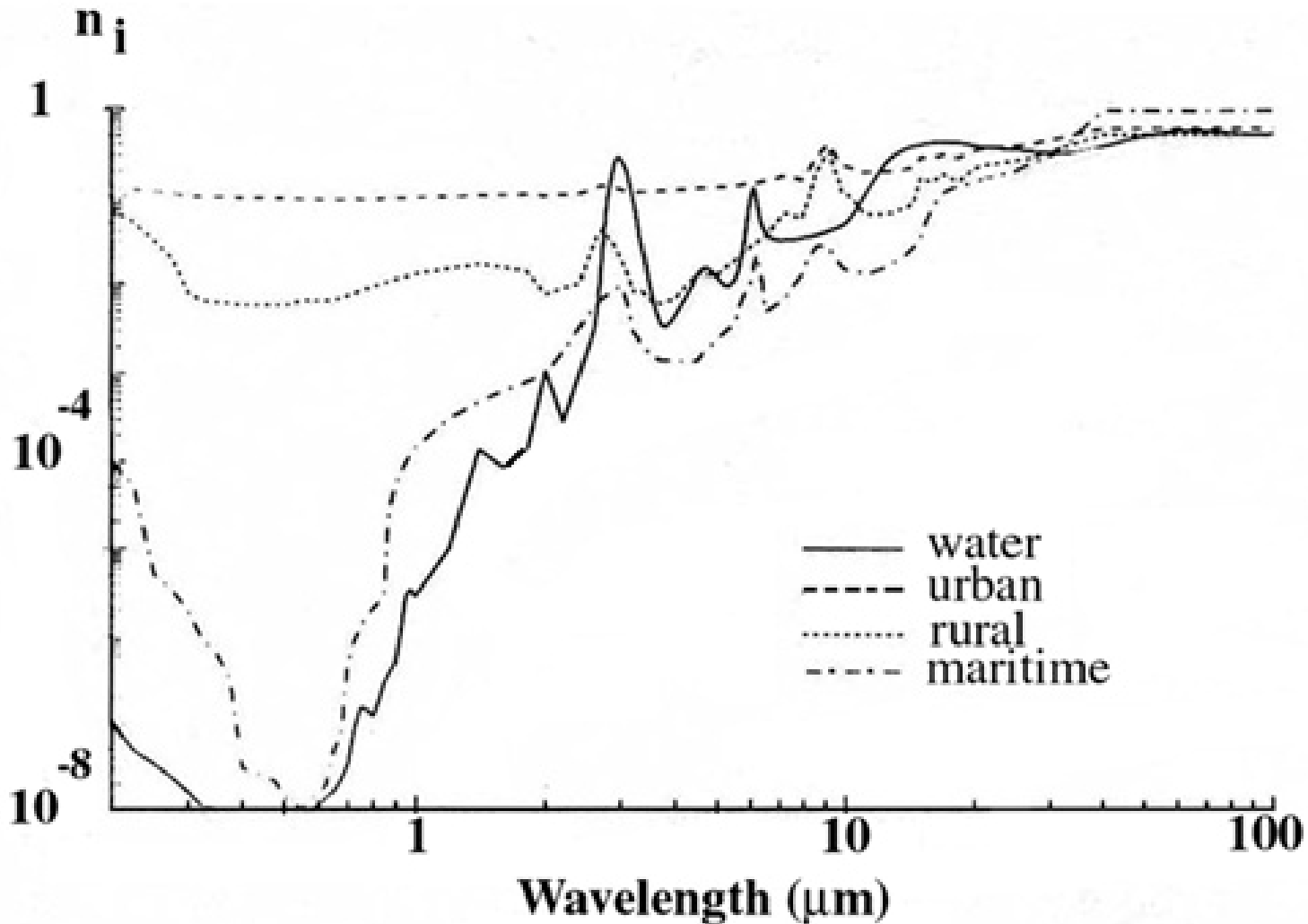
(b) Index of Refraction of Water and Ice (Imag. Part)



Índice de refração – parte real



Índice de refração – parte imaginária



- Ocorrência simultânea de absorção e espalhamento => atenuação (extinction)

$Q(x, n(\lambda, s))$ = fator de eficiência de atenuação

$Q_a(x, n(\lambda, s))$ = fator de eficiência de absorção

$Q_e(x, n(\lambda, s))$ = fator de eficiência de espalhamento

$Q(x, n(\lambda, s)) = Q_a(x, n(\lambda, s)) + Q_e(x, n(\lambda, s))$

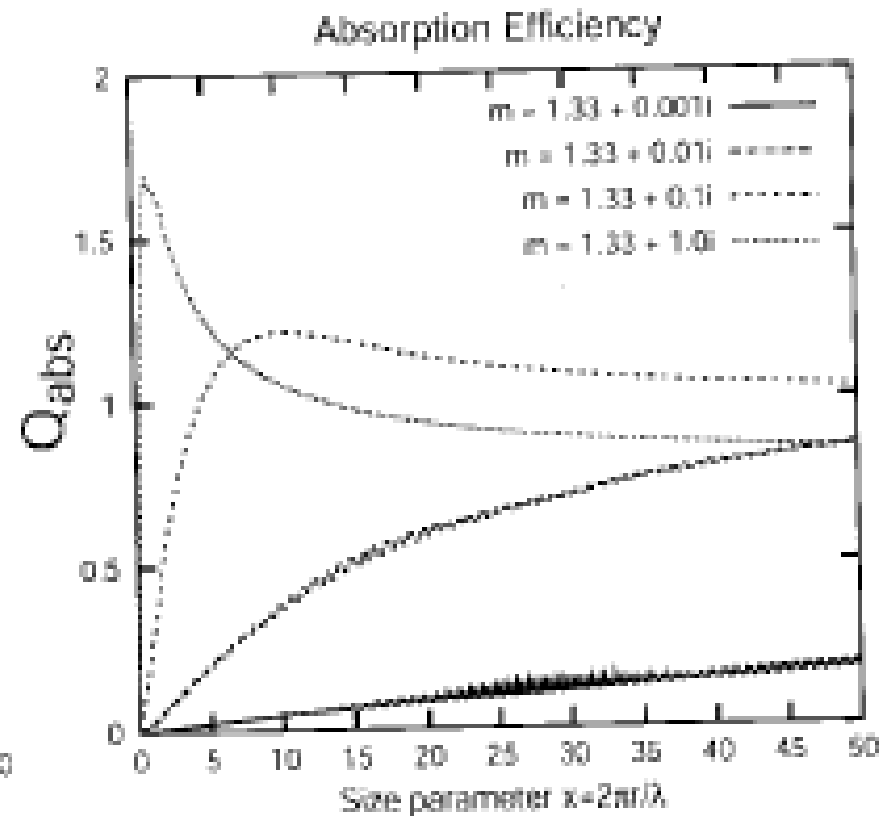
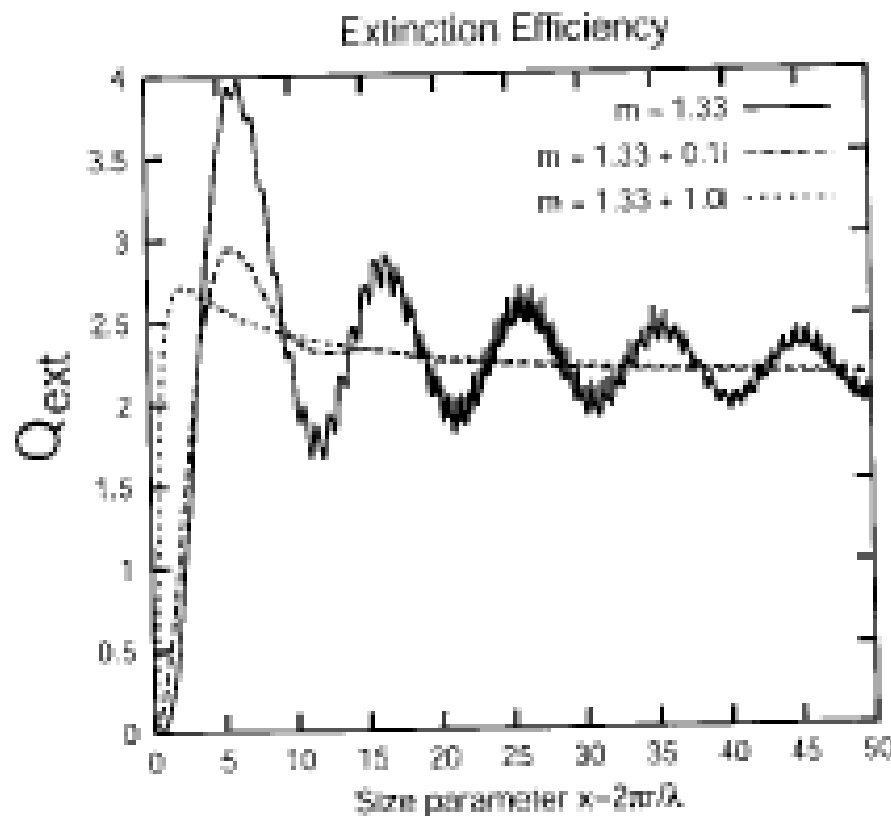
x é o parâmetro de tamanho: $2\pi r/\lambda$

n é o índice de refração complexo

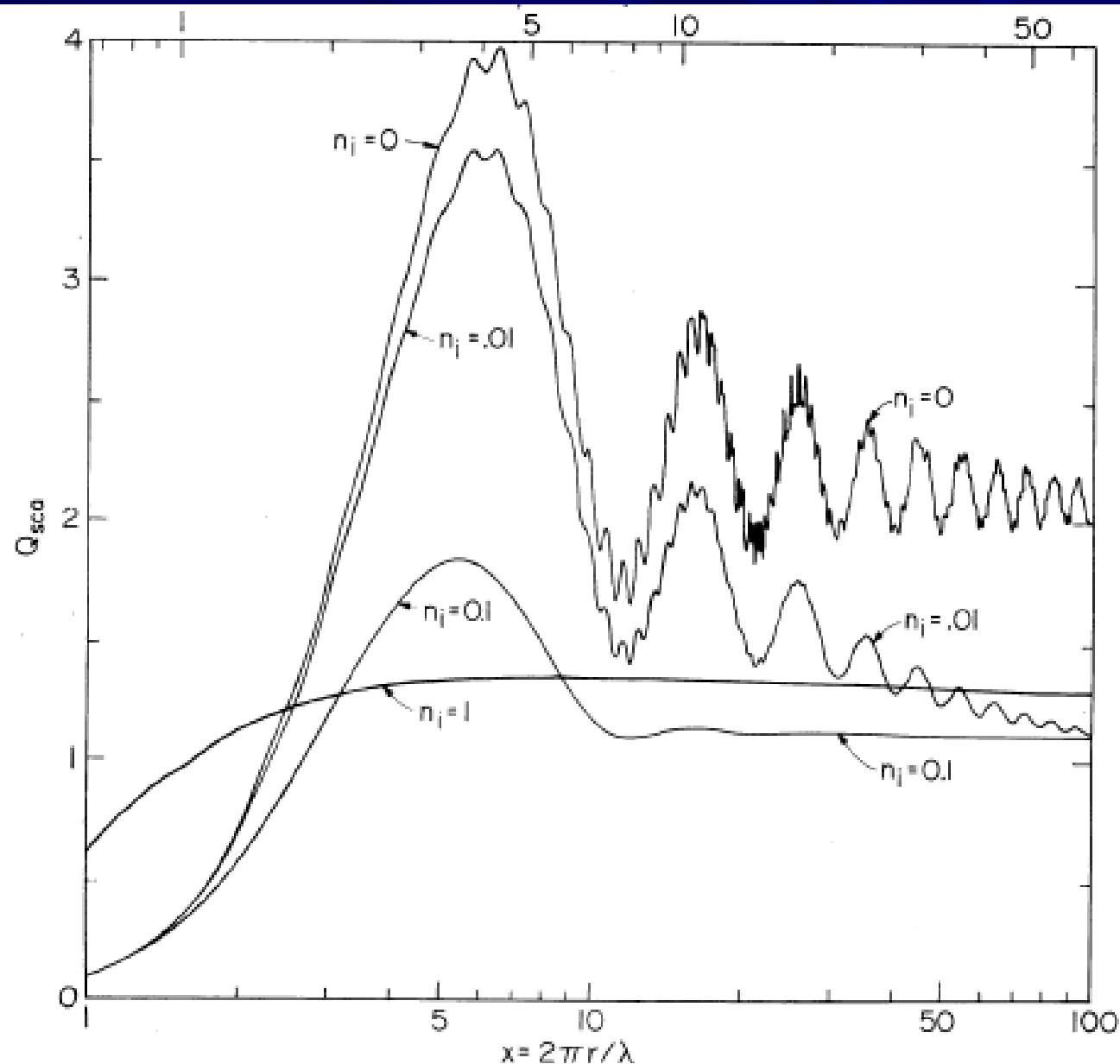
s é a posição no caminho óptico

Eficiência de atenuação:

$$Q_{\text{ext}} = Q_{\text{abs}} + Q_{\text{esp}}$$



Eficiência de espalhamento



Eficiência de Extinção

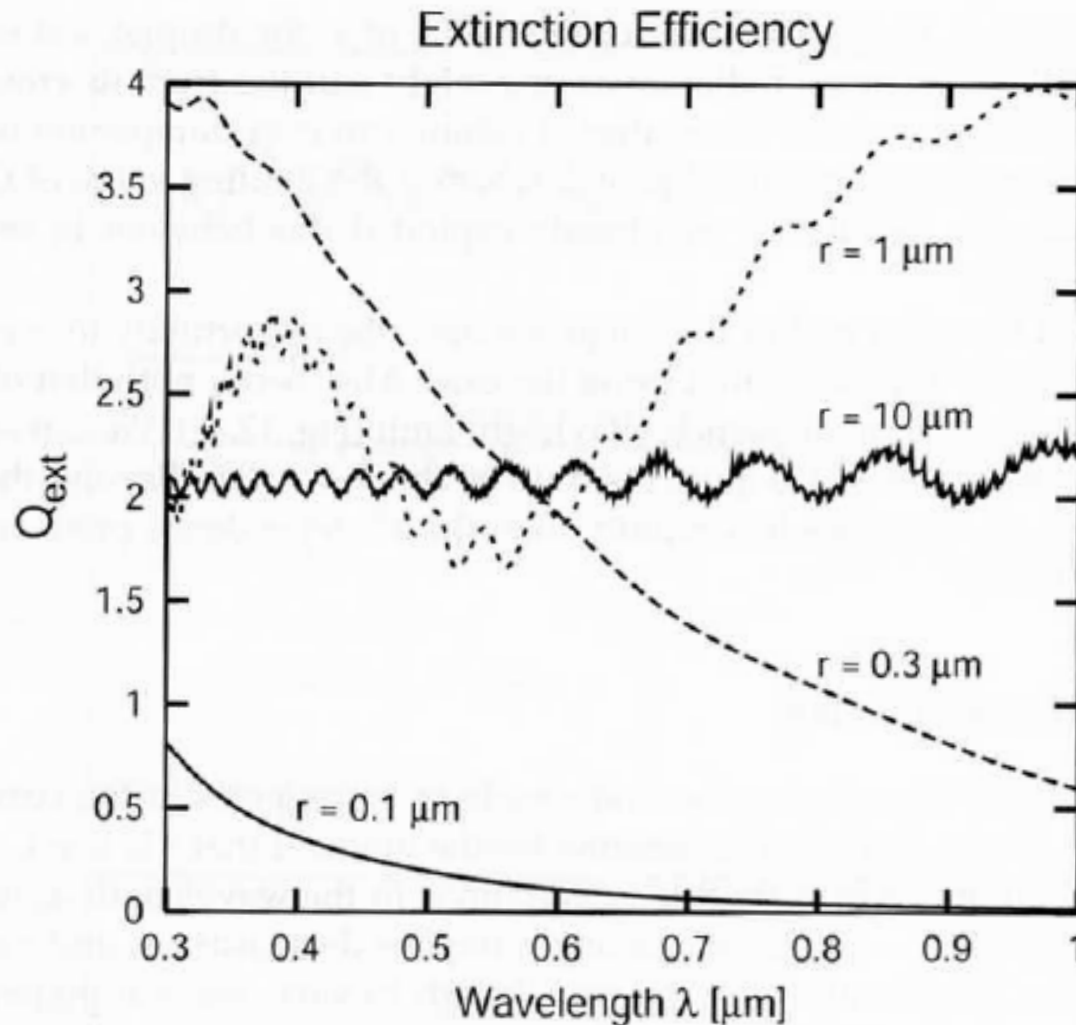


Fig. 12.5: The extinction efficiency as a function of wavelength for water droplets of the indicated sizes.

$$\sigma(\lambda, s) = \pi r^2 Q(\lambda, s) = \sigma_a(\lambda, s) + \sigma_e(\lambda, s)$$

$$\sigma_a(\lambda, s) = \pi r^2 Q_a(\lambda, s)$$

$$\sigma_e(\lambda, s) = \pi r^2 Q_e(\lambda, s)$$

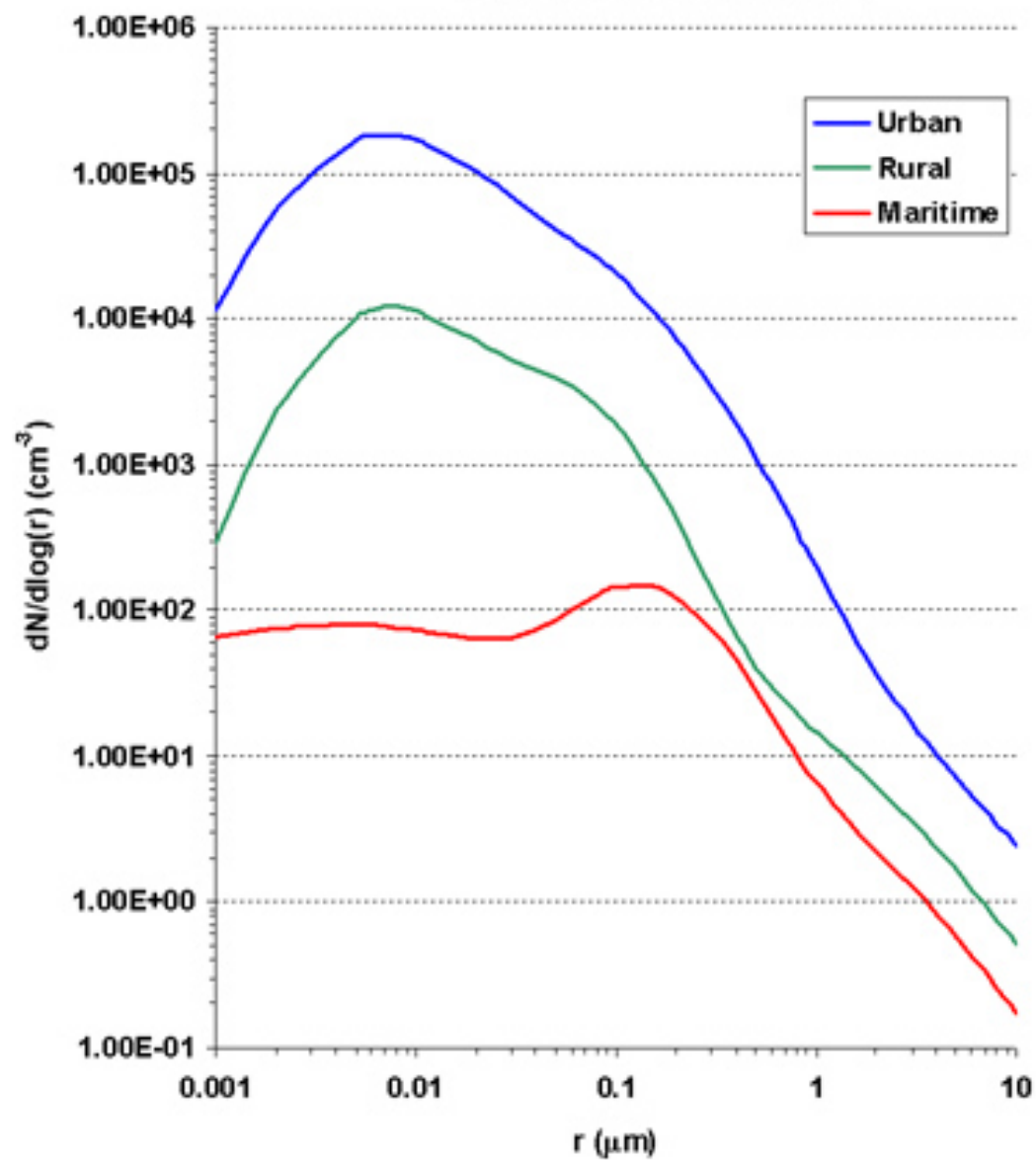
$\sigma(\lambda, s)$ é a seção de choque de atenuação,
no comprimento de onda λ , à *posição* s do
caminho óptico

$$\beta(\lambda, s) = \sigma(\lambda, s)N(s)$$

$\beta(\lambda, s)$ é o coeficiente linear de atenuação

$N(s)$ é a concentração numérica de
partículas

Aerosol size distributions



$$N(s) = \int_0^{\infty} n_p(r,s)dr$$

Onde $n_p(r,s)$ é o número de partículas por unidade de volume de ar, no intervalo de tamanho r e $r+dr$

(unidades: N em m^{-3} , r em μm , n_p em $m^{-3}\mu m^{-1}$)

n_p representa a função distribuição de tamanho

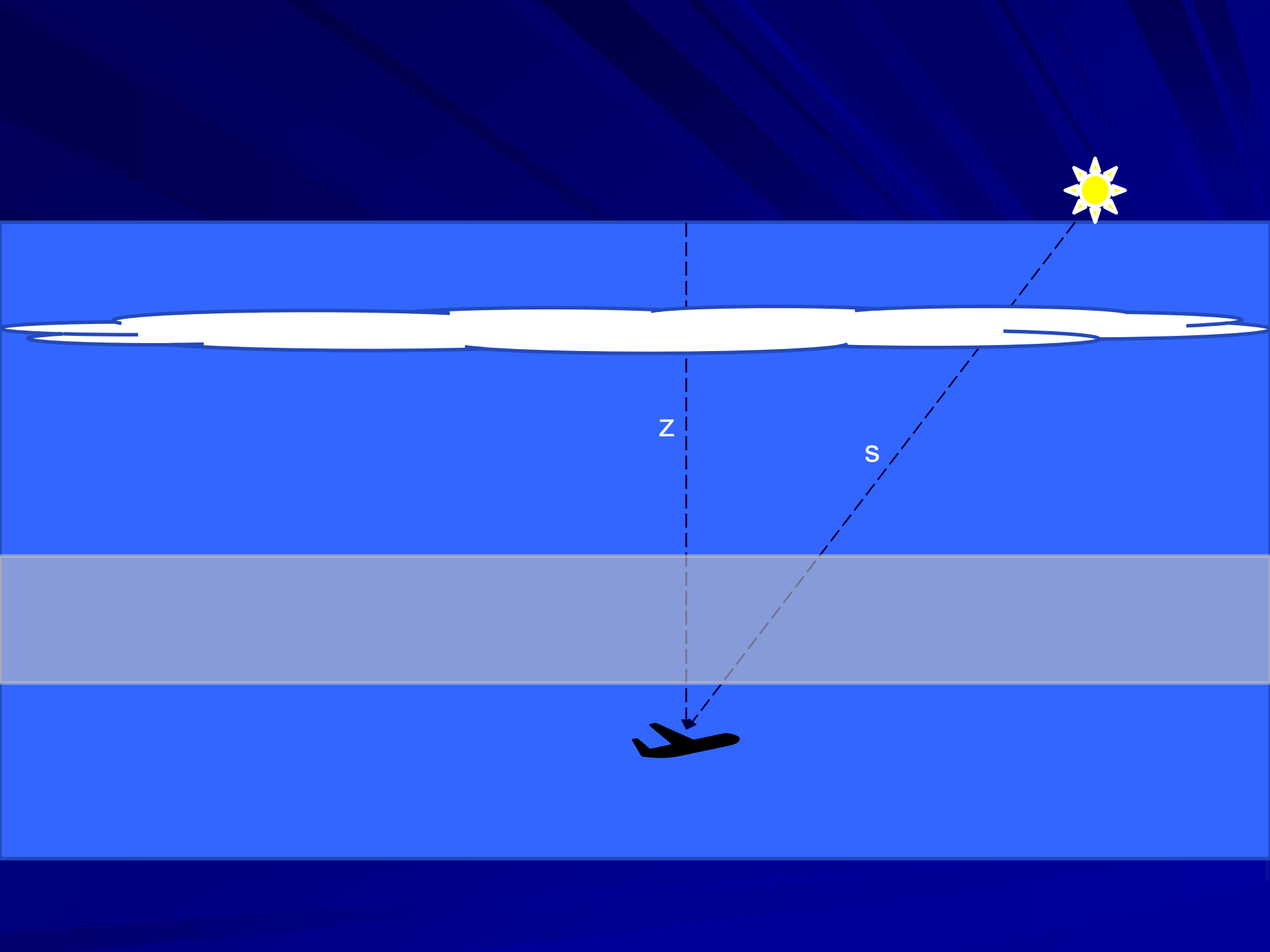
$$\delta(\lambda, s') = \int_0^{s'} \beta(\lambda, s) ds$$

É a espessura óptica de atenuação

Integrando em z:

$$\tau(\lambda, z') = \int_{\infty}^{z'} \beta(\lambda, z) dz$$

tem-se a profundidade óptica de atenuação



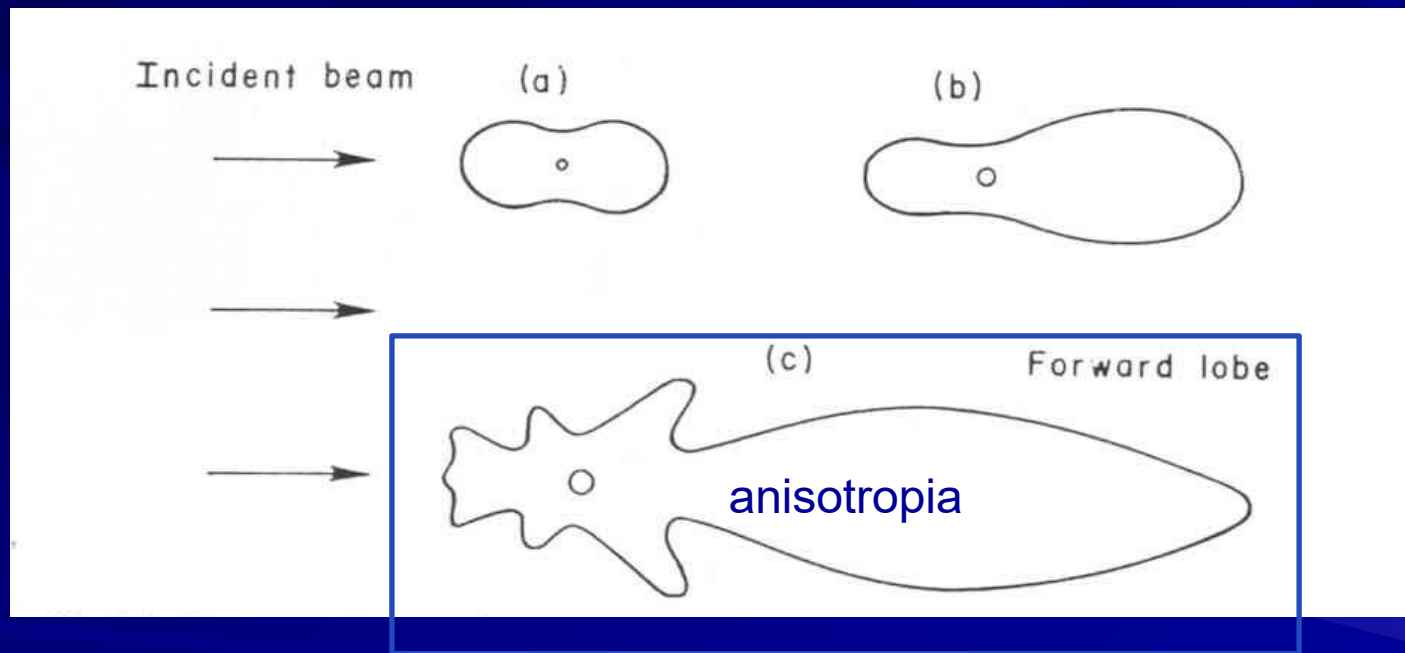
$$\omega_0 = \frac{\beta_e}{\beta_a + \beta_e} = \frac{\beta_e}{\beta}$$

É o albedo simples ou fração da atenuação da radiação causada por espalhamento; ou também, num evento de atenuação, é a probabilidade da atenuação ter sido causada por espalhamento

$\omega_0 = 1 \Rightarrow$ ausência de absorção;

$\omega_0 = 0 \Rightarrow$ não há espalhamento

Função de fase



■ Anisotropia: representação da função de fase é extremamente complexa => simplificação:

Função uniparamétrica dependente do fator de assimetria g :

$g = 0$: espalhamento simétrico (Rayleigh)

$g = 1$: espalhamento totalmente frontal

Aerossol: $0 < g < 1$

Quanto maior g => maior o tamanho da partícula com relação a λ

Função de fase de Henyey-Greenstein:

$$p_{HG}(\cos\Theta, g) = \frac{1 - g^2}{[1 + g^2 - 2g\cos\Theta]^{3/2}}$$

Espalhamento Rayleigh

■ Coeficiente linear de espalhamento:

$$\beta_R(\lambda, s) = \frac{24\pi^3}{\lambda^4 N_0^2} \frac{[n^2(\lambda, s) - 1]^2}{[n^2(\lambda, s) + 2]^2} N(s)$$

onde $N(s)$ é a concentração numérica de partículas

N_0 é o valor de $N(s)$ às condições padrão de pressão e temperatura

$n(\lambda, s)$ é o índice de refração do ar, às condições de p e T da posição s do caminho óptico

■ $n \sim 1,00034$ para $\lambda = 0,2\mu\text{m}$

■ $n \sim 1,00029$ para $\lambda = 4,0\mu\text{m}$

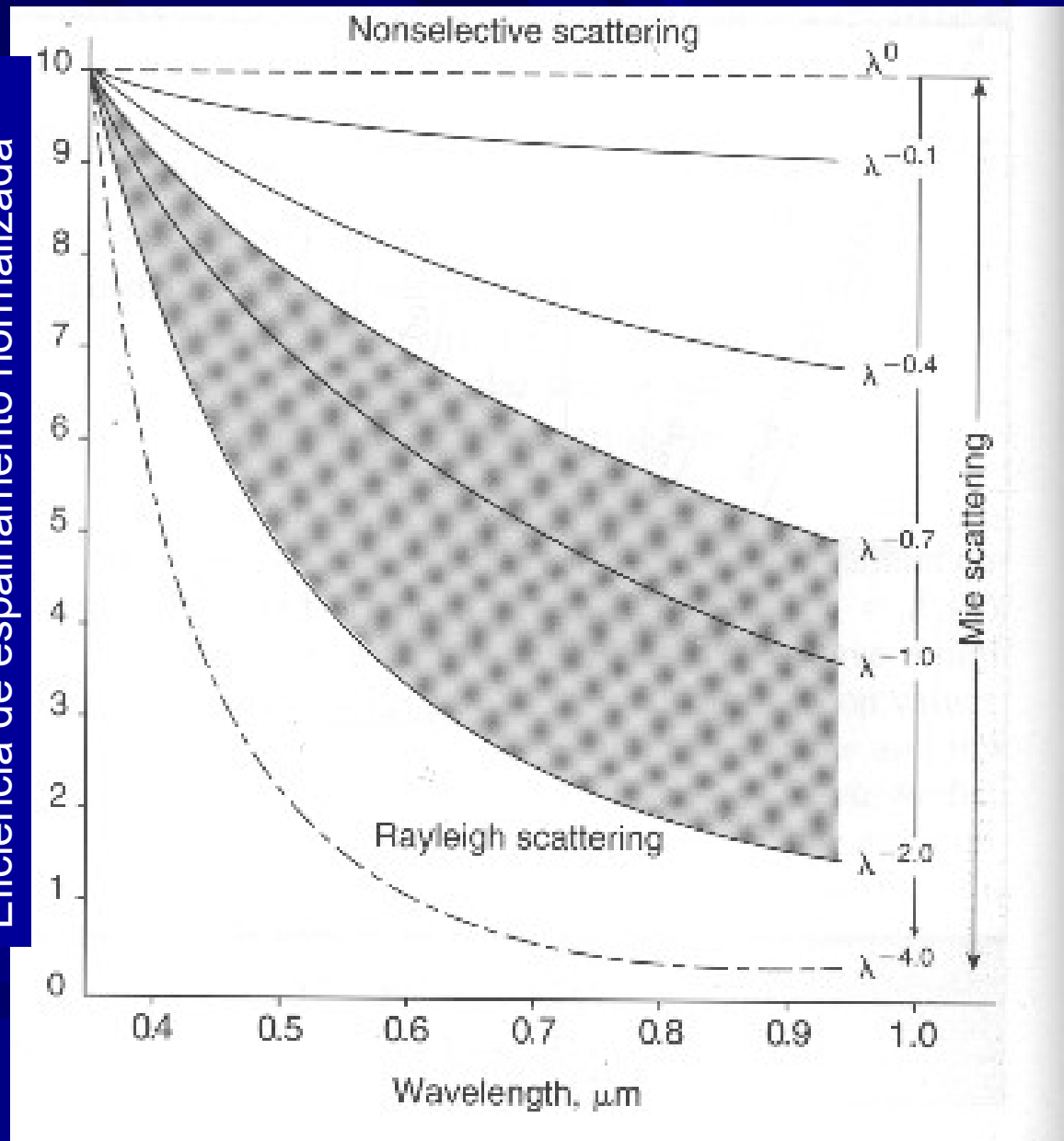
$$\delta_R(\lambda, s') = \int_0^{s'} \beta_R(\lambda, s) ds$$

É a espessura óptica de Rayleigh

$$\tau_R = 1,031 \times 0,00838 \lambda^{-\left(3,916 + 0,074\lambda + \frac{0,05}{\lambda}\right)}$$

É a profundidade óptica de Rayleigh (Fröhlich e Shaw, 1980)

Eficiência de espalhamento normalizada



Seminário sobre fenômenos ópticos

- Para quando?

 - 6 de maio de 2020

- Temas:

 - <https://cloudatlas.wmo.int/en/photometeors-other-than-clouds.html>

- Tolerância: entre 8 a 10 minutos por apresentação.

Prova

■ 11/05/2020