

**Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da  
Universidade de São Paulo**

**Apostila da Disciplina  
Meteorologia Física II – ACA 0326**

**Prof. Márcia Akemi Yamasoe  
Digitação: Clara Iwabe – monitora da disciplina**

**Primeiro semestre de 2006  
Versão revisada**

Introdução.....	4
1. Grandezas Radiométricas .....	6
1.1. Radiação e o espectro eletromagnético.....	6
1.2. Ângulo sólido .....	7
1.3. Fluxo, Intensidade, Irradiância e Radiância.....	8
1.4. Densidades Espectrais .....	10
1.5. Absortância, Refletância e Transmitância .....	11
2. Radiação de Corpo Negro .....	14
2.1. Lei de Kirchhoff .....	15
2.2. Lei de Planck .....	16
2.3. Leis de Wien.....	18
2.4. Lei de Stefan-Boltzmann .....	19
2.5. Equilíbrio Termodinâmico Local .....	20
3. Radiação Solar.....	22
3.1. O Sol.....	22
3.1.1 A Distribuição Espectral de Energia.....	24
3.2. Posição do Disco Solar acima do Horizonte.....	25
3.2.1 Sistema Geográfico .....	26
3.2.2 Sistema Equatorial Horário .....	27
3.2.3 Sistema Horizontal Local .....	28
3.3. Ciclos Anuais .....	33
3.4 Irradiância Solar no Topo da Atmosfera .....	37
3.5 Irradiação Solar no Topo da Atmosfera.....	37
4. Medição de Irradiância .....	40
4.1 Introdução.....	40
4.2 Principais Grandezas Medidas.....	41
4.2.1 Radiação solar (0,3 a 4,0 $\mu\text{m}$ ).....	41
4.2.2 Radiação de onda longa ou radiação terrestre (4 a 100 $\mu\text{m}$ ).....	42
4.2.3 – Radiação total .....	42
4.2.4 – Medidas em bandas espectrais (filtros).....	42
4.2.5 – Medidas orientadas em ângulos sólidos pequenos.....	43
4.3 Princípios Físicos .....	43
4.3.1 – Detectores térmicos .....	43
4.3.2 – Fotodetectores.....	45
4.4 Calibração.....	45
4.5 Algumas Aplicações.....	46
4.6 Instrumentos Convencionais.....	47
5. Absorção e espalhamento .....	49
5.1 Constituintes Atmosféricos Relevantes .....	50
5.1.1 Gases .....	51
5.1.2 Aerossol.....	52
5.2 Absorção Molecular .....	52
5.2.1 Espectro de absorção (emissão) atômico .....	53
5.2.2 Espectro de emissão( absorção) molecular .....	54
5.2.3 Formas das linhas espectrais.....	58
5.2.4 Coeficiente mássico e profundidade óptica de absorção .....	60
5.3 Espalhamento .....	61
5.3.1 Espalhamento Rayleigh .....	64
5.3.2 Espalhamento Mie .....	67
5.4 O papel das nuvens.....	70
6. Equação de Transferência Radiativa (ETR) .....	72
6.1 Lei de Beer .....	72
6.2 Forma diferencial da ETR na ausência de espalhamento - Equação de Schwarzschild.....	74
6.3 Forma diferencial da ETR na ausência de absorção/emissão .....	75

6.4 Equação geral de transferência radiativa .....	77
6.5 Aproximação atmosfera plano-paralelo.....	78
6.6 Propagação de radiação solar .....	82
6.7 Propagação de radiação terrestre .....	85
7. Balanços Radiativos .....	87
7.1 Equilíbrio radiativo do planeta .....	87
7.1.1 Temperatura de equilíbrio radiativo de um planeta sem atmosfera .....	88
7.1.2 Temperatura de equilíbrio radiativo num planeta com atmosfera .....	89
7.1.3 Atmosfera com absorção e espalhamento.....	94
7.2 Taxa de aquecimento/resfriamento radiativo.....	97
7.3 Balanço de energia à superfície .....	102
Bibliografia.....	104

## Introdução

A principal fonte de energia do sistema Terra-atmosfera, utilizada nos processos físicos, químicos e biológicos que ocorrem tanto na superfície quanto na atmosfera, é a radiação eletromagnética proveniente do sol. Dessa forma, qualquer alteração no fluxo incidente de radiação solar resultará em diferentes respostas/cenários na atmosfera e superfície, podendo haver alterações em vários processos meteorológicos e climáticos na Terra. Além de fatores externos, como o movimento de rotação da Terra, por exemplo, a radiação solar que atinge a superfície sofre vários processos de interação com a atmosfera que é constituída por gases e partículas de aerossol. As nuvens assim como as características físicas da superfície sobre a qual a radiação solar incide também desempenham um papel importante no balanço de radiação do sistema.

Dessa forma, alterações, por exemplo, nos constituintes da atmosfera (composição química e concentração de gases e partículas de aerossol, quantidade e características das nuvens) que interagem com a radiação eletromagnética podem afetar o perfil de temperatura e, por conseguinte, o perfil de pressão. A alteração da distribuição vertical e horizontal da pressão atmosférica afeta a velocidade e a direção do vento. Com relação ao clima da Terra, um dos assuntos da atualidade é o aumento da concentração dos chamados gases do efeito estufa e o consequente aumento da temperatura do planeta. No que diz respeito aos processos que ocorrem na superfície, um exemplo é a realização de fotossíntese pela vegetação a partir da absorção da radiação solar na região espectral do visível ou fotossinteticamente ativa. A radiação eletromagnética afeta também a concentração de alguns gases na atmosfera a partir de reações fotoquímicas.

É importante lembrar que assim como o meio afeta o campo de radiação, o campo de radiação pode alterar o meio e assim por diante. Denominam-se tais processos como processos de re-alimentação do sistema (do inglês *feedback processes*). Um exemplo é o aquecimento da superfície e da atmosfera terrestre devido à incidência de radiação solar durante o dia. Tal aquecimento resulta em instabilidade, gerando movimentos convectivos do ar próximo à superfície. Algumas parcelas de ar sofrem movimentos ascendentes e outras descendentes. O movimento ascendente da parcela de ar causa resfriamento adiabático e, se a atmosfera estiver suficientemente úmida, ocorre condensação e formação

de nuvens. As nuvens por sua vez alteram a distribuição de radiação solar incidente e emitem e absorvem radiação infravermelha [Thomas e Stamnes, 1999].

Um dos objetivos deste curso é compreender os principais processos de interação da radiação solar e terrestre com os constituintes da atmosfera e com a superfície, discutindo as possíveis consequências oriundas dessa interação. Para tanto, serão estudados os fundamentos da transferência radiativa na atmosfera: Terminologia, definições das grandezas físicas, leis físicas envolvidas, formulação matemática – a equação de transferência radiativa. Nos próximos capítulos serão estudados o espectro eletromagnético, as regiões nas quais se costuma dividi-lo e os conceitos físicos envolvidos. Os principais processos que determinam a variação do fluxo de radiação solar no topo da atmosfera também são abordados neste curso. Um dos capítulos é destinado à instrumentação utilizada para medir radiação e os princípios físicos de funcionamento. Uma das aplicações oriundas da compreensão dos processos de transferência radiativa entre o sistema Terra-atmosfera é o monitoramento do sistema a partir de técnicas de sensoriamento remoto via satélite.

## 1. Grandezas Radiométricas

### 1.1. Radiação e o espectro eletromagnético

Todo corpo com temperatura maior que o zero absoluto (0 K) emite radiação, em todos os comprimentos de onda. Define-se como radiação a emissão ou propagação de energia na forma de onda eletromagnética ou fóton (a energia é transferida como unidades discretas denominadas quanta ou fótons). A energia (U) de um fóton está relacionada com seu comprimento de onda ( $\lambda$ ) ou sua frequência de oscilação ( $\nu$ ) por:

$$U = hc/\lambda = h\nu \quad (1.1)$$

onde h é a constante de Planck ( $= 6,626 \times 10^{-34}$  Js) e c é a velocidade da luz ( $= 2,998 \times 10^8$  ms<sup>-1</sup> no vácuo).

O espectro eletromagnético pode ser dividido em várias bandas ou intervalos espectrais (também ilustrado na Figura 1.1):

- raios-gama: radiação com comprimento de onda<sup>1</sup> menor que 1 nanômetro;
- raios-X: radiação com comprimento de onda entre 1 e 10 nm;
- ultravioleta: região compreendida entre  $10 < \lambda < 400$  nm;
- visível ou radiação fotossinteticamente ativa (PAR, do inglês *photosynthetically active radiation*)<sup>2</sup>:  $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ ;
- infravermelho próximo:  $0,7 \mu\text{m} < \lambda < 3,5 \mu\text{m}$ ;
- infravermelho térmico:  $3,5 \mu\text{m} < \lambda < 100 \mu\text{m}$ ;
- microondas: radiação com comprimentos de onda entre 3mm e 300mm ou frequências<sup>3</sup> entre 1 e 100 GHz;

<sup>1</sup> As unidades de comprimento de onda comumente utilizadas são: nanômetro (1nm = 10<sup>-9</sup>m) e micrômetro (1 $\mu$ m=10<sup>-6</sup>m). Em astrofísica também utiliza-se o Ångström (1Å = 10<sup>-10</sup>m).

<sup>2</sup> Possui essa denominação por ser a região espectral da radiação solar que é utilizada para a realização de fotossíntese.

- ondas de rádio: radiação com comprimento de onda maior que 300mm.

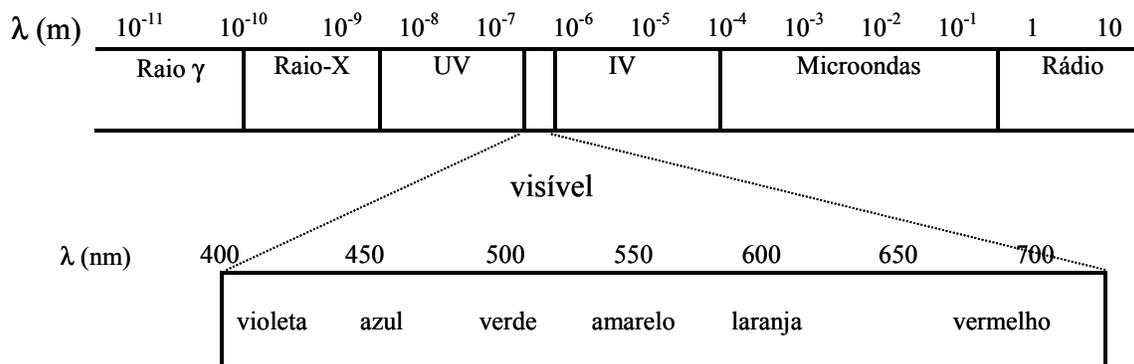


Figura 1.1 – Ilustração esquemática das várias regiões do espectro eletromagnético, de acordo com o comprimento de onda da radiação.

A radiação solar está confinada majoritariamente na região espectral  $\lambda \leq 4\mu\text{m}$ , sendo por isso denominada radiação de onda curta. Já a radiação emitida por corpos terrestres (por exemplo, superfície, atmosfera) compreende majoritariamente a região espectral  $\lambda \geq 4\mu\text{m}$ , sendo denominada radiação de onda longa ou térmica.

## 1.2. Ângulo sólido

O ângulo sólido  $\Omega$  é definido como a razão entre a área  $\sigma$  de uma superfície esférica e o quadrado do raio  $r$  de tal esfera:

$$\Omega = \frac{\sigma}{r^2} \quad (1.2)$$

Utiliza-se o esterradiano (sr) como unidade, embora o ângulo sólido seja na realidade uma grandeza adimensional.

<sup>3</sup> Da equação (1.1), verifica-se que  $\nu = c/\lambda$ , cuja unidade é  $\text{s}^{-1}$  ou Hz. Além de comprimento de onda e frequência, pode-se também caracterizar uma onda eletromagnética por seu número de onda  $\tilde{\nu}$ , onde  $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ , cuja unidade mais comumente utilizada é  $\text{cm}^{-1}$ .

Considerando a esfera de raio  $r$  ilustrada na Figura 1.2, centrada no ponto  $O$  e um ponto arbitrário em sua superfície com coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\varphi$ , a área infinitesimal dessa superfície é dada por:

$$d\sigma = r \times d\theta \times r \times \text{sen}\theta \times d\varphi \quad (1.3)$$

Portanto, o ângulo sólido infinitesimal definido por essa área é:

$$d\Omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \text{sen}\theta \times d\theta \times d\varphi \quad (1.4)$$

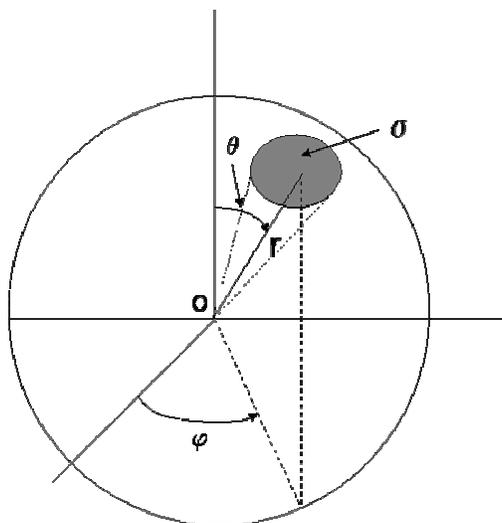


Figura 1.2 – Definição de ângulo sólido. Para um observador localizado em  $O$ , o ângulo sólido definiria seu “campo de visão”.

**Exercício 1.1:** Mostre que o ângulo sólido definido por uma esfera vale  $4\pi$ .

### 1.3. Fluxo, Intensidade, Irradiância e Radiância

Nesta seção são apresentadas as nomenclaturas e definições das grandezas radiométricas partindo-se da energia radiante ou eletromagnética. De acordo com Paltridge e Platt [1976] a nomenclatura dos termos associados à radiação atmosférica resultou originalmente de distintas disciplinas. Dessa forma, alguns termos podem ter diferentes significados dependendo do autor. Nesta apostila é adotada a nomenclatura recomendada pela Organização Meteorológica Mundial (OMM).

- Energia radiante (U): quantidade de energia na forma de radiação (emitida, transferida, absorvida, incidente, etc.), cuja unidade no Sistema Internacional (SI)<sup>4</sup> é J (Joule);

- Fluxo de radiação ou fluxo radiativo ( $\phi$ ): potência emitida, transferida ou recebida na forma de radiação, com unidade  $\text{Js}^{-1}$  ou W (Watt)

$$\phi = \frac{dU}{dt} \quad (1.5)$$

- Intensidade radiante de uma fonte (pontual) em uma determinada direção (I): quociente entre a potência emitida pela fonte para uma dada direção do espaço e o ângulo sólido infinitesimal de um cone representando tal direção. Sua unidade é  $\text{Wsr}^{-1}$

$$I = \frac{d\phi}{d\Omega} = \frac{d^2U}{dtd\Omega} \quad (1.6)$$

- Irradiância num certo ponto de uma superfície ( $\epsilon$ ): quociente entre o fluxo de radiação pela área do elemento de superfície, cuja unidade é  $\text{Wm}^{-2}$

$$\epsilon = \frac{d\phi}{dA} = \frac{d^2U}{dtdA} \quad (1.7)$$

- Radiância (L): quociente entre a intensidade de radiação de um certo elemento de superfície, em uma determinada direção, e a área da projeção ortogonal deste elemento em um plano perpendicular a essa direção. Sua unidade é  $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$ . A Figura 1.3 apresenta uma ilustração esquemática da configuração geométrica da definição de radiância.

$$L = \frac{dI}{\cos\theta \times dA} = \frac{d^3U}{\cos\theta \times dtd\Omega dA} \quad (1.8)$$

<sup>4</sup> Nesta seção será adotado o Sistema Internacional (SI) para indicar as unidades das grandezas radiométricas, exceto nas definições de grandezas espectrais.

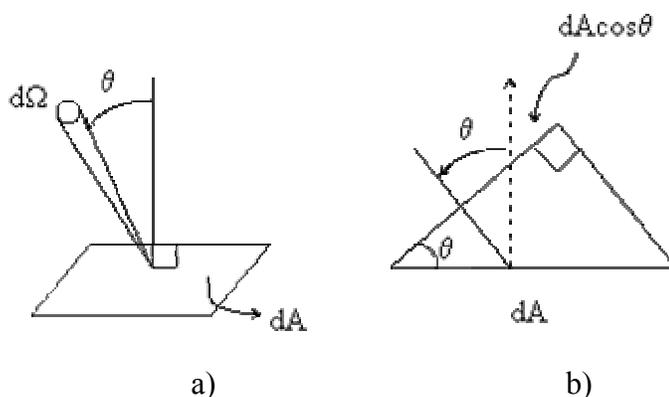


Figura 1.3 – Ilustração esquemática da geometria na definição de radiância. O elemento de área a ser considerado é sempre perpendicular à direção de incidência. a) visão tridimensional; b) visão num plano vertical.

Conhecendo-se a radiância incidente em todas as direções (caracterizadas pelas coordenadas  $\theta$  e  $\varphi$ ) em um determinado hemisfério, é possível determinar a irradiância total incidente em um hemisfério a partir do cálculo:

$$\epsilon = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} L(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (1.9)$$

**Exercício 1.2:** Prove que se a radiação é isotrópica, isto é, a radiância é a mesma em todas as direções, a irradiância total incidente em um hemisfério é igual a  $\pi L$ .

### 1.4. Densidades Espectrais

Todas as grandezas definidas na seção anterior podem também ser especificadas em um intervalo infinitesimal de comprimento de onda, número de onda ou frequência. Neste caso, as quantidades são denominadas espectrais (irradiância espectral, radiância espectral, etc.) que são denotadas por um subscrito apropriado. Por exemplo, radiância espectral com relação a:

a) comprimento de onda:  $L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda}$  (1.10), com unidade  $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\mu\text{m}^{-1}$

$$\text{b) número de onda: } L_{\tilde{\nu}} = \frac{dL}{d\tilde{\nu}} \quad (1.11), \text{ com unidade } \text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{cm}$$

$$\text{c) frequência: } L_{\nu} = \frac{dL}{d\nu} \quad (1.12), \text{ com unidade } \text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}$$

As conversões entre as várias escalas envolvem a velocidade da luz  $c$  e as relações:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} \Rightarrow \frac{d\tilde{\nu}}{d\nu} = \frac{1}{c} \quad (1.13a)$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\tilde{\nu}}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} \quad (1.13b)$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad (1.13c)$$

tal que, por exemplo:

$$L_{\lambda} = \frac{dL}{d\lambda} = \frac{dL}{d\tilde{\nu}} \left| \frac{d\tilde{\nu}}{d\lambda} \right| = \frac{dL}{d\tilde{\nu}} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{dL}{d\tilde{\nu}} = \frac{1}{\lambda^2} L_{\tilde{\nu}} \quad (1.14)$$

Quando a grandeza é expressa em termos de comprimento de onda, denomina-se monocromática. A partir da grandeza espectral, valores integrados em determinados intervalos espectrais podem ser obtidos, visto que:

$$dL = L_{\lambda} d\lambda = L_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} = L_{\nu} d\nu \text{ e, portanto,}$$

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_{\lambda}(\lambda') d\lambda' = \int_{\tilde{\nu}_1}^{\tilde{\nu}_2} L_{\tilde{\nu}}(\tilde{\nu}') d\tilde{\nu}' = \int_{\nu_1}^{\nu_2} L_{\nu}(\nu') d\nu'$$

### 1.5. Absortância, Refletância e Transmitância

A radiação eletromagnética ao atravessar um meio qualquer pode sofrer absorção ou espalhamento. A ocorrência simultânea dos dois processos é denominada extinção ou atenuação. No processo de absorção, parte ou toda a energia radiante é transferida ao meio no qual ela incide ou atravessa. Define-se **absortância** espectral como a fração da radiação

incidente que foi absorvida, ou em outras palavras, como a razão entre a radiação absorvida pela radiação incidente, num determinado comprimento de onda:

$$a(\lambda) = \frac{\epsilon_a(\lambda)}{\epsilon_i(\lambda)} \quad (1.15)$$

onde  $a(\lambda)$  é a absorptância espectral,  $\epsilon_a(\lambda)$  é a irradiância espectral absorvida pelo meio e  $\epsilon_i(\lambda)$  é a irradiância espectral incidente.

O processo de absorção está sempre associado a uma alteração física do meio atravessado. No caso da atmosfera, a alteração mais significativa é a de temperatura ou energia interna.

No processo de espalhamento, a radiação é apenas desviada da orientação original, podendo ser refletida ou transmitida. Se a radiação, quando espalhada, voltar para o hemisfério de origem, é denominada refletida, caso contrário, diz-se que ela foi transmitida (vide Figura 1.4). Em estudos atmosféricos, o hemisfério é definido a partir de um plano horizontal de referência. Finalmente, quando a radiação não sofrer interação com o meio diz-se que foi diretamente transmitida (componente  $t_D$  na figura 1.4). Denomina-se **refletância** a razão entre a radiação refletida e a radiação incidente e **transmitância** é a razão entre a radiação transmitida e a incidente. Da Figura 1.4, tem-se:

$$r(\lambda) = r_1(\lambda) + r_2(\lambda) \quad (1.16);$$

$$t_d(\lambda) = t_{d1}(\lambda) + t_{d2}(\lambda) \quad (1.17);$$

$$t(\lambda) = t_D(\lambda) + t_d(\lambda) \quad (1.18)$$

e, por conservação de energia:

$$a(\lambda)L(\lambda) + r(\lambda)L(\lambda) + t(\lambda)L(\lambda) = L(\lambda) \quad (1.19a)$$

onde  $L(\lambda)$  é a radiância espectral incidente<sup>5</sup>

$$a(\lambda) + r(\lambda) + t(\lambda) = 1 \quad (1.19b)$$

<sup>5</sup> Note-se que a definição pode ser feita a partir de qualquer variável derivada da energia radiante, desde que, é claro, utilize-se a mesma variável no numerador e no denominador nas respectivas definições.

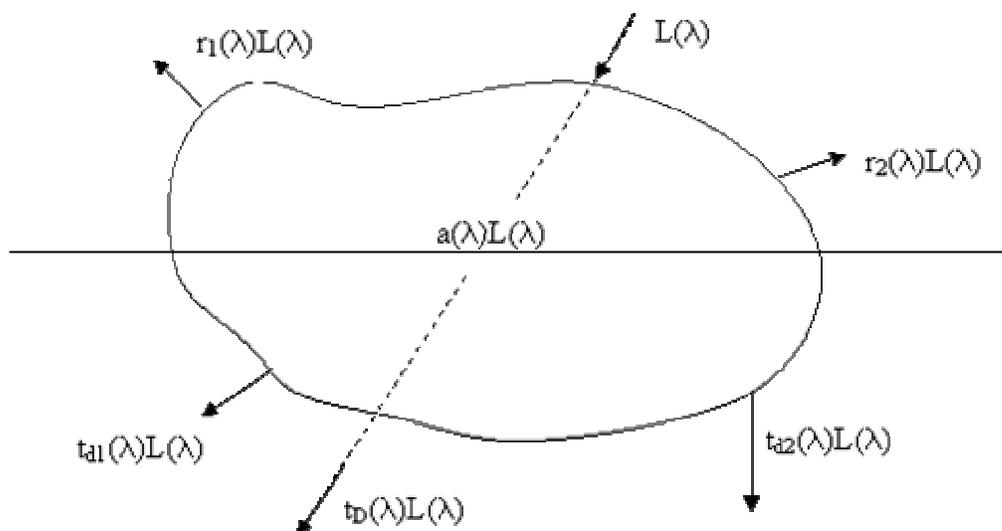


Figura 1.4 – Esquema ilustrativo dos componentes absorvido, refletido e transmitido da radiação incidente, com relação a um plano horizontal de referência.

Um corpo é dito opaco quando sua transmitância for desprezível ou nula. Neste caso, a soma da absorptância e refletância é unitária. As grandezas apresentadas neste subcapítulo se referem a grandezas espectrais, o que significa que podem variar conforme varie o comprimento de onda da radiação incidente. Vale lembrar também que dependem dos constituintes do meio ou corpo atravessado. No caso da atmosfera, os constituintes são os gases, as partículas de aerossol e as nuvens, como será visto no Capítulo 5 e as grandezas variam de acordo com a composição química desses constituintes. No próximo capítulo será estudado um meio especial no qual toda a radiação incidente é absorvida, de modo que a absorptância desse corpo ou meio é unitária em todos os comprimentos de onda.

## 2. Radiação de Corpo Negro

Define-se como corpo negro o meio ou substância que absorve toda a radiação incidente sobre ele, independentemente do comprimento de onda, direção de incidência ou estado de polarização<sup>6</sup>. Nenhuma parte da radiação incidente é refletida ou transmitida. Para entender o conceito, imagine um corpo isolado do seu meio externo, com paredes isolantes. Como não há trocas com o meio externo, dizemos que o corpo se encontra em equilíbrio termodinâmico, isto é, encontra-se em:

- 1) Equilíbrio térmico: Não há gradientes de temperatura. A temperatura do corpo é constante e homogênea.
- 2) Equilíbrio mecânico: Não há forças líquidas ou tensões, isto é, a pressão é constante em todas as partes do corpo.
- 3) Equilíbrio radiativo: O campo de radiação dentro do corpo é constante, isto é, o fluxo de radiação que entra no corpo é igual ao que sai.
- 4) Equilíbrio químico: As taxas de todas as reações químicas são balanceadas por suas reações inversas, tal que a composição química é a mesma em todo o corpo.

Suponha agora que esse corpo possui uma pequena abertura em sua parede. Toda a radiação incidente nesta abertura é absorvida, visto que a probabilidade de ser refletida dentro do corpo de forma a voltar pelo mesmo orifício é muito pequena. Por essa razão, a abertura é perfeitamente absorvedora ou “negra”. A radiação que sai pela abertura alcançou equilíbrio térmico com o material que constitui o corpo. Essa radiação emitida pela abertura é denominada radiação de corpo negro e tem as seguintes características:

- é isotrópica
- não polarizada
- independe da constituição e da forma do corpo em questão
- depende apenas da temperatura do corpo e do comprimento de onda da radiação.

---

<sup>6</sup> Polarização: A radiação constitui uma grandeza vetorial, com quatro componentes. Apenas a radiância  $L$  está associada à transferência de energia através de um meio. Os demais componentes descrevem o estado de polarização do feixe de radiação. Uma onda eletromagnética é dita polarizada quando os vetores dos campos elétrico e magnético oscilarem no tempo de forma coerente, isto é, observando-se sua oscilação no tempo, o vetor percorre figuras geométricas bem definidas, como uma reta, um círculo ou uma elipse. Quando o vetor oscila sobre uma reta, diz-se que a onda é linearmente polarizada. Quando oscilar sobre um círculo diz-se que

## 2.1. Lei de Kirchhoff

Para manter o equilíbrio radiativo e térmico do corpo, a radiação absorvida por cada unidade de área do corpo deve ser igual à radiação que cada unidade emite em determinado comprimento de onda. Denotando-se por  $\pi B_\lambda$  o fluxo constante de radiação por unidade de área (irradiância), disponível dentro do corpo, tem-se:

$$\epsilon_1(\lambda) = a_1(\lambda)\pi B_\lambda; \epsilon_2(\lambda) = a_2(\lambda)\pi B_\lambda; \dots; \epsilon_i(\lambda) = a_i(\lambda)\pi B_\lambda \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon_1(\lambda), \epsilon_2(\lambda), \dots, \epsilon_i(\lambda)$  são as irradiâncias emitidas por cada porção das paredes do corpo e  $a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_i(\lambda)$  são as absorptâncias espectrais de tais porções a uma determinada temperatura de equilíbrio e comprimento de onda. Dessa forma,

$$\frac{\epsilon_1(\lambda)}{a_1(\lambda)} = \frac{\epsilon_2(\lambda)}{a_2(\lambda)} = \dots = \frac{\epsilon_i(\lambda)}{a_i(\lambda)} = \pi B_\lambda = \text{constante} \quad (2.2)$$

Esta é uma forma da Lei de Kirchhoff que diz que a uma determinada temperatura e comprimento de onda, sob condições de equilíbrio termodinâmico, a razão entre o fluxo emitido por unidade de área e a absorptância de qualquer corpo é constante. O valor máximo possível de  $a(\lambda)$  é a unidade.

Por definição, um corpo negro é o que tem absorptância unitária em todos os comprimentos de onda. Portanto, a constante  $\pi B_\lambda$  é a irradiância de um corpo negro a uma determinada temperatura e comprimento de onda. Um corpo negro também emite a quantidade máxima possível de radiação em qualquer temperatura e comprimento de onda e por isso diz-se que um corpo negro é um radiador e um absorvedor perfeito de radiação. A emissividade de um corpo é definida como a razão entre a irradiância emitida pelo corpo a uma dada temperatura e comprimento de onda e a irradiância de um corpo negro sob as mesmas condições:

$$\epsilon_1(\lambda) = \frac{\epsilon_1(\lambda)}{\pi B_\lambda}, \epsilon_2(\lambda) = \frac{\epsilon_2(\lambda)}{\pi B_\lambda}, \dots, \epsilon_i(\lambda) = \frac{\epsilon_i(\lambda)}{\pi B_\lambda} \quad (2.3)$$

$$\text{ou, de (2.2),} \quad \epsilon_1(\lambda) = a_1(\lambda), \epsilon_2(\lambda) = a_2(\lambda), \dots, \epsilon_i(\lambda) = a_i(\lambda) \quad (2.4)$$

onde  $\epsilon(\lambda)$  é a emissividade do corpo para o comprimento de onda considerado. Observe que as equações (2.2) a (2.4) valem para qualquer corpo em equilíbrio termodinâmico local e

---

a onda apresenta polarização circular esquerda ou direita, de acordo com o sentido de percurso do vetor sobre o círculo (anti-horário ou horário) [Nussenzweig, 1996]. A radiação solar é não polarizada.

representam igualdades espectrais, isto é, não é esperado que a absorvância seja igual à emissividade de um corpo em comprimentos de onda distintos.

Finalmente, um corpo cinza é aquele para o qual a absorção e a emissão de radiação são iguais e menores que a unidade em todos os comprimentos de onda, portanto apresenta:

$$a(\lambda) = \varepsilon(\lambda) = \text{const.}, \quad \text{const.} < 1 \quad \text{para qualquer } \lambda$$

## 2.2. Lei de Planck

O modelo conceitual clássico para descrever a distribuição espectral de emissão de ondas eletromagnéticas se baseava na teoria de vibrações elásticas. Nesse modelo, as ondas estacionárias seriam geradas em um meio de comprimento finito como um resultado da interferência construtiva entre as ondas direta e refletida. Por exemplo, uma mola ou fio esticado. A vibração fundamental ocorreria em um comprimento de onda igual a duas vezes o comprimento do fio. As demais frequências ou modos de vibração são 2, 3, 4,... vezes a fundamental, podendo tender ao infinito. Num sólido, a série termina quando o comprimento de onda atinge duas vezes a separação dos átomos. Entretanto, tal limite não se aplica à radiação, como se verificou posteriormente. Utilizando esse raciocínio derivou-se a lei de radiação de Rayleigh-Jeans, na qual a densidade de energia (energia por unidade de volume, por unidade de frequência) seria dada por:

$$\frac{dU}{dVd\nu} = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3} \quad (2.5)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann ( $= 1,3806 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ),  $T$  é a temperatura em K e  $c$  é a velocidade da luz.

Entretanto, por essa lei, o aumento da frequência implicaria em aumento da energia radiante até que  $\lim \nu \rightarrow \infty \Rightarrow U \rightarrow \infty$ !!!! Essa incoerência ficou conhecida como catástrofe do ultravioleta<sup>7</sup>.

Para contornar esse problema, Planck postulou que a energia radiativa é emitida em pacotes finitos, ou quanta, e que a energia de um quantum é  $h\nu$ . Dessa forma, a radiância espectral emitida por um corpo negro é descrita matematicamente pela função de Planck:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2[\exp(h\nu/kT) - 1]} \quad [\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}] \quad (2.6)$$

onde  $h$  é a constante de Planck ( $= 6,626 \times 10^{-34}$  Js). Essa função é limitada matematicamente em ambos os extremos:

- para  $h\nu/kT \gg 1 \Rightarrow B_\nu \cong \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$ , que é o limite de Wien, para altas energias.

- para  $h\nu/kT \ll 1 \Rightarrow B_\nu \cong \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$ , que é o limite de Rayleigh-Jeans, útil na região espectral das microondas ( $\lambda > 1\text{mm}$ ), e que está de acordo com o modelo clássico.

Em função do comprimento de onda  $\lambda$ , a função de Planck pode ser reescrita como:

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5[\exp(hc/\lambda kT) - 1]} \quad [\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\mu\text{m}^{-1}] \quad (2.7)$$

A Figura 2.1 ilustra gráficos da função de Planck obtida utilizando-se diferentes valores de temperatura. Note-se que a função tende a zero para valores baixos de comprimento de onda, contornando a limitação do modelo clássico proposto por Rayleigh-Jeans.

---

<sup>7</sup> No livro *The Feynman Lectures on Physics* volume I, de Feynman et al. [1977] há um comentário mostrando a incoerência da lei do quadrado da frequência da equação 2.5. Ele diz que, ao abrir um forno, não vamos queimar nossos olhos com raios-X emitidos por ele!

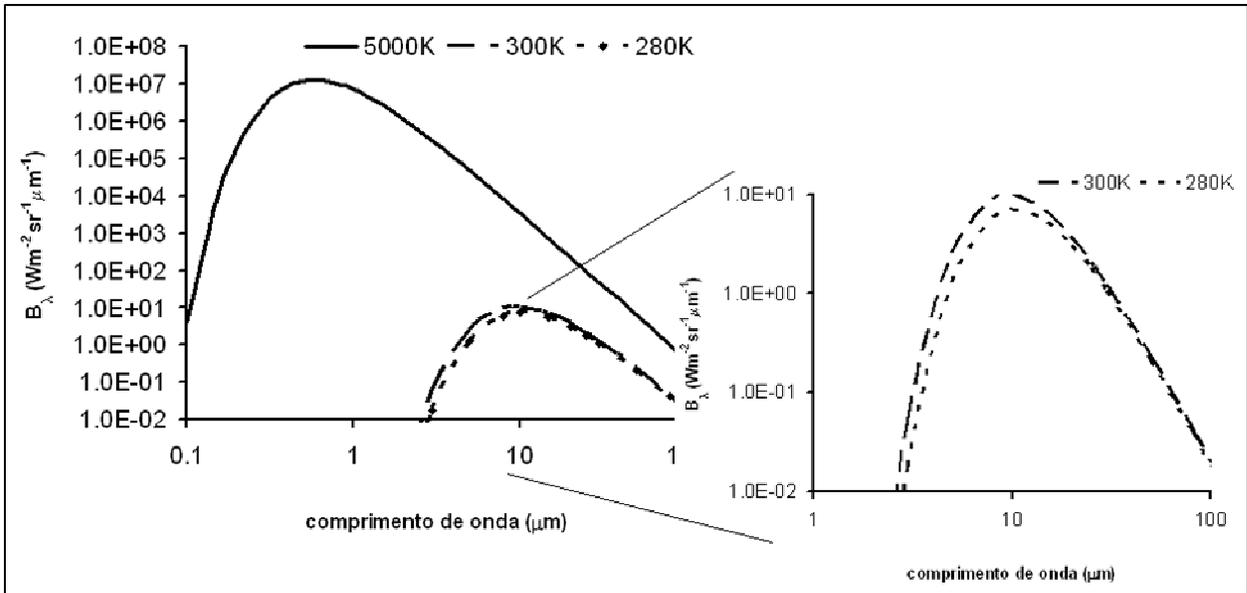


Figura 2.1 – Função de Plack calculada para diferentes valores de temperatura.

**Exercício 2.1:** Obtenha a expressão da radiância espectral de um corpo negro em função do número de onda.

### 2.3. Leis de Wien

Uma das propriedades da função de Planck é que o comprimento de onda referente ao seu ponto de máximo é inversamente proporcional à temperatura para a qual ela é calculada. Essa é a lei do deslocamento de Wien. Em outras palavras, o valor do comprimento de onda, para o qual a radiância emitida por um corpo negro é máxima, é inversamente proporcional à sua temperatura. Diferenciando a função de Planck com relação ao comprimento de onda e igualando a zero, obtém-se:

$$\lambda_m = \frac{2897}{T} \quad [\mu\text{m}] \quad (2.8)$$

Portanto, quanto maior a temperatura de um corpo, menor será o comprimento de onda para o qual o corpo emite radiação máxima. Dessa forma, qualquer corpo luminoso que se resfria progressivamente deixa de emitir luz visível (por exemplo, um arame incandescente).

Wien também chegou à conclusão de que a radiância máxima correspondente a  $\lambda_m$  deveria ser proporcional à quinta potência da temperatura do corpo:

$$B_\lambda(\lambda_m, T) = KT^5 \quad (2.9)$$

Esta é a segunda lei de Wien, onde K é uma constante de proporcionalidade.

**Exercício 2.2:** Obtenha (2.8).

**Exercício 2.3:** Determine o valor de K de (2.9).

## 2.4. Lei de Stefan-Boltzmann

A radiância total emitida por um corpo negro pode ser obtida integrando-se a função de Planck em todo o domínio de comprimento de onda:

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2hc^2}{\lambda^5 [\exp(hc/\lambda kT) - 1]} d\lambda \quad (2.10)$$

Com uma mudança de variável chega-se à integral:

$$B(T) = \frac{2(kT)^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

O resultado da integral é  $\pi^4/15$  e, portanto:

$$B(T) = \frac{2\pi^4 k^4}{15h^3 c^2} T^4 \quad (2.11)$$

Como a radiação emitida por um corpo negro é isotrópica, a irradiância por ele emitida será:

$$\epsilon(T) = \pi B(T) = \sigma T^4 \quad (2.12)$$

onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann ( $= (5,6696 \pm 0,0025) \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ).

Portanto, para qualquer corpo:

$$\epsilon(T) = \epsilon \sigma T^4 \quad (2.13)$$

Esta é a Lei de Stefan-Boltzmann.

Voltando à aplicação de interesse, até o presente, todas as leis físicas obtidas neste capítulo se basearam na existência de equilíbrio termodinâmico. A atmosfera obviamente

não se encontra em tal equilíbrio, pois o campo de radiação não é constante e nem a sua temperatura é constante em todos os pontos!

## **2.5. Equilíbrio Termodinâmico Local**

Como será visto em capítulo futuro, o processo de absorção de radiação causa uma mudança no estado de uma molécula ou átomo, passando do estado fundamental a um estado denominado excitado (mais energético). No caso da atmosfera, para que ela seja considerada em equilíbrio termodinâmico, é necessário que as moléculas possam trocar energia com seus vizinhos por um número suficiente de colisões para alcançar o equilíbrio térmico durante a vida média do estado excitado responsável pela emissão. Em outras palavras, após a absorção de radiação, se o tempo necessário para transferir energia entre as moléculas for menor que o tempo para a ocorrência de emissão de radiação, pode-se dizer que o sistema se encontra em equilíbrio termodinâmico local. Com o aumento da altitude, a taxa de colisões moleculares diminui, pois a densidade e a temperatura do ar diminuem, ao passo que o tempo característico do processo de emissão permanece o mesmo. Por este motivo, a lei de Kirchhoff só é válida para altitudes menores que aproximadamente 40 km.

**Exercício 2.4:** Uma superfície plana está sujeita à radiação solar a pino. A absorptância dessa superfície é igual a 0,1 para radiação solar e 0,8 para radiação terrestre, onde ocorre a maior parte da emissão de radiação por essa superfície. Calcule a temperatura de equilíbrio radiativo da superfície, desprezando o efeito da atmosfera e considerando que a irradiância solar com o sol a pino é igual a  $1367 \text{ Wm}^{-2}$ .

**Exercício 2.5:** Calcular a radiância monocromática de um corpo negro à temperatura de 300 K para o comprimento de onda de  $15 \mu\text{m}$ .

**Exercício 2.6:** Uma superfície emite irradiância igual a  $459,5 \text{ Wm}^{-2}$ . Determine a temperatura da superfície considerando as seguintes emissividades: a) 1,0; b) 0,9; c) 0,8.

**Exercício 2.7:** Para uma superfície que irradia como um corpo negro à temperatura de 1000K, calcule o espectro de radiância no intervalo espectral de  $2 \times 10^{-6}$  a  $12 \times 10^{-6}$  m (considere pelo menos 6 valores de comprimento de onda nesse intervalo). Apresente o resultado em um gráfico de radiância por comprimento de onda.

**Exercício 2.8:** Para uma superfície que irradia como um corpo negro à temperatura de 1000K, determine o comprimento de onda de emissão máxima. Se a temperatura fosse igual a 500K, em que comprimento de onda seria a emissão máxima? E se fosse 300K?

### 3. Radiação Solar

#### 3.1. O Sol

Sendo a estrela mais próxima da Terra, o Sol constitui a principal fonte de energia do planeta. Para se ter uma idéia, ele está 300.000 vezes mais perto do que a segunda estrela mais próxima da Terra [Liou, 1980]. A distância média Terra-Sol é denominada unidade astronômica e vale:

$$\bar{d} = 149597870 \pm 2 \text{ km} = 1 \text{ UA}$$

Na maioria das aplicações é suficiente arredondar esse valor para  $1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ . Devido à órbita elíptica da Terra ao redor do Sol, a distância solar varia entre  $1,471 \times 10^{11} \text{ m}$  no periélio, em janeiro, a  $1,521 \times 10^{11} \text{ m}$  no afélio, em julho.

Sua massa é da ordem de  $(1,9891 \pm 0,0012) \times 10^{30} \text{ kg}$ , sendo constituído basicamente por hidrogênio (75% de sua massa) e hélio além de alguns elementos mais pesados como ferro, silício, neônio e carbono. Sua temperatura decresce de aproximadamente  $5 \times 10^6 \text{ K}$  em sua parte central a  $5780 \text{ K}$  na superfície. A densidade do sol também diminui rapidamente com o aumento da distância ao centro. A densidade central é da ordem de  $150 \text{ g cm}^{-3}$  e na superfície vale  $10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$ , apresentando uma densidade média de aproximadamente  $1,4 \text{ g cm}^{-3}$ . O Sol possui raio de  $(6,9626 \pm 0,0007) \times 10^8 \text{ m}$ .

Sua fonte de energia está associada à fusão termonuclear de átomos de hidrogênio para hélio, que acontece no interior do Sol. Nesse processo são emitidos fótons altamente energéticos, de forma que a transferência de energia da parte mais interna até a superfície é realizada basicamente por meio de radiação eletromagnética. Essa radiação é absorvida e re-emitida por átomos e gases que constituem as camadas mais externas do Sol. Ao se aproximar da superfície os gases quentes, ao entrar em contato com camadas mais frias, sofrem expansão e tendem a ascender. Os gases mais frios por sua vez sofrem movimentos descendentes. Essa zona é denominada zona de convecção e a transferência de energia ocorre parcialmente por convecção e parcialmente por radiação eletromagnética. Finalmente, acima da superfície, o transporte de energia é novamente realizado por meio de radiação eletromagnética. É dessa forma que a Terra recebe energia do Sol. Integrada em

todo o espectro eletromagnético, a irradiância do Sol à distância média Terra-Sol, denominada constante solar  $\epsilon_o$ <sup>8</sup>, vale, no topo da atmosfera (TOA) e em uma superfície perpendicular à direção do feixe incidente:

$$\epsilon_o = 1367 \pm 2 \text{ Wm}^{-2}$$

Por conservação de energia, é possível determinar então a irradiância na superfície do Sol e, conseqüentemente, sua temperatura média, com a hipótese de que ele emite radiação como um corpo negro, aplicando-se a Lei de Stefan-Boltzmann (2.13). A Figura 3.1 ilustra a geometria envolvida no cálculo da irradiância solar à sua superfície. O fluxo que atravessa a área  $4\pi R^2$  deve ser o mesmo que atravessa a área  $4\pi(\bar{d} + R)^2$ . Com esses cálculos chega-se a uma temperatura aproximada de 5800 K.

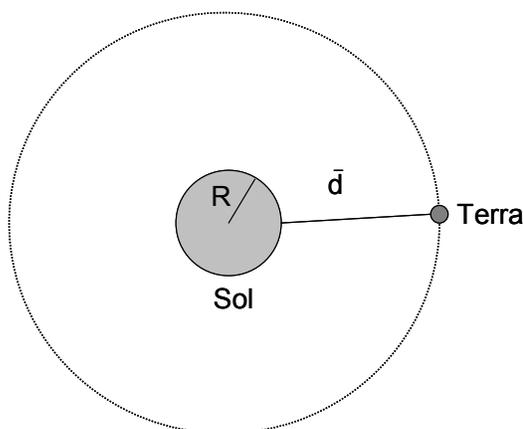


Figura 3.1 – A Terra a uma distância de uma unidade astronômica do Sol. Por conservação, a quantidade de energia que atravessa a área  $4\pi R^2$  deve ser a mesma que atravessa a área  $4\pi(\bar{d} + R)^2$ .

Seguindo raciocínio análogo, é possível determinar a irradiância solar média no topo da atmosfera, quando a Terra se encontra a qualquer distância  $d$  do Sol, a partir da constante solar:

$$\epsilon(d) = \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \epsilon_o \quad (3.1)$$

<sup>8</sup> Como não é exatamente constante, esse valor atualmente é denominado irradiância solar total, em

Note-se que embora denominada constante solar, a irradiância média no topo da atmosfera da Terra varia, como foi visto, conforme a distância Terra-Sol, mas também em função da própria atividade solar, em escalas de tempo de minutos até anos.

**Exercício 3.1:** Determine a irradiância solar total incidente sobre uma superfície perpendicular ao feixe quando a distância Terra-Sol vale a)  $0,95\bar{d}$  e b)  $1,02\bar{d}$ . Com a hipótese de que o planeta atua como um corpo negro, quanto valeria sua temperatura de equilíbrio radiativo em cada uma das situações?

### 3.1.1 A Distribuição Espectral de Energia

Conforme discutido no Capítulo 1, a radiação solar está confinada majoritariamente na região espectral cujo comprimento de onda é menor que  $4\mu\text{m}$ . O espectro solar padrão é apresentado como a curva com linha cheia no topo da Figura 3.2 [adaptada de Liou, 1980]. Também é mostrada na figura a irradiância solar observada ao nível do mar para uma atmosfera limpa. A área sombreada representa a quantidade absorvida pelos vários gases atmosféricos, principalmente  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_3$  e  $\text{O}_2$ . As regiões do visível e infravermelho próximo contêm a maior fração da energia solar, sendo aproximadamente 46% da radiação solar no infravermelho próximo, 46% no visível (0,4 a  $0,7\mu\text{m}$ ) e da ordem de 8% em comprimentos de onda menores que os do visível.

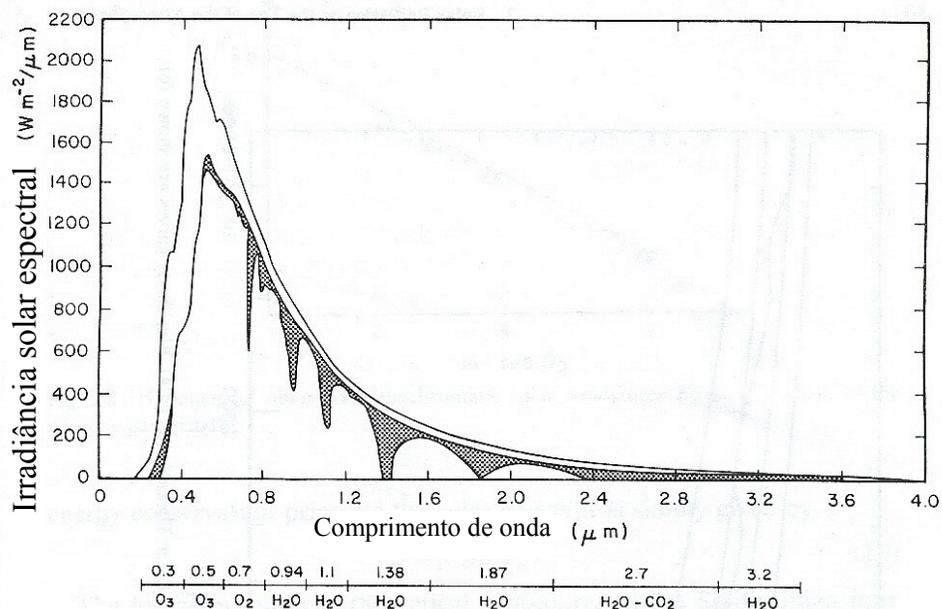


Figura 3.2 – Curvas de distribuição espectral da irradiância solar: irradiância observada no topo da atmosfera, irradiância observada ao nível do mar. As áreas sombreadas representam as bandas de absorção devido aos vários gases em uma atmosfera limpa. O envelope mais externo para essas áreas sombreadas indica a redução da irradiância solar devido ao espalhamento causado pelas moléculas de ar [Adaptado de Liou, 1980].

### 3.2. Posição do Disco Solar acima do Horizonte

Devido à grande distância entre o Sol e a Terra, diz-se que a radiação solar é colimada, ocupando um campo de visão limitado, denominado “disco solar aparente”. Na quase totalidade das aplicações em meteorologia e clima, este disco aparente é considerado pontual. A quantidade de radiação solar depende da posição do disco solar no céu, isto é, depende de variáveis astronômicas associadas à órbita da Terra ao redor do Sol. Para se conhecer tal posição, é necessário definir sistemas de coordenadas celestiais e terrestres. O sistema celestial é definido a partir da esfera celestial, que é uma esfera transparente imaginária ao redor da Terra e concêntrica a ela conforme ilustração apresentada na Figura 3.3 [Paltridge & Platt, 1976]. O sistema de coordenadas terrestre é denominado geográfico

e os sistemas equatorial horário e horizontal local constituem sistemas de coordenadas celestes.

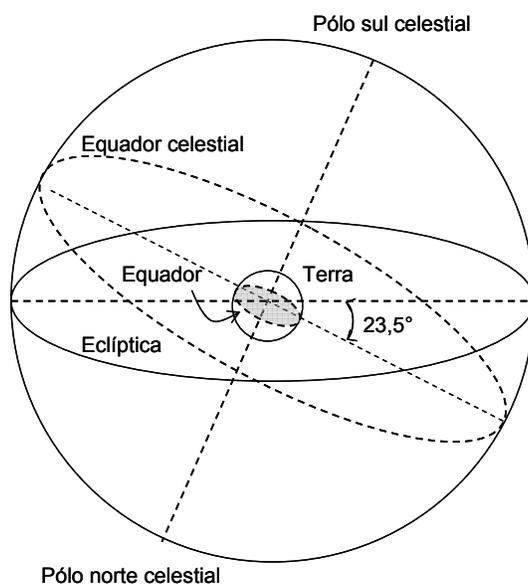


Figura 3.3 – A esfera celeste. Adaptado de Paltridge & Platt [1976].

### 3.2.1 Sistema Geográfico

As coordenadas deste sistema são a latitude ( $\varphi$ ) e a longitude ( $\lambda$ ). São utilizadas para localizar pontos na superfície terrestre. A latitude é computada a partir do equador até o paralelo do ponto de interesse e varia entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ , sendo positiva no Hemisfério Norte. A longitude é computada a partir do Meridiano de Greenwich até o meridiano do ponto de interesse, variando de  $-180^\circ$  a  $+180^\circ$  (Figura 3.4). A longitude apresenta valores negativos a oeste de Greenwich.

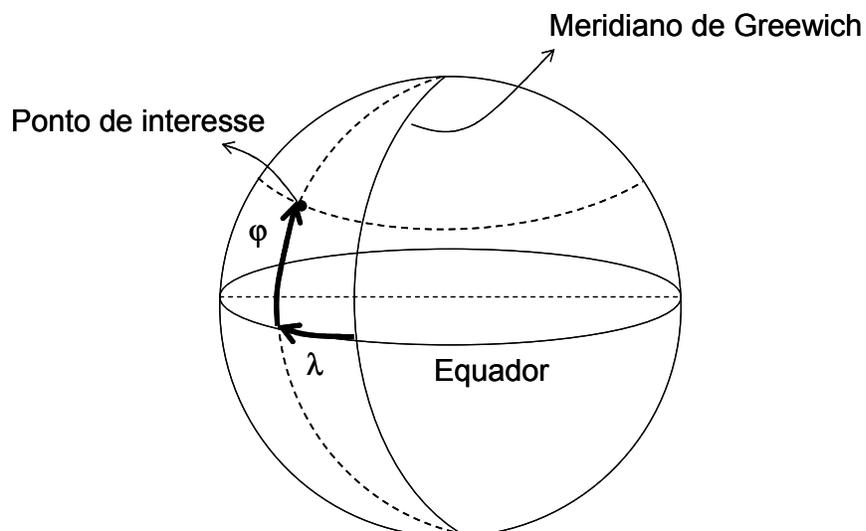


Figura 3.4 – O sistema de coordenadas geográfico e suas coordenadas latitude ( $\varphi$ ) e longitude ( $\lambda$ ).

### 3.2.2 Sistema Equatorial Horário

Neste sistema, as coordenadas são o ângulo horário (H), contado a partir do meridiano local (N-PN-S) até o círculo horário do astro, sobre o equador celeste, de leste para oeste. Dessa forma, com o decorrer do tempo  $t$ , aumenta-se o valor do ângulo horário. Seus valores vão de  $-180^\circ$  a  $+180^\circ$ , sendo negativo antes da passagem meridiana do astro (o “meio-dia” do astro) e positivo depois. A segunda coordenada é a declinação ( $\delta$ ) que é computada a partir do equador celeste até o paralelo do astro, variando de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ , sendo positiva para astros no Hemisfério Norte (Figura 3.5). Este sistema de coordenadas é utilizado para localizar astros no céu.

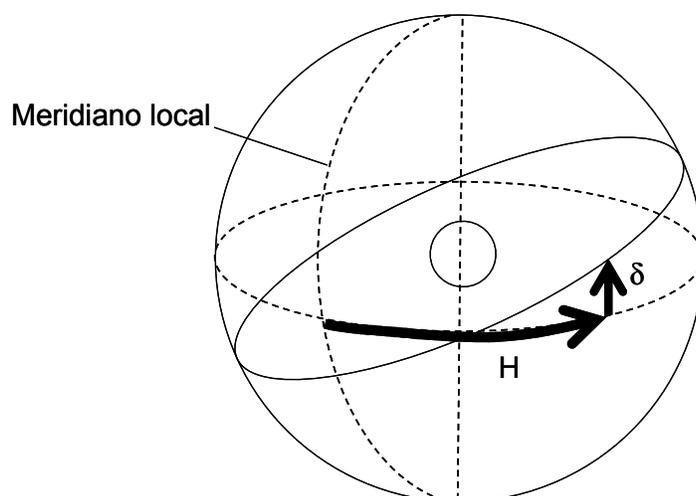


Figura 3.5 – O sistema equatorial horário e suas coordenadas: ângulo horário ( $H$ ) e declinação ( $\delta$ ).

### 3.2.3 Sistema Horizontal Local

Este sistema também é utilizado para localizar astros na esfera celeste. Suas coordenadas são o azimute ou distância azimutal ( $\phi$ ) e a elevação ( $h$ ). O azimute é contado a partir do norte local até o semi-plano vertical que contém o astro, sobre o plano do horizonte, de norte para leste, variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . A elevação é computada a partir do horizonte até o astro, sobre o semi-plano vertical que contém o astro e varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , para astros “visíveis” acima do horizonte. A distância zenital ( $\zeta$ ) é o ângulo complementar à elevação. Esta será a coordenada adotada neste curso quando o sistema horizontal local for utilizado. A Figura 3.6 apresenta uma representação esquemática deste sistema de coordenadas, onde N, S, W e E são os quatro pontos cardeais com relação a um observador localizado no centro do sistema de coordenadas. O ponto P representa o pólo norte.

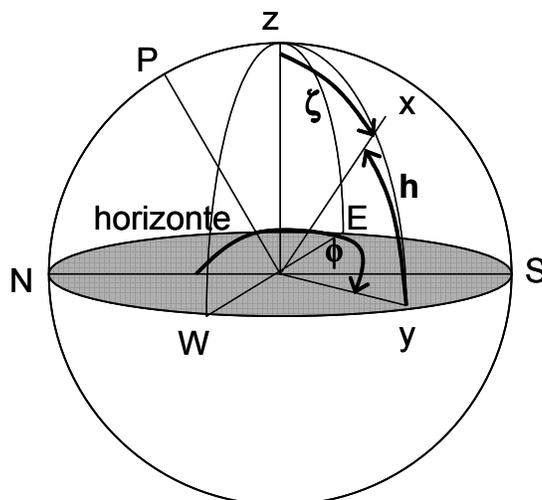


Figura 3.6 – Representação esquemática do sistema horizontal local de coordenadas ( $\phi$ ,  $\zeta$  ou  $h$ ).

Após definir os sistemas de coordenadas necessários para a localização do disco solar no céu para um determinado referencial sobre a superfície da Terra, o próximo passo é determinar as relações entre tais sistemas. Para tanto, algumas informações adicionais são ainda necessárias. O tempo solar é baseado na rotação da terra sobre seu eixo polar e na sua revolução ao redor do sol. Um dia solar é o intervalo de tempo necessário para que o sol complete um ciclo sobre um observador estacionário na Terra, que não necessariamente tem a duração de 24 horas. Sua duração varia ao longo do ano e discrepâncias de até 16 minutos são possíveis. Esta discrepância é denominada equação do tempo e é medida com relação a um movimento terrestre perfeitamente uniforme. A equação do tempo, então, indica a diferença entre o tempo solar verdadeiro e o tempo solar médio local:

$$\epsilon_t = TVL - TL \quad (3.2)$$

onde  $\epsilon_t$  é a equação do tempo, TVL é o tempo solar verdadeiro e TL é o tempo solar médio local. O tempo solar verdadeiro está associado às condições reais da órbita da Terra em torno do Sol e por esse motivo, os dias solares não duram exatamente 24 horas. O tempo solar médio local está associado à noção de um dia solar médio, com duração exata de

24 horas. É o tempo indicado pelos relógios, cujo padrão é definido por um relógio atômico que fornece a hora oficial no mundo, o tempo universal (UTC)<sup>9</sup>.

O ângulo horário, uma das coordenadas do sistema equatorial horário, pode ser expresso em unidades de tempo (horas, minutos e segundos), utilizando-se a equação do tempo. Por convenção adota-se  $H = TVL - 12h$ , de forma a associar o meio-dia solar ( $TVL = 12h$ ) ao ângulo horário nulo, satisfazendo as condições de  $H < 0$  pela manhã e  $H > 0$  à tarde. Portanto:

$$TVL = TL + \epsilon_t \quad (3.2')$$

$$H = TVL - 12h \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow H = TL + \epsilon_t - 12h = TL - (12h - \epsilon_t) \quad (3.4)$$

Por outro lado, o tempo médio local pode ser escrito em termos do tempo universal UTC (no passado indicado como GMT) e da defasagem em longitude com relação ao Meridiano de Greenwich:

$$TL = UTC + (\lambda - \lambda_{Gr})(24h / 360^\circ)$$

$$\Rightarrow TL = UTC + \lambda / 15^\circ \quad (3.5)$$

pois  $\lambda_{Gr} = 0^\circ$  por definição e para  $\lambda$  em graus e UTC em horas.

Dessa forma, substituindo-se (3.5) em (3.4), o ângulo horário pode ser escrito na forma:

$$H = [UTC + \lambda / 15^\circ - (12h - \epsilon_t)] \times 360^\circ / 24h \quad (3.6)$$

obtendo-se H em graus e não mais em unidade de tempo. O termo  $-\lambda / 15^\circ + (12h - \epsilon_t)$  indica o instante da passagem meridiana solar, no fuso horário de Greenwich, à longitude  $\lambda$ :

$$UTC = -\frac{\lambda}{15^\circ} + (12h - \epsilon_t) \Rightarrow H = 0 \quad (3.7)$$

**Exercício 3.2:** Conhecendo-se o valor da equação do tempo para o dia 16 de outubro ( $\epsilon_t \sim 14,6$  minutos), calcule o instante da passagem meridiana solar no Parque do Estado, em São Paulo, que possui coordenadas  $\phi = -23^\circ 39'$ ;  $\lambda = -46^\circ 37'$ .

<sup>9</sup> Para saber como funciona o atual relógio atômico da NIST (*National Institute of Standard and Technology*), instituto nacional americano de padrões, acessar <http://www.boulder.nist.gov/timefreq/cesium/fountain.htm>

**Exercício 3.3:** O “Anuário Astronômico” do IAG-USP informa, para o dia 16/10/1994, que o instante da passagem meridiana solar em Brasília e Rio de Janeiro vale, respectivamente, 11h 57’ e 11h 38’. Estime as longitudes dessas localidades.

A relação entre o sistema de coordenadas horário e o equatorial é obtida a partir da aplicação da geometria de triângulos esféricos, de acordo com a Figura 3.7. Para um observador P cuja latitude é  $\varphi$ , o sol possui ângulo zenital  $\zeta_o$ . No sistema equatorial, as coordenadas do sol são  $H_o$  (ângulo entre o meridiano local e o meridiano do sol) e  $\delta_o$ .

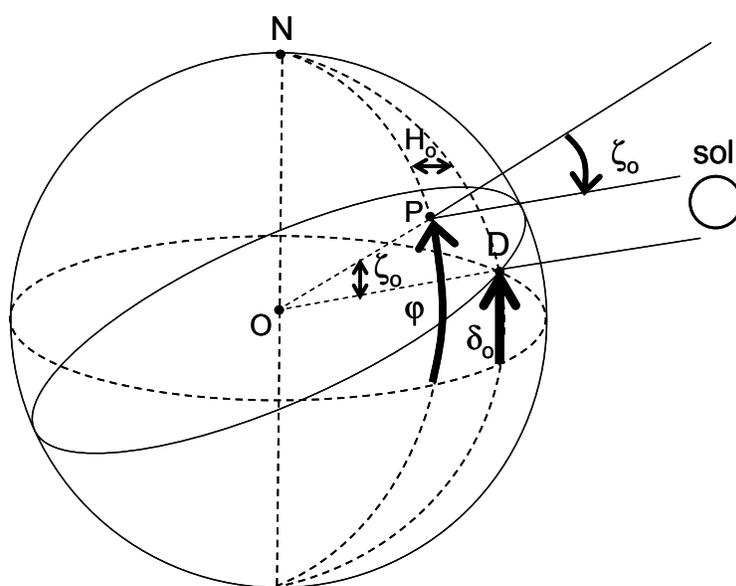


Figura 3.7 – Relação entre o ângulo zenital solar  $\zeta_o$  e a latitude  $\varphi$ , a declinação  $\delta_o$  e o ângulo horário  $H_o$ .

A dedução para  $\cos \zeta_o$  é apresentada no Apêndice 1, onde obtém-se:

$$\cos \zeta_o = \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o + \cos \varphi \cos \delta_o \cos H_o \quad (3.8)$$

Para o ângulo azimutal solar ( $\phi_o$ ) são obtidas as relações:

$$\text{sen} \zeta_o \text{sen} \phi_o = -\text{sen} H_o \cos \delta_o \quad (3.9)$$

$$\text{sen} \zeta_o \cos \phi_o = \cos \varphi \text{sen} \delta_o - \text{sen} \varphi \cos \delta_o \cos H_o \quad (3.10)$$

com  $H_o$  derivado de (3.6):

$$H_o = [UTC + \lambda / 15^\circ - (12 - \epsilon_t)] \times 15^\circ / 1h \quad (3.6')$$

Dessa forma, a obtenção de  $\zeta_o$  consiste no estudo das soluções:

$$\zeta_o = a \cos(\text{sen}\varphi \text{sen}\delta_o + \cos\varphi \cos\delta_o \cos H_o) \quad (3.11)$$

A equação (3.11) possui duas soluções ( $\zeta_o'$  e  $\zeta_o''$ ). Adota-se a solução que proporciona  $0^\circ \leq \zeta_o \leq 90^\circ$ , para que o disco solar esteja visível (acima do horizonte). Se  $\cos\zeta_o$  for negativo, significa que o disco solar encontra-se abaixo do horizonte e por isso é noite no local.

Para o ângulo azimutal solar, a solução é aquela que satisfizer as equações (3.9) e (3.10) simultaneamente. Note-se que cada uma dessas equações admite duas soluções:

$$\phi_o = a \text{sen}\left(-\frac{\text{sen}H_o \cos\delta_o}{\text{sen}\zeta_o}\right) \quad (3.12)$$

$$\phi_o = a \cos\left(\frac{\cos\varphi \text{sen}\delta_o - \text{sen}\varphi \cos\delta_o \cos H_o}{\text{sen}\zeta_o}\right) \quad (3.13)$$

Como o ângulo horário é nulo na passagem meridiana do astro, por definição, a posição do disco solar no instante da passagem meridiana (meio-dia solar) é dada por:

$$\begin{aligned} H_o = 0 &\Rightarrow \cos\zeta_o = \text{sen}\varphi \text{sen}\delta_o + \cos\varphi \cos\delta_o = \cos(\varphi - \delta_o) \\ &\Rightarrow \zeta_o = |\varphi - \delta_o| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_o = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\phi_o = -\frac{\text{sen}H_o \cos\delta_o}{\text{sen}\zeta_o} = 0 \\ \cos\phi_o = \frac{\cos\varphi \text{sen}\delta_o - \text{sen}\varphi \cos\delta_o \cos H_o}{\text{sen}\zeta_o} = -\frac{\text{sen}(\varphi - \delta_o)}{\text{sen}\zeta_o} = -\frac{\text{sen}(\varphi - \delta_o)}{\text{sen}(\varphi - \delta_o)} = -1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \phi_o = 0^\circ \text{ ou } \phi_o = 180^\circ \end{aligned}$$

Para o nascer ou ocaso solar tem-se:

$$\begin{aligned} \zeta_o = \pm 90^\circ &\Rightarrow \cos\zeta_o = 0 \\ &\Rightarrow \text{sen}\varphi \text{sen}\delta_o + \cos\varphi \cos\delta_o \cos H_o = 0 \Rightarrow \cos H_o = -\tan\varphi \tan\delta_o \\ H_o &= a \cos(-\tan\varphi \tan\delta_o) \quad (3.14) \end{aligned}$$

que permite duas soluções. Uma delas indica o nascer do sol com  $H_o < 0$  e a outra indica o pôr-do-sol com  $H_o > 0$ . Finalmente, é possível calcular a duração do dia solar, isto é, o tempo total no qual o sol está visível acima do horizonte, na situação de ausência de refração e crepúsculos:

$$N = 2H_o = 2|a \cos(-\tan \varphi \tan \delta_o)| \quad (3.15)$$

**Exercício 3.4:** Conhecendo-se o valor da equação do tempo para o dia 21 de março ( $\epsilon_t \sim -7,85$  minutos), calcule a posição  $\Omega_o = (\zeta_o, \phi_o)$  do disco solar às 11h00min., considerando a localização geográfica do edifício do IAG-USP ( $\varphi \sim 23^\circ 33' 35''S$ ;  $\lambda \sim 46^\circ 43' 55''W$ ). Considere  $\delta_o = 0^\circ$ .

**Exercício 3.5:** (2.12 do Liou, 1980) Calcular o ângulo de elevação solar ao meio-dia solar nos pólos, a  $60^\circ N$  (S),  $30^\circ N$  (S) e no equador. Calcular também a duração de um dia (em horas) no equador e a  $45^\circ N$  no equinócio e no solstício.

### 3.3. Ciclos Anuais

Além do ciclo diurno, a quantidade de radiação solar que atinge o topo da atmosfera terrestre varia de acordo com a época do ano devido à órbita elíptica da Terra ao redor do Sol, causando variação na distância Terra-Sol. A variação da declinação solar, que é a inclinação do eixo de rotação da Terra com relação à normal ao plano da eclíptica, também influi na quantidade de radiação solar incidente. Esses parâmetros apresentam ciclos anuais relativamente repetitivos. Também a equação do tempo (atraso ou adiantamento em relação a um sol fictício, cujo dia dura exatamente 24 horas) apresenta um ciclo anual.

Por exemplo, a distância Terra-Sol, normalmente expressa em termos de seu valor médio  $\bar{d} = 149597870 \pm 2$  km (= 1 UA), apresenta variação anual, valendo aproximadamente 0,983 UA no periélio em torno de 3 de janeiro, 1 UA em torno de 4 de abril e 5 de outubro e 1,017 UA no afélio, em torno de 4 de julho. Voltando à seção 3.1 deste capítulo, foi mostrado que é possível calcular a irradiância solar incidente no topo da atmosfera em uma superfície normal ao feixe direto para qualquer distância  $d$  entre a Terra e o Sol (Equação 3.1).

No caso da declinação solar, no solstício de verão (inverno) ela vale da ordem de  $23,5^\circ$ , em torno de 21 de junho. Nos equinócios vernal ou de primavera (outono) e de outono (primavera), respectivamente em torno de 21 de setembro e 21 de março, a declinação solar é nula. Finalmente, no solstício de inverno (verão), em torno de 21 de dezembro, a declinação solar é igual a, aproximadamente,  $-23,5^\circ$ . A nomenclatura

apresentada para os dias específicos do ano é a normalmente adotada para o hemisfério geográfico norte, sendo a adotada para o hemisfério sul aquela apresentada entre parênteses.

Resumindo, para o cálculo da irradiância solar incidente no topo da atmosfera terrestre é necessário o conhecimento do valor da distância Terra-Sol, da declinação solar e da equação do tempo para cada dia do ano. Para evitar o armazenamento de grandes quantidades de informação na forma de tabelas, foram propostas fórmulas empíricas de acordo com o dia do ano, com a hipótese de que tais parâmetros não variam ao longo de um dia, mas apenas de um dia para o outro [Paltridge & Platt, 1976]:

$$\left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 = 1,000110 + 0,034221 \cos \Gamma + 0,001280 \text{sen} \Gamma + 0,000719 \cos(2\Gamma) + 0,000077 \text{sen}(2\Gamma) \quad (3.16)$$

$$\delta_0 = [ 0,006918 - 0,399912 \cos \Gamma + 0,070257 \text{sen} \Gamma - 0,006758 \cos(2\Gamma) + 0,000907 \text{sen}(2\Gamma) - 0,002697 \cos(3\Gamma) + 0,00148 \text{sen}(3\Gamma) ] (180^\circ / \pi) \quad (3.17)$$

$$\epsilon_t = [0,000075 + 0,001868 \cos \Gamma - 0,0320077 \text{sen} \Gamma - 0,014615 \cos(2\Gamma) - 0,040849 \text{sen}(2\Gamma)] \times (1440 \text{ min} / 2\pi) \quad (3.18)$$

$$\text{onde } \Gamma = 2\pi(d_n - 1) / 365 \quad (3.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_n = 1 \text{ para 1 de janeiro} \\ d_n = 365 \text{ para 31 de dezembro} \end{array} \right. \quad \text{SEMPRE!}$$

⇒ aumento do erro dos ajustes nos anos bissextos

Algumas localidades geográficas apresentam casos particulares para o ciclo anual da posição do disco solar acima do horizonte:

a) Equador geográfico ( $\varphi = 0^\circ$ ):

$$N = 2|a \cos(-\tan \varphi \tan \delta_0)| = 12h \quad \text{todos os dias!}$$

$$\cos \zeta_o = \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_0 + \cos \varphi \cos \delta_0 \cos H_o$$

$$= \cos \delta_0 \cos H_o \quad \text{todos os dias!}$$

Para  $\delta_0 = 0^\circ$  (21 de março e 21 de setembro):

$$\Rightarrow \cos \zeta_o = \cos \delta_0 \cos H_o = \cos H_o \Rightarrow \zeta_o = |H_o|$$

b) Pólos geográficos ( $\varphi = \pm 90^\circ$ ):

$N = 2|a \cos(-\tan \varphi \tan \delta_o)| \rightarrow$  indefinição algébrica na definição do ângulo horário!

$$\cos \zeta_o = \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o + \cos \varphi \cos \delta_o \cos H_o = \pm \text{sen} \delta_o$$

O que significa que a posição do disco solar depende apenas da data. Por exemplo, para  $\varphi = +90^\circ$  (Pólo norte):

$$\Rightarrow \cos \zeta_o = \text{sen} \delta_o \begin{cases} \delta_o = 0^\circ \Rightarrow \zeta_o = 90^\circ \rightarrow \text{sol no horizonte} \\ \delta_o = +23,5^\circ \Rightarrow \zeta_o = 66,5^\circ \rightarrow \text{dia} \\ \delta_o = -23,5^\circ \Rightarrow \zeta_o = 113,5^\circ \rightarrow \text{noite} \end{cases}$$

**Exercício 3.6:** Calcule a posição  $\Omega_o = (\zeta_o, \phi_o)$  do disco solar acima do horizonte para o edifício do IAG-USP ( $\varphi \sim -23,5597^\circ$ ,  $\lambda \sim -46,7319^\circ$ ) em 23/03/2004 às 11h30min local.

Como será visto em capítulo futuro, alguns instrumentos utilizados para a medição da radiação solar direta possuem um sistema automático para acompanhar o movimento do sol no céu. Esse movimento depende de quão precisas são fornecidas as informações ao software que controla o motor do instrumento. Para verificar a importância de cada parâmetro na determinação da posição do disco solar, a próxima etapa será avaliar as incertezas no cálculo da distância solar zenital. Seu cálculo é realizado por meio das equações (3.8) e (3.6):

$$\cos \zeta_o = \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o + \cos \varphi \cos \delta_o \cos H_o$$

$$H_o = [UTC + \lambda / 15^\circ - (12 - \epsilon_t)] \times 15^\circ / 1h$$

Dessa forma, o diferencial total de  $\zeta_o$  é determinado como:

$$(d\zeta_o)^2 = \left( \frac{\partial \zeta_o}{\partial \varphi} \right)^2 (d\varphi)^2 + \left( \frac{\partial \zeta_o}{\partial \delta_o} \right)^2 (d\delta_o)^2 + \left( \frac{\partial \zeta_o}{\partial H_o} \right)^2 (dH_o)^2$$

$$\text{onde } \frac{\partial \zeta_o}{\partial \varphi} = \frac{\partial \zeta_o}{\partial(\cos \zeta_o)} \frac{\partial(\cos \zeta_o)}{\partial \varphi} = \left[ \frac{\partial(\cos \zeta_o)}{\partial \zeta_o} \right]^{-1} \frac{\partial(\cos \zeta_o)}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial(\cos \zeta_o)}{\partial \zeta_o} = -\text{sen} \zeta_o \text{ e } \frac{\partial(\cos \zeta_o)}{\partial \varphi} = \cos \varphi \text{sen} \delta_o - \text{sen} \varphi \cos \delta_o \cos H_o$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta_o}{\partial \varphi} &= (-\text{sen} \zeta_o)^{-1} [\cos \varphi \text{sen} \delta_o - \text{sen} \varphi \cos \delta_o \cos H_o] \\ &= \frac{\text{sen} \varphi \cos \delta_o \cos H_o - \cos \varphi \text{sen} \delta_o}{\text{sen} \zeta_o}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \zeta_o}{\partial \delta_o} = \frac{\partial \zeta_o}{\partial (\cos \zeta_o)} \frac{\partial (\cos \zeta_o)}{\partial \delta_o} = \frac{\cos \varphi \cos H_o \text{sen} \delta_o - \text{sen} \varphi \cos \delta_o}{\text{sen} \zeta_o}$$

$$\frac{\partial \zeta_o}{\partial H_o} = \frac{\partial \zeta_o}{\partial (\cos \zeta_o)} \frac{\partial (\cos \zeta_o)}{\partial H_o} = \frac{\cos \varphi \cos \delta_o \text{sen} H_o}{\text{sen} \zeta_o}$$

$$(dH_o)^2 = \left( \frac{\partial H_o}{\partial (UTC)} \right)^2 (dUTC)^2 + \left( \frac{\partial H_o}{\partial \lambda} \right)^2 (d\lambda)^2 + \left( \frac{\partial H_o}{\partial \epsilon_t} \right)^2 (d\epsilon_t)^2$$

$$\frac{\partial H_o}{\partial UTC} = \frac{15^\circ}{1h}; \quad \frac{\partial H_o}{\partial \lambda} = 1; \quad \frac{\partial H_o}{\partial \epsilon_t} = \frac{15^\circ}{1h}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}(d\zeta_o)^2 &= \left[ \frac{\text{sen} \varphi \cos \delta_o \cos H_o - \cos \varphi \text{sen} \delta_o}{\text{sen} \zeta_o} \right]^2 (d\varphi)^2 + \left[ \frac{\cos \varphi \cos H_o \text{sen} \delta_o - \text{sen} \varphi \cos \delta_o}{\text{sen} \zeta_o} \right]^2 (d\delta_o)^2 \\ &+ \left[ \frac{\cos \varphi \cos \delta_o \text{sen} H_o}{\text{sen} \zeta_o} \right]^2 \times \left[ \left( \frac{15^\circ}{1h} \right)^2 (dUTC)^2 + (d\lambda)^2 + \left( \frac{15^\circ}{1h} \right)^2 (d\epsilon_t)^2 \right] \quad (3.20)\end{aligned}$$

**Exercício 3.7:** Analise o impacto de uma incerteza de  $+0,1^\circ$  tanto na latitude quanto na longitude geográficas sobre a evolução diurna da distância zenital solar calculada. Adote as coordenadas do edifício principal do IAG-USP e as condições astronômicas correspondentes ao dia 21 de março.

**Exercício 3.8:** Avalie o impacto de um atraso de 1 minuto na determinação de UTC (“atraso de relógio”) sobre a evolução diurna da distância zenital solar calculada. Adote as coordenadas do edifício principal do IAG-USP e as condições astronômicas correspondentes ao dia 21 de março.

### 3.4 Irradiância Solar no Topo da Atmosfera

Define-se como topo da atmosfera a altitude acima da qual não seria observada interação significativa entre a radiação eletromagnética e os constituintes atmosféricos. Como foi visto no início deste capítulo, a irradiância solar incidente sobre uma superfície perpendicular ao feixe no topo da atmosfera depende da distância entre a Terra e o Sol (equação 3.1). Na grande maioria dos códigos de transferência radiativa, a atmosfera é aproximada como sendo constituída por camadas plano-paralelas entre si, como será visto em capítulo posterior. Dessa forma, torna-se necessário conhecer o valor da irradiância solar incidente sobre uma superfície horizontal no topo da atmosfera. Para tanto, a distância zenital solar também deve ser conhecida:

$$\epsilon(d, \zeta_o) = \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \cos \zeta_o \epsilon_o \quad (3.21)$$

### 3.5 Irradiação Solar no Topo da Atmosfera

Define-se como irradiação a quantidade total de energia radiante incidente sobre uma determinada superfície horizontal, por unidade de área desta. Matematicamente corresponde à integração no intervalo de tempo de interesse da irradiância incidente. No topo da atmosfera e para um intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\epsilon(\Delta t) = \int_{t_1}^{t_2} \epsilon(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\bar{d}}{d(t)}\right)^2 \epsilon_o \cos[\zeta_o(t)] dt \quad (3.22)$$

onde

$$\cos \zeta_o(t) = \sin \varphi \sin[\delta_o(t)] + \cos \varphi \cos[\delta_o(t)] \cos[H_o(t)]$$

$$H_o(t) = \{(t + C) + \lambda(1h/15^\circ) - [12h - \epsilon_s(t)]\}(15^\circ/1h)$$

onde  $t + C = \text{UTC}$ , isto é, a hora local mais a diferença de fuso horário com relação ao Meridiano de Greenwich. Note que a equação do tempo também varia com o tempo.

Considerando-se desprezíveis as variações diurnas (ao longo de um período de 24 horas) para a distância Terra-Sol, para a declinação solar e para a equação do tempo:

$$\epsilon(\Delta t) = \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \epsilon_o \int_{t_1}^{t_2} \cos[\zeta_o(t)] dt$$

$$\cos \zeta_o(t) = \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o + \cos \varphi \cos \delta_o \cos[H_o(t)]$$

$$H_o(t) = \left\{ (t + C) + \lambda(1h/15^\circ) - (12h - \epsilon_t) \right\} (15^\circ / 1h)$$

onde  $d$ ,  $\delta_o$  e  $\epsilon_t$  passam a indicar “valores médios diários” apresentando valores diferentes para cada data.

Resumindo, a irradiação pode ser interpretada como a soma de dois termos:

$$\begin{aligned} \in (\Delta t) &= \left( \frac{\bar{d}}{d} \right)^2 \in_o \int_{t_1}^{t_2} \{ \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o + \cos \varphi \cos \delta_o \cos[H_o(t)] \} dt \\ &= \left( \frac{\bar{d}}{d} \right)^2 \in_o \left\{ \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o \int_{t_1}^{t_2} dt + \cos \varphi \cos \delta_o \int_{t_1}^{t_2} \cos[H_o(t)] dt \right\} \end{aligned}$$

Considerando-se um dia inteiro, isto é,  $\Delta t = 24$  horas, somente os instantes de tempo para o qual  $\zeta_o \leq 90^\circ$  contribuem ao cálculo da irradiação solar. Dessa forma, o instante inicial corresponde ao instante do nascer do sol e o instante final a ser considerado na integral é o instante do pôr-do-sol. Portanto,

$$\in (24h) = \left( \frac{\bar{d}}{d} \right)^2 \in_o \left\{ \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o [t_{ocaso} - t_{nascer}] + \cos \varphi \cos \delta_o \int_{t(nascer)}^{t(ocaso)} \cos[H_o(t)] dt \right\} \quad (3.23)$$

Esses instantes de tempo podem ser expressos diretamente em termos dos respectivos valores do ângulo horário solar:

$$H_{ocaso} = [(t_{ocaso} + C) + \lambda(1h/15^\circ) - (12h - \epsilon_t)] (15^\circ / 1h) \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow t_{ocaso} + C = (H_{ocaso})(1h/15^\circ) - \lambda(1h/15^\circ) + (12h - \epsilon_t) \quad (3.25a)$$

Analogamente,

$$\Rightarrow t_{nascer} + C = (H_{nascer})(1h/15^\circ) - \lambda(1h/15^\circ) + (12h - \epsilon_t) \quad (3.25b)$$

$$\Rightarrow t_{ocaso} - t_{nascer} = (H_{ocaso} - H_{nascer})(1h/15^\circ) \quad (3.26)$$

Além disso, tem-se:

$$H_{nascer} = -H_{ocaso} \Rightarrow t_{ocaso} - t_{nascer} = 2H_{ocaso}(1h/15^\circ) \quad (3.27)$$

E, como  $dt = dH_o(1h/15^\circ)$ , pode-se integrar a equação (3.23) diretamente em termos do ângulo horário solar:

$$\int_{t(nascer)}^{t(ocaso)} \cos[H_o(t)] dt = \int_{t(nascer)}^{t(passagem\_meridiana)} \cos[H_o(t)] dt + \int_{t(passagem\_meridiana)}^{t(ocaso)} \cos[H_o(t)] dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{H(\text{nascer})}^0 \cos H_o dH_o (1h/15^\circ) + \int_0^{H(\text{ocaso})} \cos H_o dH_o (1h/15^\circ) \\
 &= 2 \left( \frac{1h}{15^\circ} \right) \times \int_0^{H(\text{ocaso})} \cos H_o dH_o = 2 \left( \frac{1h}{15^\circ} \right) \text{sen}(H_{\text{ocaso}})
 \end{aligned}$$

Resumindo, a irradiação solar em 24 horas sobre uma superfície horizontal no topo da atmosfera em uma determinada data ( $d$ ,  $\delta_o$ ,  $\epsilon_i$ ) e para uma determinada localização geográfica ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) é obtida a partir da equação:

$$\begin{aligned}
 \epsilon(24h) &= \left( \frac{\bar{d}}{d} \right)^2 \epsilon_o \left( \frac{1h}{15^\circ} \right) [2H_{\text{ocaso}} \text{sen}\varphi \text{sen}\delta_o + 2 \cos\varphi \cos\delta_o \text{sen}(H_{\text{ocaso}})] \\
 &= \left( \frac{\bar{d}}{d} \right)^2 \epsilon_o (3600s) 2 \left[ \frac{H_{\text{ocaso}}}{15^\circ} \text{sen}\varphi \text{sen}\delta_o + \frac{1}{15^\circ} \frac{180^\circ}{\pi} \cos\varphi \cos\delta_o \text{sen}(H_{\text{ocaso}}) \right]
 \end{aligned}$$

onde  $H_{\text{ocaso}} = |a \cos(-\tan\varphi \tan\delta_o)|$

**Exercício 3.9:** Calcular  $\epsilon(24h)$  para os dias 26 a 30 de junho, levando em conta as coordenadas do IAG-USP ( $\varphi \sim -23,56^\circ$ ;  $\lambda \sim -46,73^\circ$ ).

## 4. Medição de Irradiância

### 4.1 Introdução

Das grandezas radiométricas definidas no capítulo 1, os instrumentos convencionais utilizados em estudos envolvendo processos radiativos na atmosfera foram desenvolvidos para medir irradiâncias, seja em incidência normal ou sobre uma superfície horizontal, proveniente de todo um hemisfério. Em geral, tais instrumentos registram valores em intervalos espectrais definidos, em bandas largas ou estreitas. Em alguns instrumentos, é possível adaptar um colimador de forma que o campo de visão (ou ângulo sólido) seja pequeno o suficiente para que a grandeza medida possa ser convertida em radiância. Neste capítulo serão estudados os princípios físicos de funcionamento dos principais instrumentos utilizados para medição de irradiância. Tais instrumentos são denominados genericamente de radiômetros e como será visto, um radiômetro apresenta um nome mais específico dependendo da região espectral. A partir da irradiância medida em vários níveis, desde a superfície até o topo da atmosfera, vários aspectos do sistema Terra-atmosfera podem ser estudados, tais como:

- Estudo da transformação de energia dentro do sistema Terra-Atmosfera e de sua variação no espaço e no tempo;
- Análise das propriedades e distribuição espaço-temporal de constituintes da atmosfera, tais como partículas de aerossol, nuvens, gases, como O<sub>3</sub>, CO<sub>2</sub>, vapor d água;
- Obtenção de propriedades físicas da superfície (albedo, emissividade).
- Avaliação do balanço de radiação na superfície e ao longo da atmosfera;
- Monitoramento do sistema Terra-atmosfera via sensoriamento remoto a bordo de satélites artificiais;
- Verificação de medições de radiação realizadas a bordo de satélites artificiais e seus algoritmos.

## 4.2 Principais Grandezas Medidas

### 4.2.1 Radiação solar (0,3 a 4,0 $\mu\text{m}$ )

A medição de radiação solar, abrangendo todo ou grande parte do espectro de onda curta é em geral realizada por meio da irradiância global incidente sobre uma superfície plana horizontal (orientada para o zênite). O termo global indica que a radiação provém de um hemisfério. A radiação solar que atinge a superfície pode ser decomposta em dois termos:

- a) Radiação solar direta, cuja transmissão decresce com o aumento da distância zenital (aumento do caminho óptico) e particularmente quando a concentração de constituintes atmosféricos aumenta (gases, partículas de aerossol, nuvens, cristais de gelo, etc).
- b) Radiação solar difusa proveniente de todo céu, que é resultante do espalhamento de radiação solar pelas moléculas de gases, partículas de aerossol, nuvens. Exclui-se a região do disco solar, mas inclui-se a contribuição da reflexão da superfície que é novamente espalhada pela atmosfera, ou por outras superfícies vizinhas.

A distribuição espectral dos dois componentes é diferente. A radiação difusa é mais rica em onda curta do que o componente direto, devido à forte dependência espectral do espalhamento molecular, que remove de forma mais eficaz radiação do feixe solar direto com comprimento de onda menor.

A irradiância solar global  $\epsilon_g$  é, portanto, igual à soma da irradiância solar direta  $\epsilon_s$  com a difusa  $\epsilon_d$ :

$$\epsilon_g = \epsilon_s + \epsilon_d \quad (4.1)$$

onde

$$\epsilon_s = \epsilon_o t_D \quad (4.2)$$

e  $t_D$  é a transmitância direta ou fração do feixe incidente que não sofreu interação com o meio que atravessa.

Para radiação monocromática, fora de regiões espectrais com absorção gasosa muito intensa, e uma atmosfera não refratária plano-paralela, a transmitância espectral direta é obtida como:

$$t_D(\lambda) = e^{-\tau(\lambda)/\cos \zeta_0} \quad (4.3)$$

onde  $\tau(\lambda)$  é a profundidade óptica de extinção da atmosfera no comprimento de onda correspondente e  $\zeta_0$  é a distância zenital solar. Esta lei de atenuação exponencial é conhecida como Lei de Beer-Bouguer-Lambert.

Ao nível da superfície, o instrumento para medir irradiância solar global pode ser apontado para cima, permitindo-se a medição da irradiância global incidente à superfície ou para baixo, medindo-se a irradiância global solar refletida pela superfície. Todos os três componentes da radiação solar são mensuráveis, requerendo instrumentos específicos para cada componente, como será visto mais adiante ainda neste capítulo.

#### **4.2.2 Radiação de onda longa ou radiação terrestre (4 a 100 $\mu\text{m}$ )**

Conforme discutido em capítulo anterior, a radiação emitida pelo sistema Terra-atmosfera, devido à temperatura predominantemente abaixo de 300K, concentra-se na região espectral cujo comprimento de onda é maior que da ordem de 4 $\mu\text{m}$ . Pode-se considerar emissão isotrópica e as medições se limitam à irradiância emitida pela superfície e atmosfera. Dessa forma, instalam-se instrumentos apontando para cima e para baixo.

#### **4.2.3 – Radiação total**

Por definição a radiação total é a soma da radiação solar com a radiação terrestre e, portanto, cobre todo o intervalo espectral, desde 0,3 a aproximadamente 100  $\mu\text{m}$ . Apontando-se radiômetros para cima e para baixo, é possível, por exemplo, obter diretamente o saldo de radiação total à superfície, que é basicamente a diferença entre a quantidade incidente (seja solar ou emitida pela atmosfera) da quantidade total de radiação emergente (seja por reflexão de radiação solar ou emissão de radiação terrestre).

#### **4.2.4 – Medidas em bandas espectrais (filtros)**

A utilização de filtros ou detectores seletivos em regiões espectrais mais estreitas tem finalidade específica. Dentre as várias finalidades, pode-se citar a caracterização espectral do sistema Terra-atmosfera. Analisando-se as medições apontando-se o instrumento para baixo, na região espectral de onda curta pode-se, por exemplo, obter a refletância espectral da superfície. Já em onda longa, pode-se determinar a sua

emissividade. Outras aplicações incluem a determinação da concentração dos constituintes atmosféricos que interagem com a radiação nessas regiões espectrais. Exemplo: O<sub>3</sub>, no UV, vapor d'água ao redor de 940nm. Em aplicações na área de Agrometeorologia é fundamental a medição de irradiância na região espectral fotossinteticamente ativa. Já a região espectral do ultravioleta é importante em estudos de impacto ambiental, de poluição atmosférica e devido aos seus efeitos biológicos.

#### **4.2.5 – Medidas orientadas em ângulos sólidos pequenos**

Conforme discutido anteriormente, restringindo-se o ângulo sólido de um radiômetro com o auxílio de um colimador, pode-se obter valores de radiâncias oriundas de diferentes orientações. Uma das aplicações é determinar a transmitância direta da atmosfera, direcionando o sensor para o disco solar. Ao medir a radiância difusa do céu, pode-se estudar o espalhamento de radiação pelos constituintes atmosféricos e apontando-se para superfície pode-se estudar a distribuição angular da radiância refletida, cujos processos em geral não são isotrópicos.

### ***4.3 Princípios Físicos***

Os radiômetros mais utilizados nas ciências atmosféricas podem ser genericamente classificados em detectores térmicos e detectores fotoelétricos, cujos princípios físicos são discutidos a seguir.

#### **4.3.1 – Detectores térmicos**

Sua operação é baseada na transformação de energia radiante em energia térmica, com conseqüente aumento da temperatura. Como tais detectores apresentam resposta à energia total absorvida, em geral eles são não seletivos espectralmente. Entretanto, devido às limitações dos materiais absorventes (em geral, corpos não negros), esta característica não seletiva é difícil de ser obtida completamente em operação. Os principais tipos de detectores térmicos são: calorímetros, termopares ou termopilhas e bolômetros.

- Nos calorímetros a quantidade de energia radiante absorvida é determinada por medidas de mudanças de temperatura do material. Embora apresente a vantagem de ser um detector simples, apresenta baixa sensibilidade e resposta muito lenta.

- Nos detectores constituídos por termopares e termopilhas, há uma diferença de temperatura entre uma junção de dois metais diferentes e uma junção de referência (termopar) causada pela absorção de radiação. Essa diferença de temperatura gera uma força eletromotriz (fem) que é a grandeza medida. A quantidade de força eletromotriz depende dos tipos de metais. Como a utilização de um único termopar resulta em baixa sensibilidade, é comum utilizar-se termopares em série (termopilhas), aumentando a sensibilidade do detector. Esse tipo de detector é pouco seletivo espectralmente e monitorar a tensão de saída é um procedimento muito simples.

- O detector tipo bolômetro é o mais sensível dentre os detectores de radiação não seletivo. Sua operação é baseada na variação da resistência de um metal ou semicondutor com a temperatura. Em geral é constituído por um fio fino, conectado a um circuito elétrico. Quando a radiação incide sobre o fio, este sofre um aquecimento, aumentando sua resistência. A configuração mais comumente encontrada é apresentada na Figura 4.1. Os dois elementos de resistência A e B constituem os braços de uma ponte de Wheatstone. O resistor A é exposto à radiação, enquanto o resistor B é mantido à sombra. A diferença de temperatura relativa que é gerada entre eles resulta em um desequilíbrio na ponte. A diferença em condutividade é proporcional à irradiância incidente. Apresenta resposta rápida [Coulson, 1975].

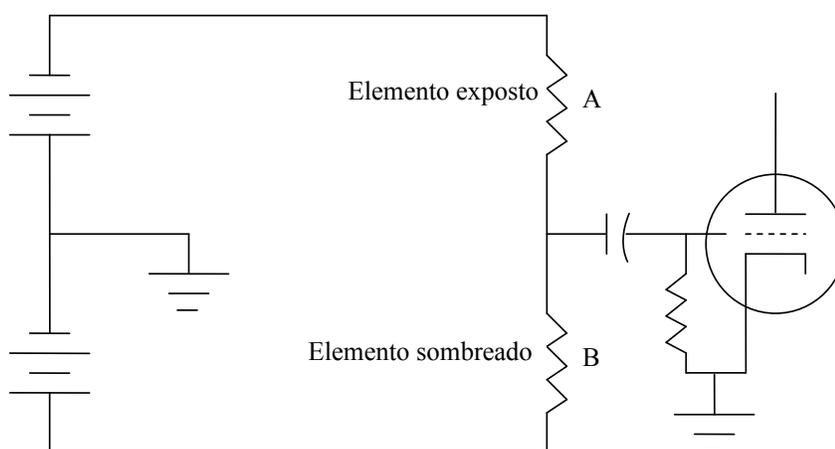


Figura 4.1 – As conexões elétricas de um bolômetro.

### **4.3.2 – Fotodetectores**

No caso destes detectores, o sensor é ativado por eventos discretos de fótons que incidem sobre o material. Por esse motivo, tais detectores apresentam respostas mais rápidas e maior sensibilidade. Por se basear em princípios da Física Quântica, podem apresentar seletividade espectral. Os principais tipos são os fotovoltaicos, fotocondutores e células foto-emissivas.

- Nos sensores fotovoltaicos, quando iluminados por radiação visível ou do ultravioleta próximo, a tensão gerada é mensurável sem a necessidade de fontes externas. Ao ser exposto à radiação, o sensor produz uma corrente elétrica, sendo por isso o mais simples dentre a categoria dos fotodetectores.

- A condutividade elétrica do material varia com o fluxo de radiação incidente nos fotocondutores. É eficiente na região espectral do infravermelho. Sua desvantagem se deve ao fato de, em geral, requerer resfriamento.

- Os detectores foto-emissivos apresentam como princípio físico a ejeção de elétrons do material quando uma onda eletromagnética incide sobre ele, de acordo com o efeito fotoelétrico (efeito cascata). É sensível nas regiões espectrais do ultravioleta, visível e infravermelho próximo.

## **4.4 Calibração**

A calibração consiste na conversão das grandezas medidas pelos instrumentos (tensão, corrente, diferença de temperatura) para a grandeza radiométrica de interesse, seja esta irradiância ou radiância, espectral ou não. Para tanto, é necessária a utilização de fontes cuja grandeza radiométrica seja conhecida com precisão e exatidão. As fontes de radiação podem ser: sol, fontes incandescentes, cavidades de corpo negro de alta e baixa temperaturas:

a) A radiação solar é utilizada como fonte de calibração, sob condição de atmosfera limpa e estável, em geral obtida no topo de montanhas.

b) Fontes incandescentes: lâmpadas padrão para determinação de energia absoluta. Existem lâmpadas padrão específicas para calibração de radiômetros em unidades de radiância espectral, irradiância espectral e irradiância total.

c) Cavidade de corpo negro de alta temperatura: cone, cilindro ou esfera “negros” com uma abertura e aquecido a temperaturas entre 1000 a 3000 K.

d) Cavidade de corpo negro de baixa temperatura: cone, cilindro ou esfera “negros” com uma abertura e com temperaturas variando entre  $-100^{\circ}\text{C}$  a  $+70^{\circ}\text{C}$ .

A verificação periódica das constantes de calibração se faz necessária para avaliar o efeito do envelhecimento dos componentes sensíveis, possíveis efeitos causados por variação de temperatura.

#### **4.5 Algumas Aplicações**

Inúmeras são as aplicações resultantes das medições de radiação eletromagnética no sistema Terra-atmosfera. Serão discutidas brevemente nesta seção algumas das aplicações, ilustrando sua importância no contexto das mudanças climáticas globais, em escala sinótica e em micro escala, abrangendo todas as áreas da Meteorologia.

No que diz respeito a alterações climáticas do planeta, é importante, por exemplo, monitorar em escalas de tempo maiores que um ano o seu equilíbrio radiativo, isto é, se, em média, sobre um tempo suficientemente grande, a quantidade de radiação incidente é igual à quantidade de radiação emergente:

$$\epsilon_{in} = \epsilon_{out}$$

onde  $\epsilon_{in}$  é a irradiância solar incidente no topo da atmosfera e  $\epsilon_{out}$  é a irradiância solar refletida tanto pela superfície quanto pela atmosfera somada à irradiância de onda longa emitida pela superfície e atmosfera.

A partir de medições da irradiância solar incidente e refletida ao nível da superfície, é possível determinar o albedo da superfície, que é a razão entre a irradiância refletida pela superfície e a irradiância incidente:

$$\alpha = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{inc}} \quad (4.4)$$

Outras aplicações com medições à superfície incluem o balanço de energia à superfície e a determinação dos fluxos de calor latente e sensível. Neste caso medem-se a irradiância solar global incidente, a refletida pela superfície, a irradiância emitida pela atmosfera em direção à superfície e a irradiância emitida pela superfície. É possível

estender o estudo ao ciclo de carbono, determinando-se os fluxos de CO<sub>2</sub> sobre uma determinada cobertura vegetal, assim como avaliar a produtividade de culturas agrícolas.

Dependendo da região espectral, pode-se determinar quantidades relacionadas aos constituintes atmosféricos integrados na coluna vertical como o vapor d'água, aerossol, ozônio, cobertura de nuvens, etc.

Toda a tecnologia do sensoriamento remoto do sistema Terra-atmosfera é baseada em medições de grandezas radiométricas. As aplicações variam, em particular, de acordo com a região e resolução espectral, a varredura angular do sensor e a resolução espacial.

**Exercício 4.1:** Em que outras situações é importante medir a radiação solar e/ou terrestre?

#### **4.6 Instrumentos Convencionais**

- Piranômetro: Irradiância solar global incidente e refletida sobre uma superfície plana horizontal. Em geral, o intervalo espectral de um piranômetro se encontra entre 0,2 a 2,8  $\mu\text{m}$ . Com o auxílio de um disco ou anel de sombreamento é possível medir o componente difuso da irradiância solar.

- Piranômetro espectral: Mede os componentes global, difuso ou refletido da irradiância solar em bandas espectrais largas, em geral com o auxílio de filtros.

- Net piranômetro: irradiância solar global líquida. Em geral é constituído por dois sensores, um apontando para cima e medindo a irradiância solar incidente e outro apontando para baixo, medindo a irradiância solar refletida pela superfície.

- Pireliômetro: Irradiância solar direta em incidência normal. O pireliômetro é constituído por um colimador com pequeno campo de visão (ângulo sólido), de forma a minimizar a contribuição da radiação difusa gerada por espalhamento na direção frontal; em geral é acoplado a um sistema automático de rastreamento do sol.

- Pireliômetro espectral: Mede a irradiância solar direta em bandas espectrais largas.

- Fotômetro solar: Mede a irradiância solar direta em bandas espectrais estreitas (a largura à meia altura da banda pode variar entre 2 a 10 nm na maioria dos fotômetros).

- Pirgeômetro: Irradiância na região do infravermelho térmico proveniente de um hemisfério sobre superfície plana e horizontal. Mede-se a irradiância emitida por camadas

da atmosfera e pela superfície. É projetado para medir irradiância no intervalo entre 4 a 50  $\mu\text{m}$ , aproximadamente.

- Pirradiômetro – Mede a irradiância total (solar global incidente e de onda longa emitida pela atmosfera, se apontado para cima, solar global refletida e de onda longa emitida pela superfície, se apontado para baixo).

- Net pirradiômetro – Irradiância total líquida.

## 5. Absorção e espalhamento

De acordo com o estudado em capítulos anteriores:

- O processo de absorção remove energia radiativa do feixe incidente transformando-a em outras formas de energia. Na maioria dos processos atmosféricos, em energia térmica;

- No espalhamento, a energia que incide em uma direção é espalhada ou desviada para outras direções, havendo a produção de radiação difusa.

Tais processos são promovidos por alguns constituintes atmosféricos e dependem de suas características físicas, que podem ser o tamanho da partícula com relação ao comprimento de onda da radiação incidente, de sua composição química, do arranjo dos átomos que compõem as moléculas. No próximo tópico são apresentados os principais constituintes atmosféricos que interagem com a radiação eletromagnética. Antes, um exemplo do papel dos processos radiativos na atmosfera é discutido.

O perfil vertical de temperatura da atmosfera é predominantemente devido a processos radiativos. A Figura 5.1 ilustra o perfil de temperatura médio da Terra, onde é possível observar que a região próxima à superfície apresenta um declínio praticamente linear da temperatura com a altura. Essa região é denominada troposfera e seu perfil de temperatura é devido ao aquecimento radiativo da superfície que transfere calor a camadas mais inferiores da atmosfera. O limite superior dessa região é denominado tropopausa. A causa desse mínimo de temperatura e do aumento de temperatura na região superior, a estratosfera, é devida a processos radiativos, mais precisamente devido à absorção de radiação solar pela camada de ozônio. A região superior de declínio de temperatura aos 50-95 km de altura é denominada mesosfera. Na borda superior da mesosfera, ocorre um segundo mínimo de temperatura, na mesopausa. Novamente, o declínio de temperatura é devido a processos radiativos. Há uma diminuição da concentração do ozônio e um aumento na eficiência de resfriamento radiativo. As baixas concentrações de ozônio nessas altitudes implicam em um aquecimento solar reduzido e o resfriamento radiativo no infravermelho permite que essa região seja significativamente mais fria do que a estratosfera, em particular na mesosfera, a aproximadamente 85 km de altura. É importante observar, porém, que processos dinâmicos também são importantes nessa região. A região acima dos 90 km, a termosfera, é uma região muito quente e tênue devido ao aquecimento

causado pela foto-ionização devido à absorção de radiação UV e raios-X [Thomas e Stamnes, 1999]. É nesta região que se localiza a ionosfera e que torna possível a transmissão de ondas de rádio por refleti-las de volta à superfície da Terra.

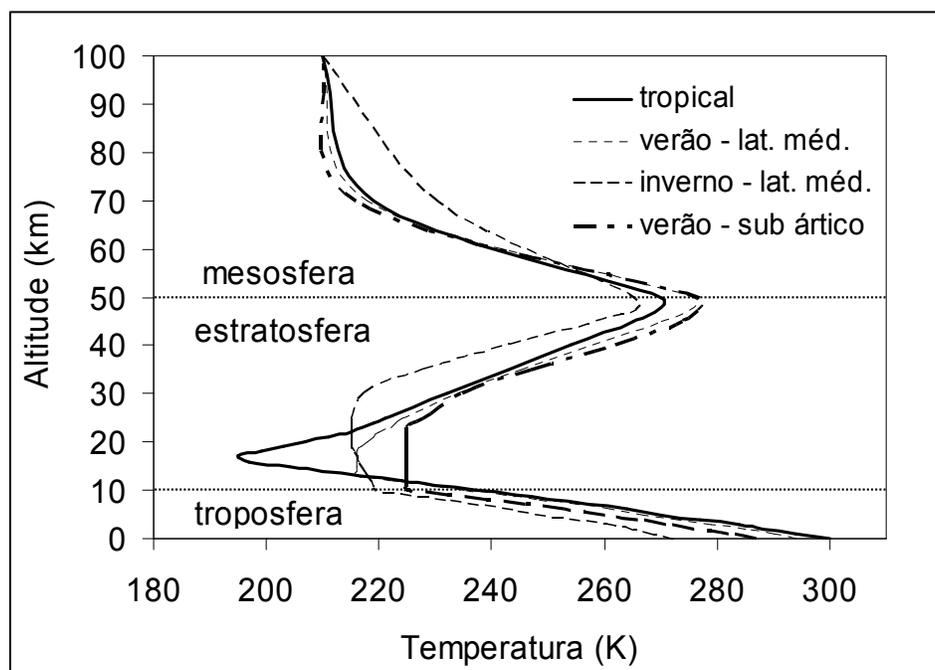


Figura 5.1 – Modelos empíricos de perfis de temperatura padrão para algumas localidades e épocas do ano. Adaptado da biblioteca interna do código de transferência radiativa SBDART (Santa Bárbara DISORT *Atmospheric Radiative Transfer*, Ricchiazzi et al., 1998).

### 5.1 Constituintes Atmosféricas Relevantes

A atmosfera é composta por um grupo de gases com concentração praticamente constante e um grupo de gases com concentração variável. Praticamente 99% da atmosfera seca é constituída por  $N_2$  e  $O_2$ . Os gases traço importantes para os processos radiativos na atmosfera, também denominados gases do efeito estufa são o vapor d'água ( $H_2O$ ), dióxido de carbono ( $CO_2$ ), metano ( $CH_4$ ), óxido nitroso ( $N_2O$ ), ozônio ( $O_3$ ) e os clorofluorcarbonos (CFCs). A atmosfera também contém partículas sólidas e líquidas, que constituem os aerossóis atmosféricos, gotas d'água e cristais de gelo. As concentrações desses constituintes atmosféricos variam significativamente no espaço e no tempo. Por sua

abundância na atmosfera ou devido à importância aos processos radiativos, serão discutidos rapidamente os principais mecanismos que caracterizam o ciclo desses compostos na atmosfera.

### 5.1.1 Gases

-  $N_2$ : Removido da atmosfera e depositado na superfície pelas bactérias fixadoras de nitrogênio e através dos relâmpagos durante a precipitação. Retorna para a atmosfera por combustão de biomassa e desnitrificação.

-  $O_2$ : Fotossíntese e respiração.

- Vapor d'água: A concentração na atmosfera é variável tanto espacial quanto temporalmente. As maiores concentrações estão próximas ao equador, sobre os oceanos e florestas tropicais úmidas. As menores concentrações são observadas sobre as áreas polares frias e regiões subtropicais desérticas. As várias funções importantes do vapor d'água no planeta: a) redistribuição de energia via calor latente; b) condensação e precipitação, fornecendo água doce essencial para a sobrevivência de plantas e animais; c) aquecimento da atmosfera terrestre através do efeito estufa.

-  $CO_2$ : Nos últimos 300 anos houve um aumento de concentração na atmosfera de mais de 25%. O aumento foi associado à queima de combustíveis fósseis, desmatamento e outras formas de mudanças no uso da terra. O aumento de sua concentração provoca o aquecimento global via efeito estufa. Seu ciclo é majoritariamente via fotossíntese e respiração.

-  $CH_4$ : Importante gás do efeito estufa. Desde 1750 apresentou um aumento maior que 140% em sua concentração na atmosfera. As principais fontes antropogênicas são: cultivo de arroz, animais domésticos herbívoros, cupins, aterros, mineração de carvão e extração de óleo e gás:

a) cultivo de arroz: devido à condição anaeróbica das áreas alagadas;

b) animais herbívoros: processo de digestão;

c) cupins: desmatamento provoca aumento de sua população;

d) depósito de carvão, óleo e gás natural: liberam metano para a atmosfera quando escavados ou perfurados.

### **5.1.2 Aerossol**

O aerossol é definido como partículas sólidas e ou líquidas em suspensão em um meio gasoso. Na atmosfera, o meio gasoso é o próprio ar. A descrição completa das partículas de aerossol atmosférico requer especificação não só de sua concentração, mas também de seu tamanho, composição química, fase (líquida ou sólida) e morfologia (forma das partículas). Tais características dependem basicamente de suas fontes de emissão e dos processos de evolução ou “envelhecimento” na atmosfera. O intervalo de tamanho varia desde aglomerados de moléculas a partículas com raio de algumas dezenas de micrômetros ( $\sim 5 \times 10^{-3} \mu\text{m}$  a  $20 \mu\text{m}$ ).

As principais fontes naturais são ressuspensão de poeira do solo, erupção vulcânica, spray marinho, queimadas, grãos de pólen e reações entre emissões gasosas (processo denominado conversão gás-partícula). Dentre as fontes antropogênicas destacam-se a queima de combustíveis fósseis, processos industriais, poeira de ruas pavimentadas ou não, transporte, queima de biomassa.

O tempo de residência do aerossol na atmosfera varia de alguns dias a uma semana. Durante esse tempo, as partículas sofrem “envelhecimento” que envolvem processos de coagulação, condensação, evaporação, processamento dentro de nuvens. Sua remoção da atmosfera é feita por deposição seca (sedimentação e difusão) e úmida (chuva). Devido ao curto tempo de residência na atmosfera, sua concentração e o tipo (composição química, distribuição de tamanho, forma) são altamente dependentes da fonte emissora.

Elas são importantes nos processos de espalhamento e absorção de radiação solar e na formação de nuvens por atuarem como núcleos de condensação de nuvens. Houve uma intensificação no estudo de seus processos e efeitos, nos últimos anos, por supostamente atuarem contra os gases do efeito estufa, causando resfriamento do sistema terra-atmosfera. Maiores detalhes sobre a composição química, a física dos aerossóis e seus processos de formação, evolução e remoção podem ser obtidos em Seinfeld e Pandis [1998].

## **5.2 Absorção Molecular**

Neste tópico são discutidos os princípios básicos sobre a absorção de radiação pelos gases atmosféricos, de forma a compreender o motivo pelo qual, embora sendo os mais

abundantes compostos gasosos que constituem a atmosfera,  $N_2$  e  $O_2$  não atuam nos processos de absorção e emissão de radiação.

### 5.2.1 Espectro de absorção (emissão) atômico

Com base no modelo clássico de um átomo, constituído de um núcleo e algumas camadas externas onde orbitam os elétrons, a emissão (absorção) de radiação ocorre somente quando um elétron do átomo sofre transição de um estado com uma determinada energia  $U_k$  para outro com energia menor (maior)  $U_j$ :

$$\text{- para emissão: } U_k - U_j = h\nu \quad (5.1)$$

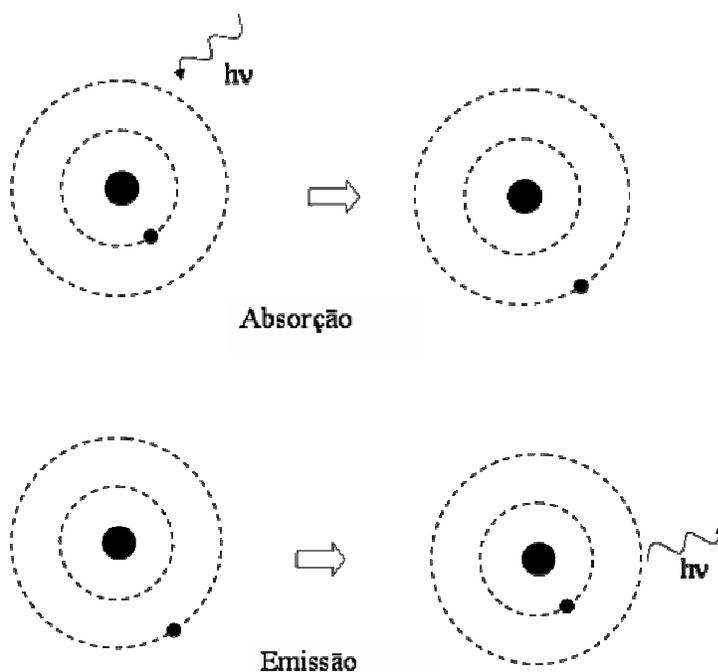


Figura 5.2 – Ilustração esquemática do processo de absorção e emissão de radiação eletromagnética por um átomo.

É importante lembrar que os estados são quantizados, de forma que o elétron sofre transição entre as camadas se houver absorção (emissão) de radiação eletromagnética de determinada frequência. Para o átomo de Hidrogênio, a energia de um nível  $n$  é determinada como:

$$U_n = -\frac{Rhc}{n^2} \quad (5.2)$$

onde  $n$  é um número inteiro e  $R$  é a constante de Ryberg ( $=1,092 \times 10^5 \text{cm}^{-1}$  para o hidrogênio). Portanto, só ocorre absorção de radiação por um átomo de hidrogênio se a radiação incidente apresentar número de onda igual a:

$$\tilde{\nu} = R \left( \frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (5.3)$$

onde  $j$  e  $k$  são números inteiros definindo os níveis de energia mais baixo e mais alto, respectivamente. Da mesma forma que o átomo de hidrogênio também só emite radiação cujo número de onda é calculado a partir da expressão 5.3.

### 5.2.2 Espectro de emissão (absorção) molecular

O espectro de absorção molecular é mais complexo do que o de um átomo porque as moléculas possuem várias formas de energia interna. Dessa forma, três tipos de espectros de absorção/emissão são possíveis:

- 1) linhas bem definidas de largura finita;
- 2) agregados (séries) de linhas denominados bandas espectrais;
- 3) espectro contínuo que se estende por um intervalo largo de comprimento de onda.

A estrutura da molécula, isto é, como os átomos estão “geometricamente” arranjados, é importante para compreender os vários tipos de energia interna. As moléculas podem ser lineares, isto é, os átomos estão arranjados em uma linha, tais como o  $\text{CO}_2$  e  $\text{N}_2\text{O}$ . Há moléculas com simetria “esférica” como o  $\text{CH}_4$ . Finalmente, há moléculas assimétricas como o  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{O}_3$ . A Figura 5.3 ilustra exemplos de cada tipo de molécula.

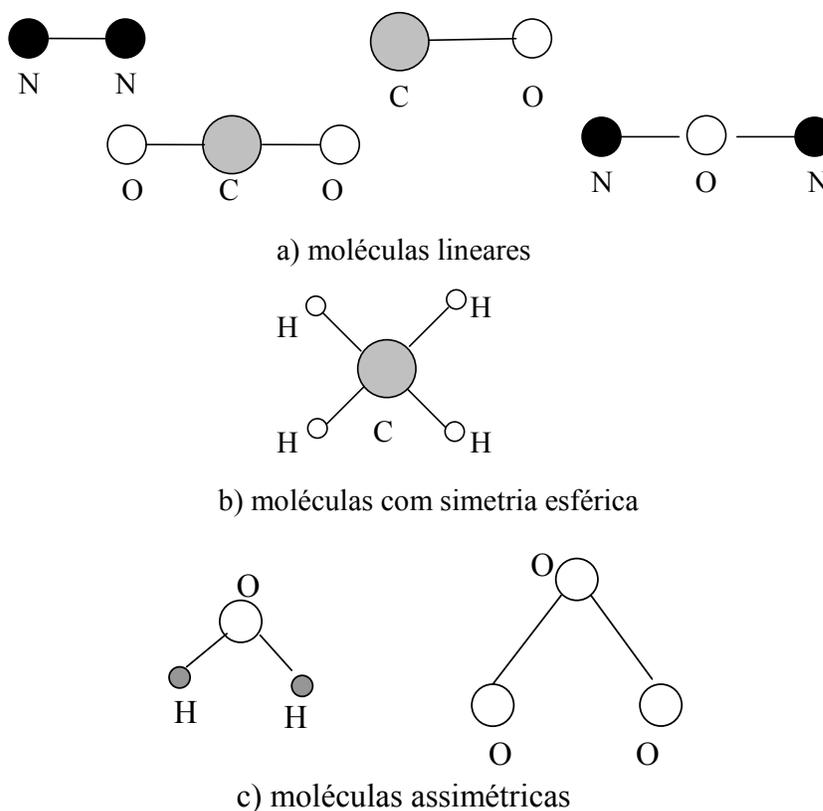


Figura 5.3 – Ilustração esquemática do arranjo geométrico dos átomos em moléculas: a) lineares; b) com simetria esférica; e c) assimétricas.

Em geral, a energia total  $U$  de uma molécula pode ser resultante da soma dos seguintes tipos de energia:

$$U = U_{\text{rot}} + U_{\text{vib}} + U_{\text{el}} + U_{\text{tr}} \quad (5.4)$$

-  $U_{\text{rot}}$  é a energia cinética de rotação. A radiação com energia da mesma ordem de grandeza desse tipo de energia interna se encontra na região espectral do infravermelho longínquo e microondas ( $\tilde{\nu} \sim 1$  a  $500 \text{ cm}^{-1}$  ou  $\lambda \sim 10^3$  a  $10^5 \mu\text{m}$ ). Isso significa que, ao absorver radiação cujo comprimento de onda se encontra nessa faixa espectral, a molécula adquire energia interna suficiente para sofrer rotação sobre um eixo que passa pelo seu centro de gravidade.

-  $U_{\text{vib}}$  é a energia cinética de vibração. Os átomos das moléculas são ligados por certas forças que os permitem oscilar ou vibrar sobre suas posições de equilíbrio ao sofrer perturbação. Por exemplo, ao absorver radiação com número de onda na região espectral do infravermelho ( $\tilde{\nu} \sim 500$  a  $10^4 \text{ cm}^{-1}$  ou  $\lambda \sim 2$  a  $100 \mu\text{m}$ ).

-  $U_{el}$  é a energia eletrônica, isto é, a energia potencial envolvida nas transições eletrônicas (conforme discutido no tópico 5.2.1 para um átomo). A radiação necessária para esse tipo de processo em uma molécula gasosa típica da atmosfera terrestre abrange a região espectral do ultravioleta e visível ( $\tilde{\nu} \sim 10^4$  a  $10^5$   $\text{cm}^{-1}$  ou  $\lambda < 0,7$   $\mu\text{m}$ ).

-  $U_{tr}$  é a energia cinética de translação. Para temperaturas típicas da atmosfera, da ordem de 300K, a troca de energia cinética entre as moléculas durante as colisões envolve valores de energia equivalentes à radiação eletromagnética na região espectral do infravermelho térmico, com número de onda da ordem de 200 a 400  $\text{cm}^{-1}$ , isto é, da mesma ordem de grandeza da energia necessária para rotação de uma molécula.

Portanto, vale a relação:  $U_{rot} < U_{tr} < U_{vib} < U_{el}$ , o que significa que a energia cinética de translação pode influenciar significativamente os níveis de rotação, moderadamente os níveis de translação e de forma não significativa os níveis eletrônicos. Os processos de rotação, vibração e transições eletrônicas das moléculas são eventos quantizados, de forma que  $U_{rot}$ ,  $U_{vib}$  e  $U_{el}$  são energias quantizadas, possuindo valores discretos governados por regras de seleção.

Somente as moléculas que possuem momento de dipolo elétrico ou magnético permanente exibem transições radiativas de energia puramente rotacional. Lembrando que um dipolo é representado por centros de cargas positivas e negativas  $Q$  separados por uma distância  $d$ . O momento de dipolo associado a esses centros de cargas é igual a  $Qd$ . Se as cargas estão distribuídas simetricamente implica que não há momento de dipolo permanente e por isso não há atividade radiativa no infravermelho longínquo (não há transições em energia rotacional). Em outras palavras, moléculas cujos átomos são distribuídos simetricamente são transparentes para radiação infravermelha longínqua. O  $\text{CO}_2$ , por exemplo, não possui momento de dipolo permanente e, portanto, não possui transição rotacional pura e por isso não apresenta linhas de absorção no infravermelho longínquo e microondas. Entretanto, como ele pode adquirir momento de dipolo oscilante em seus modos vibracionais, ele apresenta bandas de vibração-rotação. Moléculas como  $\text{CO}$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{O}_3$  exibem espectros puramente rotacionais.

As transições radiativas de energia vibracional requerem uma mudança no momento de dipolo (por exemplo, momentos oscilantes). Dessa forma, moléculas que não apresentam momento de dipolo permanente podem ser induzidas radiativamente a apresentar momento

de dipolo. A Figura 5.4 ilustra um exemplo de como a molécula de  $\text{CO}_2$  pode adquirir momento de dipolo. Como  $U_{\text{vib}} > U_{\text{rot}}$ , as linhas espectrais relacionadas à vibração das moléculas apresentam outras linhas próximas devido à rotação, isto é, há bandas de vibração-rotação. Pela simetria das moléculas de  $\text{N}_2$  e  $\text{O}_2$ , elas não apresentam linhas de absorção por vibração e/ou rotação, embora sejam os gases mais abundantes da atmosfera.

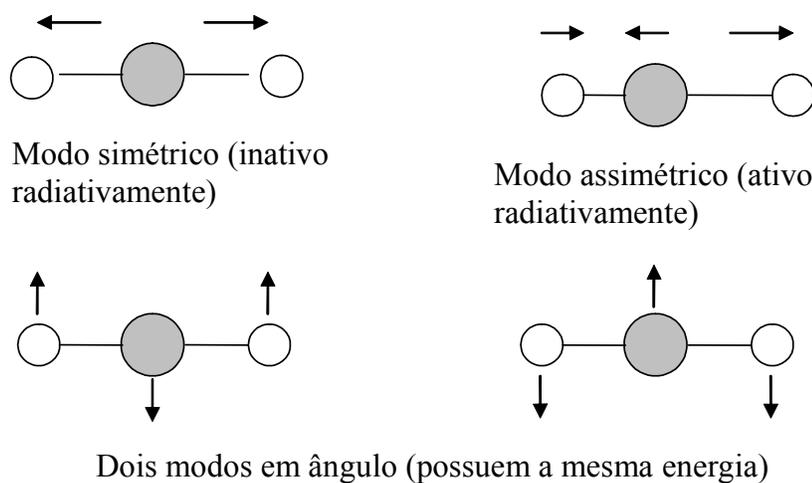


Figura 5.4 – Modos vibracionais da molécula de  $\text{CO}_2$ . Os modos de vibração assimétricos permitem que a molécula adquira momento de dipolo. Dessa forma, as linhas de absorção associadas a tais modos, apresentam outras linhas, associadas à energia cinética de rotação, gerando bandas de vibração-rotação.

Nas transições eletrônicas, como foi visto anteriormente, os elétrons se deslocam para níveis de energia mais alta por absorção de radiação e ao retornar a níveis menos energéticos há emissão da energia excedente na forma de radiação. No processo de fotoionização arrancam-se elétrons das moléculas e na fotodissociação ocorre a quebra das moléculas ao absorver radiação. Tanto a fotoionização quanto a fotodissociação produzem espectros de absorção contínuos. Nesses processos, os átomos ou moléculas podem absorver mais energia do que o mínimo necessário para a remoção do elétron ou dissociação da molécula.

### 5.2.3 Formas das linhas espectrais

Uma linha de absorção é definida por três propriedades principais:

- 1) posição central da linha (ex: frequência central);
- 2) intensidade da linha S;
- 3) fator de forma ou perfil f da linha.

Toda linha tem uma largura natural associada. Esse alargamento natural de uma linha é devido ao Princípio da Incerteza. Uma molécula excitada sofrerá decaimento espontâneo a um estado menos energético com a emissão de um fóton. Cada estado, com exceção do estado fundamental, apresenta uma meia-vida finita e, de acordo com o princípio de incerteza, deve possuir um intervalo finito (estrito) de energias envolvidas [Goody e Yung, 1989]. Comparativamente aos outros efeitos, o alargamento natural é praticamente desprezível.

Na atmosfera, vários processos podem resultar em um alargamento adicional de uma linha espectral:

- colisão entre as moléculas (ou alargamento por pressão). Num processo de colisão, há transferência de energia cinética de translação (energia não quantizada) entre as moléculas absorvedoras e entre moléculas absorvedoras e não absorvedoras de radiação. O alargamento por pressão é fundamental na transferência radiativa na baixa atmosfera onde a pressão é alta e, portanto, a densidade de moléculas é maior, resultando em alta probabilidade de colisão entre elas.

- devido a diferenças nas velocidades térmicas das moléculas (movimentos aleatórios). Esse tipo de alargamento é denominado Doppler;

- combinação dos dois processos.

Esses alargamentos são descritos matematicamente por:

a) perfil de Lorentz, usado para caracterizar o alargamento por pressão:

$$f_L(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) = \frac{\alpha / \pi}{(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)^2 + \alpha^2} \quad (5.5)$$

onde  $f_L(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0)$  é o fator de forma de uma linha espectral,  $\tilde{\nu}_0$  é o número de onda da posição central da linha,  $\alpha$  é a largura à meia altura da linha, em  $\text{cm}^{-1}$  (frequentemente denominada de largura da linha). A largura à meia altura do perfil de Lorentz é uma função da pressão P e da temperatura T da atmosfera e pode ser expressa como:

$$\alpha(P, T) = \alpha_0 \frac{P}{P_0} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \quad (5.6)$$

onde  $\alpha_0$  é a largura à meia altura de referência para STP (condições padrão de temperatura e pressão):  $T_0 = 273\text{K}$ ,  $P_0 = 1013\text{ mb}$ .  $\alpha_0$  varia entre 0,01 a 0,1  $\text{cm}^{-1}$  para a maioria dos gases atmosféricos radiativamente ativos.

b) Perfil de Doppler é definido na ausência de efeitos de colisão como:

$$f_D(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) = \frac{1}{\alpha_D \sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0}{\alpha_D}\right)^2\right] \quad (5.7)$$

onde  $\alpha_D$  é a largura à meia altura:

$$\alpha_D = \frac{\tilde{\nu}_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (5.8)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $k$  é a constante de Boltzmann ( $1,3806 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ) e  $m$  é a massa da molécula.

O efeito Doppler é resultado dos movimentos randômicos das moléculas. Se a molécula se move com velocidade térmica  $V$  e emite a frequência  $\nu_0$ , seria como se ela emitisse à frequência:

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{V}{c}\right) \quad (5.9)$$

onde  $V \ll c$ .

O alargamento Doppler é importante para altitudes entre 20 a 50 km. As formas dos dois perfis são comparadas na Figura 5.5. A maior diferença está nas “asas” do perfil Doppler, que tende a zero mais rapidamente do que no perfil de Lorentz.

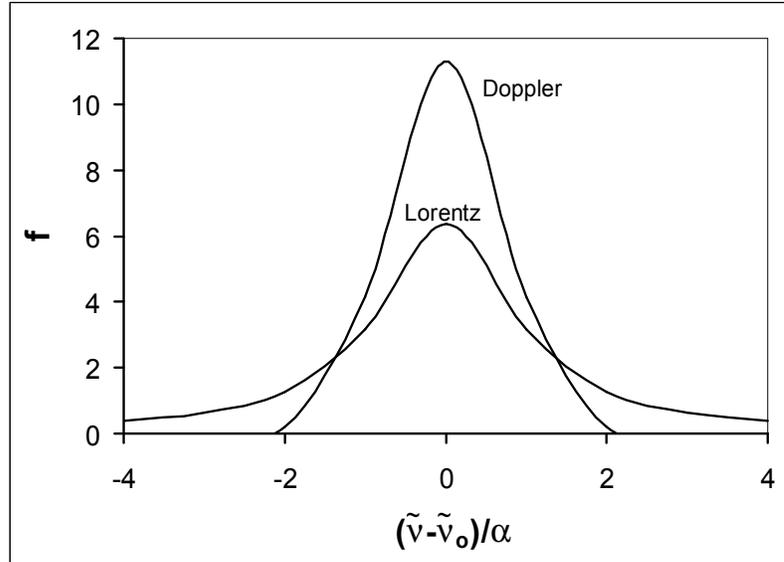


Figura 5.5 – Formas dos perfis de Lorentz e Doppler para os mesmos valores de intensidade e larguras à meia altura.

c) Perfil de Voigt é a combinação dos perfis de Lorentz e de Doppler para caracterizar o alargamento sob condições de baixa pressão (acima de aproximadamente 40km na atmosfera). Nessas altitudes, os processos de colisão e o efeito Doppler não podem ser tratados separadamente:

$$\begin{aligned}
 f_{Voigt}(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_L(\tilde{\nu}' - \tilde{\nu}_0) f_D(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}') d\tilde{\nu}' \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha_D \pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{\nu}' - \tilde{\nu}_0)^2 + \alpha^2} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\nu} - \tilde{\nu}'}{\alpha_D}\right)^2\right] d\tilde{\nu}' \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Sua solução só pode ser obtida numericamente.

### 5.2.4 Coeficiente mássico e profundidade óptica de absorção

A quantidade de radiação absorvida por um determinado gás em uma determinada região espectral depende do coeficiente de absorção mássico do gás (com unidade de área por massa), que é definido pela posição, intensidade e forma de uma linha espectral:

$$k_{\tilde{\nu}} = S f(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) \quad (5.11)$$

onde  $S$  é a intensidade da linha e  $f$  o seu perfil:

$$S = \int k_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu} \quad \text{e} \quad \int f(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0) d\tilde{\nu} = 1$$

A partir do coeficiente de absorção mássico, outros parâmetros importantes na descrição do processo de absorção de radiação por um determinado gás podem ser determinados:

- seção de choque, que representa a área de absorção efetiva de um elemento diferencial de massa do gás  $\rho(z')dAdz'$ :

$$\sigma_a(\tilde{\nu}, z') = k_{\tilde{\nu}} \rho(z') dAdz' \quad (5.12)$$

onde  $\rho(z')$  é a densidade do gás à altura  $z'$ .

- coeficiente linear de absorção, que mede a distância característica na qual a radiação é atenuada (com dimensão de  $\text{m}^{-1}$  no SI):

$$\beta_a(\tilde{\nu}, z') = N(z') \sigma_a(\tilde{\nu}, z') \quad (5.13)$$

onde  $N(z')$  é a densidade numérica de moléculas do gás (número de moléculas do gás por unidade de volume de ar).

- profundidade óptica monocromática de absorção do gás:

$$\tau_a(\tilde{\nu}, z) = \int_{\infty}^z \beta_a(\tilde{\nu}) dz' \quad (5.14)^{10}$$

**Exercício 5.1:** Ao nível do mar e temperatura igual a  $0^\circ\text{C}$ , a largura à meia altura do perfil de Lorentz é igual a  $0,08 \text{ cm}^{-1}$  para uma linha de absorção de um determinado gás. A 500 mb e à temperatura  $T = -30^\circ\text{C}$ , a linha espectral associada a essa absorção será mais larga ou estreita?

### 5.3 Espalhamento

A grande parte da luz que percebemos com nossos olhos não vem diretamente de suas fontes, mas indiretamente através do processo de espalhamento. Na atmosfera, o espalhamento é causado por moléculas, partículas de aerossol e nuvens contendo gotas e

<sup>10</sup> A profundidade óptica é definida a partir do topo da atmosfera, isto é,  $z \rightarrow \infty$ . Define-se topo da atmosfera a altura na qual a densidade de moléculas é desprezível, não havendo interação significativa entre os constituintes da atmosfera e a radiação, e por esse motivo, a profundidade óptica é igual a zero no topo.

cristais de gelo. O azul do céu, a coloração branca das nuvens, arco-íris, halos são exemplos de fenômenos gerados por espalhamento de radiação eletromagnética, em particular da região espectral visível. O espalhamento é geralmente acompanhado por absorção. Como citado por van de Hulst [1981], a folha de uma árvore apresenta cor verde porque ela espalha luz verde de forma mais eficiente do que a luz vermelha. A luz vermelha incidente sobre a folha é absorvida, o que significa que essa energia foi convertida para alguma outra forma. A absorção predomina em materiais como carvão, fumaça negra, sendo praticamente ausente em nuvens (na região espectral do visível). Conforme discussão em capítulos anteriores, tanto o espalhamento quanto a absorção removem energia de um feixe de radiação que atravessa um meio, causando atenuação do feixe. Essa atenuação é denominada extinção.

Se num processo de absorção, o fóton ou radiação em determinado comprimento de onda é convertido em outra forma de energia (como a luz vermelha no exemplo da folha), o processo de espalhamento tratado neste curso é aquele no qual a radiação é espalhada ou desviada da orientação original de propagação para uma outra orientação qualquer, sem que o seu comprimento de onda seja alterado. É importante lembrar, porém, que há efeitos de espalhamento como o Raman nos quais a radiação espalhada apresenta comprimento de onda diferente da incidente. Dessa forma, a descrição do processo de espalhamento baseia-se fundamentalmente em determinar a probabilidade da radiação incidente ser desviada para uma orientação qualquer. O padrão de espalhamento não ocorre de forma aleatória, isto é, a distribuição da radiação emergente em diferentes orientações depende de algumas características das partículas que constituem o meio no qual a radiação se propaga. Uma dessas características é a razão entre o tamanho da partícula espalhadora e o comprimento de onda da radiação incidente. Uma partícula muito pequena espalha radiação nas direções frontal e traseira na mesma proporção (Figura 5.6a). À medida que a partícula torna-se maior, a radiação espalhada concentra-se cada vez mais nas direções frontais, apresentando padrões cada vez mais complexos (Figuras 5.6b e 5.6c).

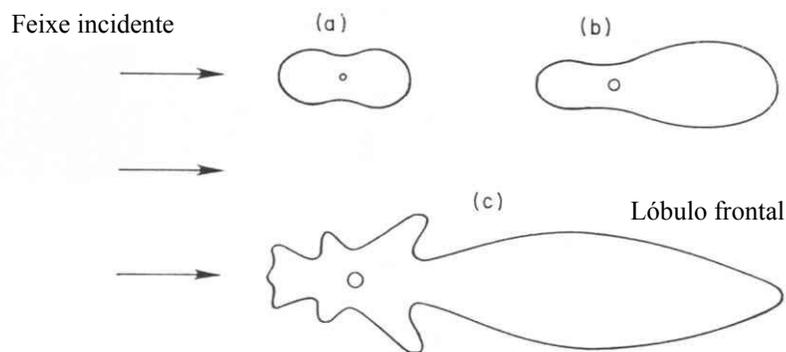


Figura 5.6 – Distribuição angular da radiação espalhada: a) por partículas muito pequenas com relação ao comprimento de onda da radiação incidente; b) por partículas maiores; c) por partículas muito maiores que o comprimento de onda da radiação incidente [Adaptado de Liou, 1980].

A função que descreve matematicamente o padrão angular de espalhamento é denominada função de fase e será representada pela letra  $P$ :

$$P(\lambda, \Omega_{in}, \Omega_{esp}) \text{ ou } P(\lambda, \Theta)$$

onde,  $\Omega_{in} = (\theta_{in}, \varphi_{in})$  representa as coordenadas da orientação de incidência,  $\Omega_{esp} = (\theta_{esp}, \varphi_{esp})$  representa as coordenadas da orientação de espalhamento ou emergente após o espalhamento e  $\Theta$  é o ângulo de espalhamento (ângulo entre a direção incidente e a direção espalhada). A Figura 5.7 ilustra como é definido o ângulo de espalhamento num plano. As setas indicam as orientações de incidência e de espalhamento da radiação ao interagir com uma partícula, representada pela esfera branca.

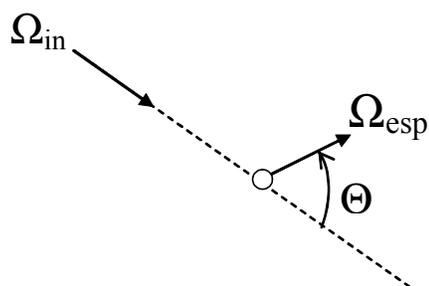


Figura 5.7 – Definição do ângulo de espalhamento  $\Theta$  em um plano.

Da geometria esférica, obtém-se:

$$\cos\Theta = \cos\theta_{in} \cos\theta_{esp} + \sin\theta_{in} \sin\theta_{esp} \cos(\varphi_{in} - \varphi_{esp}) \quad (5.15)$$

A função de fase é normalizada de tal forma que:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} P(\cos\Theta) d\Omega = 1 \quad (5.16)$$

Há basicamente dois modelos matemáticos que descrevem o espalhamento: quando as partículas são muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente, o espalhamento é denominado espalhamento Rayleigh ou espalhamento molecular, visto que na atmosfera é promovido basicamente pelas moléculas de  $N_2$  e  $O_2$  por serem as mais abundantes. Para partículas cujo tamanho é comparável ou maior que o comprimento de onda da radiação incidente, o espalhamento é denominado espalhamento Mie. O espalhamento só é observável se o meio no qual a radiação atravessa é não homogêneo. A descrição física se baseia na propagação de uma onda eletromagnética em um meio dielétrico. O campo elétrico cria dentro de cada átomo uma separação de cargas que oscilam à mesma frequência que a onda incidente, isto é, gera um momento de dipolo induzido. A teoria eletromagnética prevê que cargas oscilantes irradiam uma onda eletromagnética com a mesma frequência da frequência de oscilação das cargas. Em geral, essa onda irradiada ou espalhada apresenta uma diferença de fase definida com relação à onda incidente. Dessa forma, a onda espalhada é coerente com a onda incidente. No caso mais simples, ela se propaga como uma onda esférica com o padrão de radiação típico de um dipolo [Thomas e Stamnes, 1999].

### 5.3.1 Espalhamento Rayleigh

A formulação mais simples de espalhamento descreve a interação da radiação solar com as moléculas e foi desenvolvida por Rayleigh em 1871. O espalhamento Rayleigh se aplica ao estudo do espalhamento de partículas muito menores que o comprimento de onda da radiação incidente (partículas com raio menor que  $0,1\lambda$ ), considerando-a exposta à radiação eletromagnética como um dipolo oscilante. Com esse raciocínio obtém-se a função de fase:

$$P_R(\cos\Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\Theta) \quad (5.17)$$

e os demais parâmetros análogos ao processo de absorção, tais como a seção de choque de espalhamento para uma partícula individual à posição  $s = s'$  do caminho óptico<sup>11</sup> (Figura 5.8):

$$\sigma_R(\lambda, s') = \frac{24\pi^3}{\lambda^4 N_0^2} \frac{[n^2(\lambda, s') - 1]^2}{[n^2(\lambda, s') + 2]^2} \quad (5.18)$$

onde  $N_0$  é a concentração numérica de moléculas (com unidade de  $\text{m}^{-3}$  no SI, isto é, número de partículas por volume de ar) às condições padrão de pressão e temperatura;  $n(\lambda, s')$  é o índice de refração do ar às condições de pressão e temperatura da posição  $s'$ . O coeficiente linear de espalhamento é dado por:

$$\beta_R(\lambda, s') = \sigma_R(\lambda, s') N(s') \quad (5.19)$$

onde  $N(s')$  é a concentração numérica de partículas à posição  $s'$  do caminho óptico. E, finalmente, a profundidade óptica associada ao espalhamento Rayleigh:

$$\tau_R(\lambda, z') = \int_{\infty}^{z'} \beta_R(\lambda, z'') dz'' \Rightarrow \tau_R(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (5.20)^{12}$$

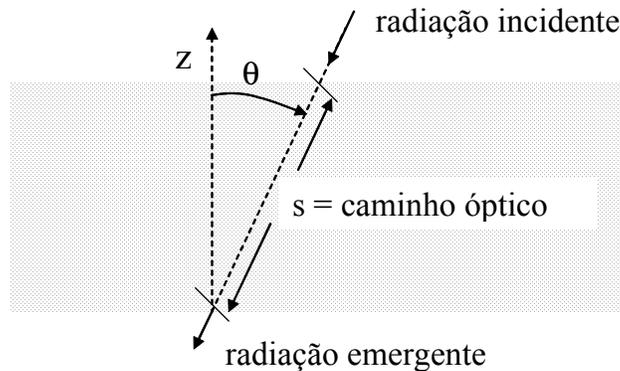


Figura 5.8 – Ilustração do caminho óptico, distância efetivamente percorrida por um feixe de radiação ao atravessar um meio opticamente ativo.

<sup>11</sup> define-se caminho óptico como a distância efetivamente percorrida pelo feixe de radiação ao se propagar em um meio.

<sup>12</sup> A profundidade óptica é definida com relação à vertical, isto é, com relação à altura  $z$ . Em um caminho óptico  $s'$  qualquer,  $z' = s' \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo zenital da orientação de propagação do feixe de radiação incidente (vide Figura 5.8). Uma grandeza equivalente, definida em função do próprio caminho óptico, é denominada espessura óptica, mas não será utilizada neste curso para evitar confusão. A definição com relação à vertical torna-se mais conveniente devido à aproximação de atmosfera plano-paralela como será visto no Capítulo 6.

Das equações (5.17) a (5.19) observa-se que o espalhamento Rayleigh apresenta forte dependência espectral, de forma que quanto menor o comprimento de onda da radiação eletromagnética incidente, maior é a quantidade de energia removida do feixe devido ao espalhamento molecular.

Segundo Fröhlich e Shaw [1980], a profundidade óptica associada ao espalhamento Rayleigh pode ser calculada para cada comprimento de onda como:

$$\tau_R(\lambda) = 1,031 \times 0,00838 \lambda^{-\left(3,916 + 0,074 \lambda + \frac{0,050}{\lambda}\right)} \quad (5.21)$$

A coloração azul do céu é consequência dessa forte dependência espectral. Retornando à equação (4.3), o componente direto da radiação solar sofre maior atenuação quanto maior a profundidade óptica da atmosfera. Em um processo de espalhamento, a radiação é apenas desviada da orientação original, isto é, há produção de radiação difusa. Na região espectral do visível, a luz azul ( $\lambda \sim 0,425 \mu\text{m}$ ) tem comprimento de onda menor que a luz vermelha ( $\lambda \sim 0,650 \mu\text{m}$ ). Conseqüentemente, de acordo com a equação (5.21), a luz azul é da ordem de 5,5 vezes mais espalhada do que a luz vermelha. Dessa forma, a luz azul sofre mais espalhamento que a verde, a amarela e a vermelha, isto é, mais radiação azul é removida do feixe solar direto, aumentando o componente difuso no céu. Por esse motivo, quando observado longe do disco solar, o céu apresenta cor azul. Como a densidade do ar diminui com a altitude, o céu torna-se gradualmente mais escuro até se tornar completamente negro no espaço nas direções opostas ao Sol, visto que quanto menor a densidade, menos espalhamento ocorre. O Sol possui aparência mais brilhante e esbranquiçada quanto mais elevado ele estiver no céu. Quanto mais próximo do horizonte estiver o Sol (nascer ou ocaso), a radiação solar atravessa uma camada mais espessa da atmosfera, havendo maior remoção de radiação do feixe solar direto, resultando na coloração avermelhada do Sol. Embora a radiação violeta ( $\lambda \sim 0,405 \mu\text{m}$ ) tenha comprimento de onda menor que a luz azul, o céu não é violeta porque há muito menos radiação solar disponível nessa faixa espectral. Além disso, o olho humano possui uma resposta muito menor à luz violeta.

Conforme o tamanho das partículas aumenta, menor é a dependência espectral de suas propriedades ópticas. É por esse motivo que a presença de partículas de aerossol pouco

absorvedoras de radiação visível torna o céu esbranquiçado e as nuvens apresentam cor branca.

**Exercício 5.2:** Prove que a função de fase do espalhamento Rayleigh é normalizada para um quando integrada em todas as orientações.

**Exercício 5.3:** Prove que o espalhamento Rayleigh é simétrico com relação à direção incidente, isto é, 50% do feixe é espalhado para o hemisfério/região frontal e 50% é espalhado para trás (no hemisfério oposto ao do sentido de incidência). Dica: integre a função de fase em um hemisfério, mostre que a integral não depende da orientação de incidência e que o resultado da integral é sempre igual a 1/2.

### 5.3.2 Espalhamento Mie

O espalhamento causado por uma partícula esférica de tamanho arbitrário foi descrito analiticamente por Mie em 1908, a partir das equações de Maxwell, deduzindo como ondas eletromagnéticas de comprimento de onda  $\lambda$  são perturbadas ao interagem com esferas homogêneas de raio  $r$ . É utilizado para descrever a interação das partículas de aerossol e gotas de nuvens com a radiação eletromagnética, em particular, no espectro solar.

A radiação que atinge e atravessa a partícula gera fenômenos distintos, genericamente denominados espalhamento:

- reflexão e refração: as ondas eletromagnéticas que atingem a superfície da partícula podem ser parcialmente refletidas e parcialmente refratadas. A distribuição angular da luz espalhada depende fortemente da forma (se esférica, cúbica), da composição química e das condições da superfície da partícula (homogênea ou rugosa). Na reflexão, a onda retorna ao meio com o mesmo ângulo da onda incidente com relação à normal à superfície da partícula. A refração é causada pela diferença entre os índices de refração do ar e da partícula.

- difração: desvio da direção retilínea da radiação eletromagnética ao interagir com um obstáculo (fenda ou partícula). O obstáculo atua como uma fonte de radiação. A radiação emergente, com o mesmo comprimento de onda da radiação incidente, pode interferir com esta construtivamente ou não, gerando as franjas de difração (os máximos

são devidos à interferência construtiva e os mínimos à destrutiva). A distribuição angular da radiação espalhada depende apenas da forma e tamanho da partícula. Independe de sua composição química ou índice de refração. É responsável pelo espalhamento frontal (ângulos de espalhamento próximos de zero). Portanto, é responsável pela “deformação” ou anisotropia do padrão angular de espalhamento que aumenta à medida que o tamanho da partícula aumenta.

Resumindo, os parâmetros da partícula necessários para descrever sua interação com a radiação eletromagnética são:

a)  $n(\lambda, s') = n_r(\lambda, s') - in_i(\lambda, s')$ , que é o índice de refração complexo da partícula. Se  $n_i \neq 0$  (parte imaginária) significa que a partícula também absorve radiação.

b) forma, considerada esférica na Teoria Mie.

c) tamanho, através do parâmetro de tamanho  $x = 2\pi r/\lambda$ , razão entre o perímetro da partícula de raio  $r$  e o comprimento de onda  $\lambda$  da radiação incidente.

Então, para partículas de mesmo tamanho e índice de refração:

$$\beta(\lambda, s') = \sigma(\lambda, s')N(s') = [\sigma_e(\lambda, s') + \sigma_a(\lambda, s')]N(s') \quad (5.22)$$

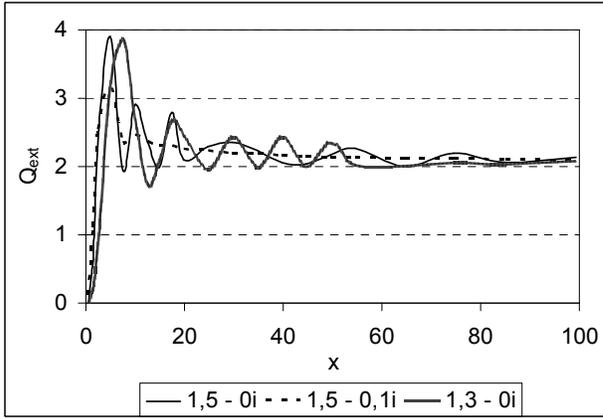
onde  $\beta(\lambda, s')$  é o coeficiente linear de extinção ( $m^{-1}$ ) à posição  $s'$  do caminho óptico;  $\sigma(\lambda, s')$  é a seção de choque eficaz de extinção ( $m^2$ );  $N(s')$  é a concentração numérica de partículas ( $m^{-3}$ );  $\sigma_e(\lambda, s')$  é a seção eficaz de espalhamento ( $m^2$ ) e  $\sigma_a(\lambda, s')$  é a seção de choque eficaz de absorção ( $m^2$ ):

$$\sigma_e(\lambda, s') = \pi r^2 Q_e \left( \frac{2\pi r}{\lambda}, n(\lambda, s') \right) \quad (5.23 a)$$

$$\sigma_a(\lambda, s') = \pi r^2 Q_a \left( \frac{2\pi r}{\lambda}, n(\lambda, s') \right) \quad (5.23 b)$$

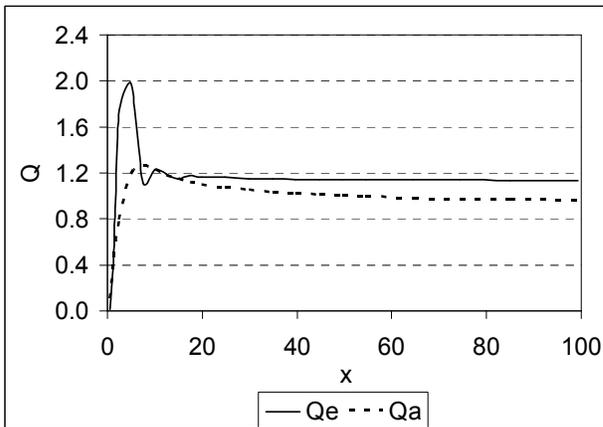
$Q_e$  e  $Q_a$  são fatores de eficiência de espalhamento e de absorção, respectivamente. A Figura 5.9 ilustra como o fator de eficiência varia com o parâmetro de tamanho e com o índice de refração da partícula. Note que o fator de eficiência varia significativamente com o parâmetro de tamanho para baixos de  $x$ , o que significa que, para partículas muito pequenas,  $r$  menor ou da ordem de  $\lambda$ , a dependência espectral é alta. Ao aumentar o parâmetro de tamanho, o fator de eficiência de extinção tende a 2, ilustrando a baixa

dependência (ou seletividade) espectral para partículas muito grandes com relação ao comprimento de onda da radiação incidente, conforme discutido anteriormente.

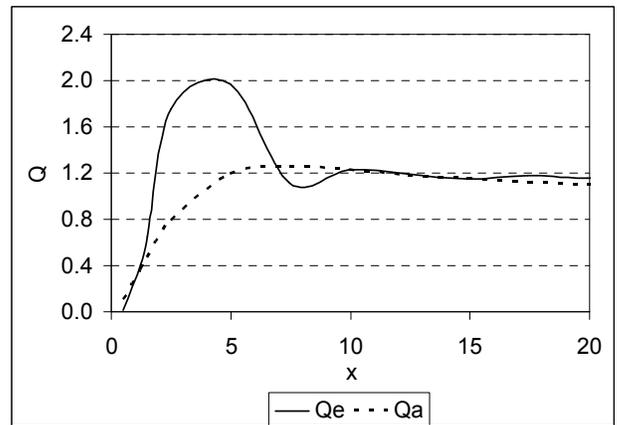


(a)

Figura 5.9 – Fator de eficiência a) de extinção em função do parâmetro de tamanho para partículas esféricas com diferentes índices de refração; b) de espalhamento e absorção para índice de refração igual a 1,5 – 0,1i; c) ampliação do gráfico anterior.



(b)



(c)

Para uma população polidispersa de partículas (diversos tamanhos):

$$N(s') = \int_0^{\infty} n_p(r, s') dr \quad (5.24)$$

onde  $n_p(r, s')$  é o número de partículas de raio  $r$  por unidade de volume de ar, por intervalo de tamanho (unidades:  $N(s')$  em  $m^{-3}$ ;  $r$  em  $\mu m$  e  $n_p(r, s')$  em  $m^{-3}\mu m^{-1}$ ) e representa a função de distribuição de tamanho.

E finalmente, a profundidade óptica de extinção das partículas é determinada a partir da integral:

$$\tau(\lambda, z') = \int_{\infty}^{z'} \beta(\lambda, z'') dz'' \quad (5.25)$$

Como as partículas de aerossol podem além de espalhar, absorver radiação, dependendo do seu índice de refração, torna-se necessário definir um parâmetro que quantifique quanto da radiação atenuada ou extinta devido ao aerossol sofreu espalhamento, isto é, a fração da radiação que foi atenuada por espalhamento ao interagir com as partículas de aerossol. Esse parâmetro é denominado albedo simples e é definido como:

$$\omega_0(\lambda, z') = \frac{\beta_e(\lambda, z')}{\beta_e(\lambda, z') + \beta_a(\lambda, z')} = \frac{\beta_e(\lambda, z')}{\beta(\lambda, z')} \quad (5.26)$$

Pela definição, na ausência de absorção,  $\omega_0(\lambda, z') = 1$ , isto é o feixe de radiação foi atenuado apenas por eventos de espalhamento. É óbvio que neste caso, então, a parte imaginária do índice de refração das partículas de aerossol nesse comprimento de onda é nula.

Devido à anisotropia da distribuição angular do espalhamento (função de fase), a descrição matemática da função de fase é bastante complexa. Em geral, nos modelos numéricos computacionais que requerem muita precisão, a função de fase é decomposta em funções polinomiais do ângulo de espalhamento, por exemplo, utilizando-se os polinômios de Legendre  $P_l$ :

$$P(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^{2N-1} (2l+1) \chi_l P_l(\cos \Theta) \quad (5.27)$$

onde o coeficiente de ordem  $j$  da expansão é obtido como:

$$\chi_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_j(\cos \Theta) P(\cos \Theta) d(\cos \Theta) \quad (5.28)$$

Quanto maior o tamanho da partícula, mais complexa é a função de fase, e por isso maior será o número  $2N$  de termos da série. Dependendo da complexidade, mais de cem termos podem ser necessários e quanto maior o número de termos, maior é o custo computacional. Para minimizar tal custo, torna-se conveniente utilizar aproximações analíticas para a função de fase que dependam de um único parâmetro que represente o grau de anisotropia ou assimetria da função de fase. Voltando à expansão em Polinômios de

Legendre, o primeiro momento da expansão, comumente representado pelo símbolo  $g$  ( $= \chi_1 = \langle \cos \Theta \rangle$ ) e denominado fator de assimetria é utilizado em tais aproximações, sendo que:

$g = 0$  para espalhamento simétrico (espalhamento Rayleigh ou molecular);

$g = 1$  para espalhamento completamente frontal

Quanto maior  $g$ , maior o tamanho da partícula com relação ao comprimento de onda  $\lambda$ . Uma das funções analíticas usuais para aproximar a função de fase real das partículas de aerossol com fator de assimetria  $g$  é a função de fase de Henyey-Greenstein:

$$P_{HG}(\cos \Theta, g) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \Theta)^{3/2}} \quad (5.29)$$

Conforme discutido anteriormente, o espalhamento molecular apresenta forte dependência espectral. Essa dependência diminui com o aumento do tamanho das partículas com relação ao comprimento de onda da radiação incidente. Dessa forma, a partir de valores da profundidade óptica do aerossol em diferentes comprimentos de onda, pode-se inferir o tamanho médio predominante de partículas de aerossol na atmosfera, a partir do Coeficiente de Ångström, definido como:

$$\alpha(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{-\ln[\tau(\lambda_1)/\tau(\lambda_2)]}{\ln(\lambda_1/\lambda_2)} \quad (5.30)$$

Quanto maior  $\alpha$ , maior a dependência espectral e por isso menor é o tamanho predominante das partículas,  $\alpha \sim 2$  indica predominância de partículas de aerossol da moda fina (aquela com raio menor que  $2\mu\text{m}$ ),  $\alpha \sim 0$ , indica predominância de partículas da moda grossa. Para a grande parte de tipos de aerossol atmosférico,  $1 < \alpha < 2$ .

**Exercício 5.4:** Qual o valor de  $\alpha$  no limite de espalhamento Rayleigh?

## 5.4 O papel das nuvens

As nuvens, que cobrem em média da ordem de 40 a 60% da superfície da Terra, refletem, absorvem e transmitem radiação solar e terrestre, além de também emitir radiação terrestre. As nuvens baixas refletem significativamente a radiação solar enquanto que as nuvens mais altas tendem a reduzir a radiação de onda longa emitida para o espaço, visto que elas absorvem a radiação terrestre e re-emitem à sua temperatura. As nuvens, portanto, desempenham um papel significativo sobre a temperatura do planeta. A reflexão de

radiação solar contribui para resfriar o planeta, visto que menos radiação atinge a superfície da Terra e o aprisionamento de radiação terrestre tende a aquecer o planeta. As gotas de nuvens quentes, ou que contêm água líquida podem ser consideradas esféricas e suas propriedades ópticas podem ser derivadas a partir da teoria Mie. Como o parâmetro de tamanho neste caso é grande, isto é, o tamanho das gotas das nuvens é muito maior que o comprimento de onda no espectro solar, o espalhamento é não seletivo espectralmente nessa região (vide Figura 5.9). Além disso, a eficiência de espalhamento é alta. Como a água em estado líquido não absorve radiação no visível, visto que a parte imaginária do seu índice de refração é muito pequena, as nuvens praticamente não absorvem radiação nessa região espectral. Os modelos incorporam o efeito das nuvens nos processos radiativos da atmosfera a partir de parametrizações envolvendo algumas de suas propriedades. Uma das parametrizações mais simples envolve o conteúdo de água líquida,  $w$ , o conteúdo integrado de água líquida, LWP (do inglês, *liquid water path*), e o raio efetivo,  $r_{eff}$ , conforme as definições (Liou, 2002):

$$w = \frac{4\pi}{3} \rho \int r^3 n_g(r) dr \quad (5.31)$$

onde  $\rho$  é a densidade da água líquida e  $n_g(r)$  é a distribuição numérica de gotas (análogo a  $n_p$  da equação 5.24).

$$LWP = \int_{base}^{topo} w(z) dz \quad (5.32)$$

$$r_{eff} = \frac{\int r^3 n_g(r) dr}{\int r^2 n_g(r) dr} \quad (5.33)$$

Das equações 5.22, 5.23 e 5.25, pode-se reescrever a profundidade óptica como:

$$\tau_{nuvem}(\lambda, z') = \int_{base}^{topo} \int \pi r^2 Q \left( \frac{2\pi r}{\lambda}, n(\lambda, z'') \right) n_g(r, z'') dr dz'' = \Delta z \int Q \pi r^2 n_g(r) dr$$

Com as definições acima e o valor assintótico de  $Q$  para partículas muito grandes,  $Q \sim 2$  (Figura 5.9), a profundidade óptica da nuvem é parametrizada como:

$$\tau_{nuvem} = \frac{3}{2\rho} \frac{LWP}{r_{eff}} \quad (5.34)$$

Portanto, por essa aproximação, a profundidade óptica da nuvem aumenta com a quantidade total de água líquida presente na nuvem e diminui com o aumento do seu raio efetivo.

A partir do infravermelho próximo, por outro lado, a absorção torna-se importante devido ao aumento dos coeficientes de absorção da água tanto na fase líquida quanto na forma de vapor. Em média, sobre o espectro solar, as nuvens refletem 74%, absorvem 10%, e transmitem 16% da radiação solar total incidente.

Na janela atmosférica do infravermelho (8,5 a 12,5  $\mu\text{m}$ ), como o tamanho das gotas de nuvens é da mesma ordem de magnitude do comprimento de onda, pode-se utilizar a teoria Mie para descrever suas propriedades ópticas. Na ausência de espalhamento, a emissividade espectral das nuvens pode ser aproximada como (Chylek et al., 1992):

$$\varepsilon(\lambda) = 1 - e^{-\beta_a(\lambda)\Delta z} \quad (5.35)$$

onde  $\beta_a(\lambda)$  é o coeficiente linear de absorção da nuvem e  $\Delta z$  é a sua espessura geométrica. De 5.13 ou 5.22 e 5.23b, tem-se:

$$\beta_a(\lambda) = \pi \int r^2 Q_a \left( \frac{2\pi r}{\lambda}, n(\lambda) \right) n_g(r) dr \quad (5.36)$$

Da Figura 5.9c, o fator de eficiência de absorção  $Q_a$  pode ser escrito como uma função linear de  $r$ , para partículas com parâmetro de tamanho entre 0 e 5 (isto é, gotas pequenas):

$$Q_a = a_1 r \quad (5.37)$$

Com essa aproximação e a equação 5.31, obtém-se:

$$\beta_a = \frac{3a_1}{4\rho} w \quad (5.38)$$

Para gotas grandes,  $Q_a$  tende assintoticamente à unidade (Figura 5.9b), isto é:

$$Q_a = a_0 \quad (5.39)$$

onde  $a_0$  é uma constante próxima a 1. Com essa aproximação e as equações 5.31 e 5.33, obtém-se:

$$\beta_a = \frac{3a_0}{4\rho} \frac{w}{r_{eff}} \quad (5.40)$$

Dessa forma, quanto mais espessa a nuvem, quanto maior o seu conteúdo de água líquida e quanto menor seu raio efetivo, melhor será a aproximação de corpo negro.

As nuvens cirrus, constituídas por cristais de gelo de várias formas como hexagonal, colunas, impõem maiores dificuldades na obtenção de modelos matemáticos que descrevam suas propriedades ópticas, visto que exigem tratamento matemático que descrevam a interação de radiação com partículas não esféricas.

Como as nuvens não são homogêneas e sua cobertura pode ser parcial, apresentando alta variabilidade espacial e temporal, o estudo de seus efeitos sobre a meteorologia e o clima é bastante complexo. Um exemplo simples observado localmente é que a reflexão pelas laterais de nuvens cumulus pode levar a valores de irradiância, que atinge a superfície, maiores que em condições de atmosfera limpa, em alguns instantes. Vale lembrar também, que além do papel sobre o balanço de radiação do sistema Terra-atmosfera, as nuvens produzem vários fenômenos ópticos, tais como os arco-íris e halos, por espalharem radiação solar.

**Exercício 5.5:** Ao nível do mar, o índice de refração do ar é aproximadamente 1,000292 para  $\lambda = 0,3\mu\text{m}$ . Determine o índice de refração a 10 km de altura, para esse comprimento de onda, sabendo que:

$$\delta(z) = \frac{M}{N_0} N(z)$$

onde:

$M = 28,97 \text{ g/mol}$  (peso molecular do ar)

$N_0 = 6,02295 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  (número de Avogrado)

$N(z = 0) = 25,5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$

$N(z = 10 \text{ km}) = 8,6 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$

Em termos práticos:  $(n - 1)_{\text{ar}} = \text{constante} \times \delta$

## 6. Equação de Transferência Radiativa (ETR)

### 6.1 Lei de Beer

A radiância espectral  $L_\lambda$  associada ao comprimento de onda  $\lambda$  e à orientação de propagação  $\Omega' = (\theta', \phi')$  sofre atenuação ou extinção (absorção + espalhamento) ao interagir com um volume elementar de matéria de comprimento  $ds'$  situado à posição  $s'$  de um certo caminho óptico, conforme Figura 6.1.

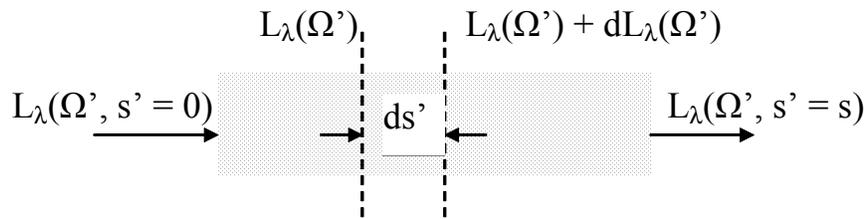


Figura 6.1 – Ilustração esquemática da atenuação sofrida por um feixe de radiação caracterizado pela radiância espectral  $L_\lambda$  ao atravessar um volume de matéria de comprimento  $ds'$ .

O elemento diferencial de radiância espectral depende das propriedades ópticas do meio e da radiância incidente e é obtido como:

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta(\lambda, s')ds' \quad (6.1)$$

onde  $\beta(\lambda, s')$  é o coeficiente linear de extinção à posição  $s'$  (e representa as propriedades ópticas do meio atravessado), para o comprimento de onda  $\lambda$  e pode ser interpretado como a taxa de redução de radiância por unidade de caminho óptico, isto é:

$$\beta(\lambda, s') = -\frac{dL_\lambda/L_\lambda}{ds'}$$

A atenuação da radiância entre duas posições  $s' = s_1$  e  $s' = s_2$  é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} \frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{L_\lambda(\Omega', s')} &= -\int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s') ds' \\ &= \ln L_\lambda(\Omega', s_2) - \ln L_\lambda(\Omega', s_1) = -\int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s') ds' \end{aligned}$$

$$= \ln \left\{ \frac{L_\lambda(\Omega', s_2)}{L_\lambda(\Omega', s_1)} \right\} = - \int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s') ds'$$

$$L_\lambda(\Omega', s_2) = L_\lambda(\Omega', s_1) \exp \left\{ - \int_{s_1}^{s_2} \beta(\lambda, s') ds' \right\}$$

$$L_\lambda(\Omega', s_2) = L_\lambda(\Omega', s_1) \exp[-\tilde{\tau}(\lambda, s_1, s_2)] \quad (6.2)$$

onde  $L_\lambda(\Omega', s_2)$  é a radiância emergente,  $L_\lambda(\Omega', s_1)$  é a radiância incidente e

$$\tilde{\tau}(\lambda, s_1, s_2) = \int_{s_1}^s \beta(\lambda, s') ds' \quad (6.3)$$

é a espessura óptica do volume de matéria no comprimento de onda  $\lambda$  entre as posições  $s_1$  e  $s_2$  do caminho óptico.

A equação (6.2) representa a lei de atenuação exponencial ou lei de Beer, ou lei de Beer-Lambert-Bouguer. A equação (6.2) descreve como a radiância espectral numa determinada orientação diminui ao atravessar um meio, devido aos processos de absorção e espalhamento. Entretanto, outros processos também podem ocorrer durante a interação entre radiação e um volume de matéria:

- a) absorção (1);
- b) emissão (2);
- c) espalhamento (Figura 6.2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{remoção (3);} \\ \text{adição (4)} \end{array} \right.$

Portanto,  $dL_\lambda(\Omega', s') = \sum_{i=1}^4 dL_\lambda^{(i)}(\Omega', s')$

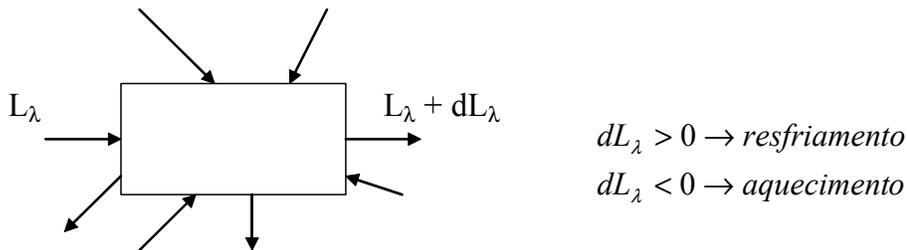


Figura 6.2 – Ilustração esquemática da remoção ou adição de radiância espectral por espalhamento. A radiação pode ser desviada para a orientação de observação a partir de radiância disponível em outras orientações e vice-versa.

$$\begin{aligned}
 dL_{\lambda}(\Omega', s')^{(i)} &= -dL_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \text{absorção} \\
 &+ dL_{\lambda}^{(2)} \rightarrow \text{emissão} \\
 &- dL_{\lambda}^{(3)} \rightarrow \text{remoção por espalhamento} \\
 &+ dL_{\lambda}^{(4)} \rightarrow \text{adição por espalhamento (necessário existir "outras fontes")}
 \end{aligned}$$

A equação que considera a ocorrência de todos os processos de interação entre a radiação eletromagnética e um volume de matéria é denominada Equação de Transferência Radiativa (ETR) e descreve como a radiância espectral se propaga nesse volume de matéria. Nos próximos tópicos a ETR será deduzida matematicamente inicialmente na ausência de espalhamento, em seguida na ausência dos efeitos de absorção e emissão e finalmente, na presença de todos esses processos, onde será obtida a equação geral da transferência radiativa.

## **6.2 Forma diferencial da ETR na ausência de espalhamento - Equação de Schwarzschild**

A primeira forma particular da ETR considera apenas os processos de absorção e emissão de radiação em um determinado comprimento de onda. Os efeitos de espalhamento são considerados desprezíveis. É uma boa aproximação no estudo da propagação de radiação terrestre na atmosfera. A radiância espectral que atravessa o volume de matéria pode sofrer variações elementares por:

a) atenuação parcial da radiância incidente no volume de matéria por absorção. Dessa forma, a quantidade de radiância absorvida é obtida como:

$$dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega', s') = L_{\lambda}(\Omega', s') \beta_a(\lambda, s') ds' \quad (6.4)$$

Portanto, em analogia à equação (1.15), a absorptância espectral é dada por:

$$a(\lambda, s') = \frac{dL_{\lambda}^{(1)}(\Omega', s')}{L_{\lambda}(\Omega', s')} = \beta_a(\lambda, s') ds' \quad (6.5)$$

b) emissão à temperatura em que se encontra o volume de matéria:

$$dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega', s') = \varepsilon(\lambda, s') B_{\lambda}[\lambda, T(s')] \quad (6.6)$$

$$\varepsilon(\lambda, s') = \frac{dL_{\lambda}^{(2)}(\Omega', s')}{B_{\lambda}[\lambda, T(s')]} \quad (6.7)$$

Mas, da Lei de Kirchhoff:  $a(\lambda, s') = \varepsilon(\lambda, s')$

portanto,  $dL_\lambda^{(2)}(\Omega', s') = \varepsilon(\lambda, s') B_\lambda[\lambda, T(s')]$

$$= B_\lambda[\lambda, T(s')] \beta_a(\lambda, s') ds' \quad (6.6')$$

Considerando a ocorrência simultânea de ambos os processos:

$$-dL_\lambda^{(1)}(\Omega', s') + dL_\lambda^{(2)}(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s') \beta_a(\lambda, s') ds' + B_\lambda[\lambda, T(s')] \beta_a(\lambda, s') ds'$$

Portanto,

$$\frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{\beta_a(\lambda, s') ds'} = -L_\lambda(\Omega', s') + B_\lambda[\lambda, T(s')] \quad (6.8)$$

Essa é a forma diferencial da ETR na ausência de espalhamento ou equação de Schwarzschild. Assim, a radiância pode diminuir ou aumentar após interagir com o volume de matéria, conforme a importância relativa dos processos de emissão e de absorção.

### **6.3 Forma diferencial da ETR na ausência de absorção/emissão**

A segunda forma particular da ETR considera apenas os processos de espalhamento. É uma boa aproximação em regiões espectrais nas quais os processos de absorção e emissão são nulos ou podem ser considerados desprezíveis, por exemplo, na região do espectro solar compreendida entre 0,35 e 0,40 $\mu$ m. Neste caso, o elemento diferencial de radiância depende apenas de dois termos:

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -dL_\lambda^{(3)}(\Omega', s') + dL_\lambda^{(4)}(\Omega', s') \quad (6.9)$$

onde  $dL_\lambda^{(3)} \rightarrow$  espalhamento de uma parte da radiância incidente segundo  $\Omega'$  para outras direções (ou “para fora”).

$dL_\lambda^{(4)} \rightarrow$  espalhamento de radiância proveniente de outras orientações do espaço para  $\Omega'$ , efeito resultante da ocorrência de espalhamento múltiplo, isto é, um mesmo fóton pode sofrer mais de um processo de espalhamento ao atravessar um volume de matéria. A probabilidade de ocorrência de mais de um evento de espalhamento aumenta com o aumento da profundidade óptica ou da concentração das partículas espalhadoras (vide Figuras 6.3 e 6.4).

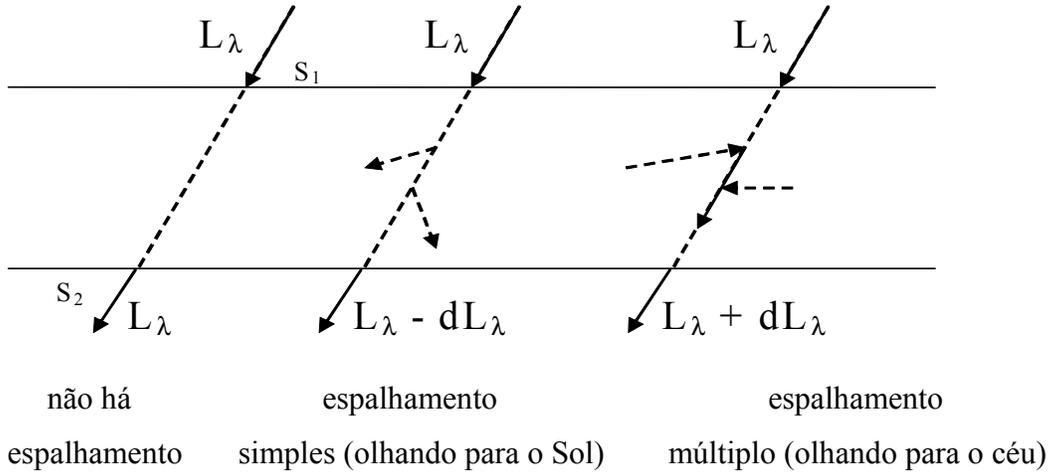


Figura 6.3 – Redução ou adição da radiância espectral por espalhamento ao atravessar um caminho óptico em um volume de matéria.

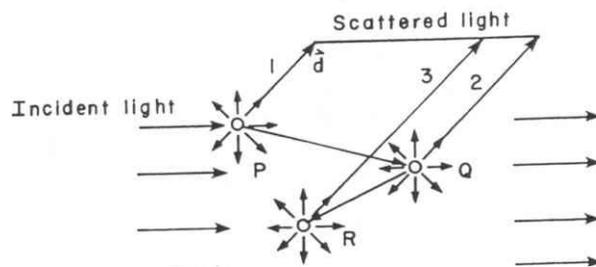


Figura 6.4 – Espalhamento múltiplo (extraído de Liou, 1980).

Voltando à equação (6.9), há duas possíveis variações elementares de radiância:

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -dL_\lambda^{(3)}(\Omega', s') + dL_\lambda^{(4)}(\Omega', s')$$

a) Atenuação parcial da radiância incidente por espalhamento:

$$dL_\lambda^{(3)}(\Omega', s') = L_\lambda(\Omega', s') \beta_e(\lambda, s') ds'$$

b) Produção de radiância difusa pelos constituintes do volume de matéria na orientação de interesse:

$$dL_\lambda^{(4)}(\Omega', s') = J_\lambda(\Omega', s') \beta_e(\lambda, s') ds'$$

onde

$$J_\lambda(\Omega', s') = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L_\lambda(\Omega'', s') p(\lambda, s', \Omega'', \Omega') d\Omega'' \quad (6.10)$$

$J_\lambda(\Omega', s')$  é a função fonte por espalhamento

$L_\lambda(\Omega'', s')$  é a radiância disponível para espalhamento proveniente de outras direções  $\Omega''$   
 $p(\lambda, s', \Omega'', \Omega')$  é a função de fase

Portanto,

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' + J_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' \quad (6.11)$$

$$\frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{\beta_e(\lambda, s')ds'} = -L_\lambda(\Omega', s') + J_\lambda(\Omega', s') \quad (6.12)$$

Assim, a radiância associada ao feixe pode aumentar ou diminuir após interagir com o volume de matéria, conforme a importância relativa dos processos de atenuação por espalhamento e de produção de radiância difusa.

#### 6.4 Equação geral de transferência radiativa

Considerando a ocorrência de todos os processos (absorção, emissão e espalhamento):

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta_a(\lambda, s')ds' - L_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' + B_\lambda[\lambda, T(s')]\beta_a(\lambda, s')ds' + J_\lambda(\Omega', s')\beta_e(\lambda, s')ds' \quad (6.13)$$

mas,  $\beta(\lambda, s') = \beta_a(\lambda, s') + \beta_e(\lambda, s')$  e  $\omega_0(\lambda, s') = \frac{\beta_e(\lambda, s')}{\beta(\lambda, s')}$  (equação 5.26)

e, portanto,

$$\beta_e(\lambda, s') = \omega_0(\lambda, s')\beta(\lambda, s')$$

$$\beta_a(\lambda, s') = [1 - \omega_0(\lambda, s')]\beta(\lambda, s')$$

Substituindo em (6.13):

$$dL_\lambda(\Omega', s') = -L_\lambda(\Omega', s')\beta(\lambda, s')ds' + B_\lambda[\lambda, T(s')][1 - \omega_0(\lambda, s')]\beta(\lambda, s')ds' + J_\lambda(\Omega', s')\omega_0(\lambda, s')\beta(\lambda, s')ds'$$

$$\frac{dL_\lambda(\Omega', s')}{\beta(\lambda, s')ds'} = -L_\lambda(\Omega', s') + [1 - \omega_0(\lambda, s')]B_\lambda[\lambda, T(s')] + \omega_0(\lambda, s')J_\lambda(\Omega', s') \quad (6.14)$$

Essa é a forma diferencial da equação geral de transferência radiativa. Vale lembrar que:

$$\omega_0 = 1 \Rightarrow \beta_a = 0 \quad \text{e} \quad \omega_0 = 0 \Rightarrow \beta_s = 0$$

## 6.5 Aproximação atmosfera plano-paralela

Uma vez que a espessura geométrica “ópticamente ativa” da atmosfera (com aproximadamente 100 km de altura) é muito menor que o raio da Terra torna-se possível considerar a atmosfera como um conjunto de camadas verticalmente estruturadas e horizontalmente homogêneas. Esta hipótese é aceitável para a maior parte das aplicações meteorológicas e climatológicas em escala regional, sempre que as variações verticais ( $T, P, N, \beta$ ) forem muito mais importantes que as respectivas variações horizontais. Sob tais condições:

- Orientações de propagação  $\Omega'$  são descritas em termos de coordenadas locais horizontais ( $\pm\mu', \varphi'$ ) onde  $\mu' = \cos(\zeta')$ ,  $\zeta'$  é o ângulo zenital. Os sinais “+” e “-” indicam convenção de sinais para feixes ascendentes e descendentes, respectivamente, e  $\varphi'$  é o ângulo azimutal, contado a partir do norte geográfico, para leste.
- Posições  $s'$  do caminho óptico são descritas por valores de altitude  $z'$ , contada a partir do nível do mar.
- Variações elementares  $ds'$  são descritas por variações elementares de altitude  $dz'$ , considerando-se o sentido de propagação do feixe em questão, isto é,  $ds' = \pm dz'/\mu'$  (Figura 6.5)

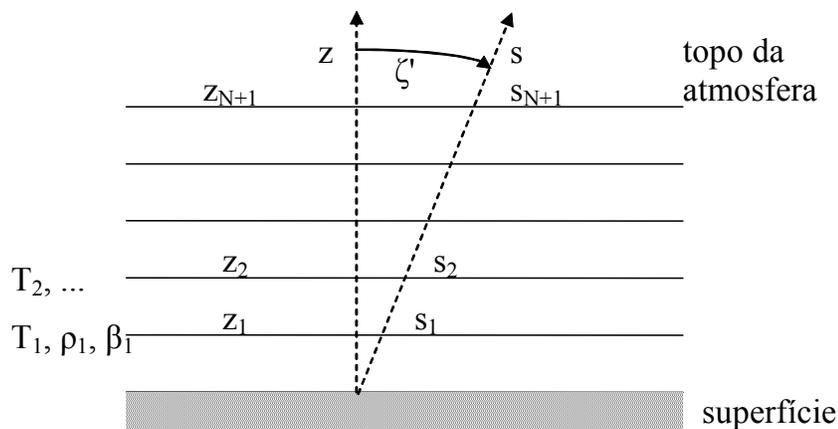
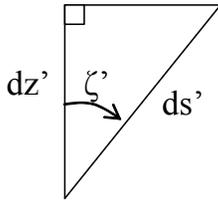


Figura 6.5 – Atmosfera plano-paralela, caracterizada por camadas estruturadas verticalmente e homogêneas horizontalmente.

Portanto, a atmosfera plano-paralela consiste de um determinado número de camadas atmosféricas, cada camada caracterizada por propriedades homogêneas e delimitada por planos infinitos no topo e na base (chamadas bordas ou limites). Obviamente, em geral, o topo coincide com o topo da atmosfera e a base ou o limite inferior é a superfície.



$$\text{Da figura 6.6, } ds' = \frac{dz'}{\cos \zeta'} \quad (6.15)$$

Figura 6.6 – Relação entre  $dz'$  e  $ds'$

A partir desse sistema de coordenadas, o ângulo de espalhamento pode ser escrito como:

$$\cos \Theta = \mu' \mu'' + (1 - \mu'^2)^{1/2} (1 - \mu''^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi'') \quad (6.16)$$

lembrando que:  $\text{sen } \zeta' = (1 - \cos^2 \zeta')^{1/2}$

Substituindo  $\Omega' = (\pm \mu', \varphi')$  e  $ds' = \pm \frac{dz'}{\mu'}$  na forma geral da ETR e lembrando que

$$\beta(\lambda, s') = \beta(\lambda, z'):$$

$$\pm \frac{\mu' dL_\lambda(z', \mu', \varphi')}{\beta(\lambda, z') dz'} = -L_\lambda(z', \pm \mu', \varphi') + [1 - \omega_0(\lambda, z')] B_\lambda[\lambda, T(z')] + \omega_0(\lambda, z') J_\lambda(\lambda, z', \pm \mu', \varphi') \quad (6.17)$$

Da definição de profundidade óptica, tem-se:

$$\frac{d\tau(\lambda, z')}{dz'} = -\beta(\lambda, z') \quad (6.18)$$

Substituindo  $\beta(\lambda, z') dz' = -d\tau(\lambda, z')$  na forma geral da ETR:

$$\pm \frac{\mu' dL_\lambda(z', \mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(z', \pm \mu', \varphi') - [1 - \omega_0(\lambda, z')] B_\lambda[\lambda, T(z')] - \omega_0(\lambda, z') J_\lambda(\lambda, z', \pm \mu', \varphi') \quad (6.19)$$

$$\text{onde, } J_{\lambda}(z', \pm\mu', \varphi') = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 L_{\lambda}(z', \mu'', \varphi'') p(\lambda, z', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \quad (6.20)$$

Finalmente, torna-se mais simples a separação das equações específicas à propagação de radiâncias nos diferentes componentes, de acordo com a orientação:

- Componente ascendente ( $\mu' > 0$ ):

$$\frac{+\mu' dL_{\lambda}(z', \mu', \varphi')}{d\tau} = L_{\lambda}(z', \mu', \varphi') - [1 - \omega_0(\lambda, z')] B_{\lambda}[\lambda, T(z')] - \omega_0(\lambda, z') J_{\lambda}(z', \mu', \varphi') \quad (6.21)$$

multiplicando todos os termos por  $\frac{d\tau}{\mu'} e^{-\tau/\mu'}$  e, por enquanto omitindo os índices para simplificar:

$$dL e^{-\tau/\mu'} = \frac{L}{\mu'} e^{-\tau/\mu'} d\tau - \frac{[1 - \omega_0]}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau \quad (6.22)$$

mas, dada a função  $F(A, B) = \mp A \exp(\pm B)$ , tem-se que o diferencial da função é expresso como:

$$dF = d[\mp A \exp(\pm B)] = \mp \exp(\pm B) dA \pm A \exp(\pm B) dB \quad (6.23)$$

de forma que, voltando à equação (6.22) e aplicando a fórmula de derivação (6.23):

$$\begin{aligned} d\left[ L e^{-\tau/\mu'} \right] &= dL \times e^{-\tau/\mu'} - \frac{d\tau}{\mu'} L e^{-\tau/\mu'} \\ \Rightarrow d\left[ L e^{-\tau/\mu'} \right] &= -\frac{[1 - \omega_0]}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau \end{aligned} \quad (6.24)$$

Portanto, integrando-se ambos os membros de (6.24), desde a superfície até uma altura qualquer da atmosfera caracterizadas por  $\tau = \tau_{\text{sup}}$  e  $\tau = \tau'$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} d\left[ L e^{-\tau/\mu'} \right] &= \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \left[ -\frac{(1 - \omega_0)}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} - \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} \right] d\tau \\ L e^{-\tau/\mu'} \Big|_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} &= \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} -\frac{(1 - \omega_0)}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau \end{aligned}$$

$$L(\tau') e^{-\tau'/\mu'} - L(\tau_{\text{sup}}) e^{-\tau_{\text{sup}}/\mu'} = \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{-(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{-\tau/\mu'} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-\tau/\mu'} d\tau$$

Isolando  $L(\tau')$ :

$$L(\tau') = L(\tau_{\text{sup}}) e^{\left(\frac{-\tau_{\text{sup}}+\tau'}{\mu'}\right)} - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau$$

Portanto, re-introduzindo os índices:

$$L_\lambda(\tau', \mu', \varphi) = L_\lambda(\tau_{\text{sup}}, \mu', \varphi) e^{\left(\frac{-\tau_{\text{sup}}-\tau'}{\mu'}\right)} - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{[1-\omega_0(\lambda, \tau')]}{\mu'} B_\lambda[\lambda, T(\tau')] e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau - \int_{\tau_{\text{sup}}}^{\tau'} \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{\mu'} J_\lambda(\tau', \mu', \varphi) e^{\left(\frac{-\tau+\tau'}{\mu'}\right)} d\tau \quad (6.25)$$

Lembrando sempre que  $\tau_{\text{sup}}$ ,  $\tau'$  e  $\tau$  também representam grandezas espectrais:

$$\tau_{\text{sup}} = \tau_{\text{sup}}(\lambda), \quad \tau' = \tau'(\lambda) \quad e \quad \tau = \tau(\lambda)$$

- Componente descendente ( $\mu' < 0$ ):

$$\left( -\mu' \frac{dL}{d\tau} = L - (1-\omega_0)B - \omega_0 J \right) \times \left( \frac{-e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau \right)$$

$$dL \times e^{\tau/\mu'} = -L \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau + (1-\omega_0) B \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau + \omega_0 J \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau$$

Da fórmula de derivação (6.23), tem-se:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ L e^{\tau/\mu'} \right] = \frac{dL}{d\tau} e^{\tau/\mu'} + \frac{1}{\mu'} e^{\tau/\mu'} L$$

e, portanto:

$$d \left[ L \times e^{\tau/\mu'} \right] = \left[ (1-\omega_0) B \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} + \omega_0 J \frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} \right] d\tau$$

que, integrando-se desde o topo da atmosfera a uma altitude qualquer da atmosfera, caracterizada pela profundidade óptica  $\tau'$ :

$$\int_0^{\tau'} d \left[ L e^{\tau'/\mu'} \right] = \int_0^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{\tau'/\mu'} d\tau + \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{\tau'/\mu'} d\tau$$

$$\Rightarrow L(\tau') e^{\tau'/\mu'} - L(0) = \int_0^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{\tau'/\mu'} d\tau + \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{\tau'/\mu'} d\tau$$

Portanto,

$$L(\tau') = L(0) e^{-\tau'/\mu'} + \int_0^{\tau'} \frac{(1-\omega_0)}{\mu'} B e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau + \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{\mu'} J e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau$$

ou, com os respectivos índices:

$$L_\lambda(\tau', -\mu', \varphi') = L(0, -\mu', \varphi') e^{-\tau'/\mu'} + \int_0^{\tau'} \frac{[1-\omega_0(\lambda, \tau')]}{\mu'} B_\lambda[\lambda, T(\tau')] e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau$$

$$+ \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{\mu'} J_\lambda(\lambda, \tau', \mu', \varphi') e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau \quad (6.26)$$

## 6.6 Propagação de radiação solar

Para estudar a propagação de radiação na região do espectro solar, como a temperatura do Sol é muito maior do que a da Terra, o termo da ETR que envolve emissão de radiação é desprezível. Portanto, a ETR pode ser escrita como:

$$\pm \mu' \frac{dL_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') - \omega_0(\lambda, \tau') J_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') \quad (6.27)$$

Separando a radiância nos componentes direto e difuso:

$$L_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') = S_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi_0) + I_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi')$$

$$= S_\lambda(\tau') \delta(\mu' - \mu_0) \delta(\varphi' - \varphi_0) + I_\lambda(\tau', \pm\mu', \varphi') \quad (6.28)$$

onde a função  $\delta(x)$  é a função Delta de Dirac, cujas propriedades são:

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{para } x \neq x_0$$

$$\delta(x - x_0) = 1 \quad \text{para } x = x_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

Com essa decomposição, a função fonte de espalhamento é reescrita como:

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(\tau', \pm\mu', \varphi') &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 L_{\lambda}(\tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 S_{\lambda}(\tau') \delta(\mu'' - \mu_0) \delta(\varphi'' - \varphi_0) p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_{\lambda}(\lambda, \tau', \pm\mu', \varphi') = \frac{S_{\lambda}(\tau')}{4\pi} p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \cos \Theta'') \frac{d\mu'' d\varphi''}{4\pi} \quad (6.29)$$

onde:

$$p(\lambda, \tau', \cos \Theta'') = p(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'', \pm\mu', \varphi')$$

$$p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) = p(\lambda, \tau', \mu_0, \varphi_0, \pm\mu', \varphi')$$

$$\cos \Theta'' = \mu''\mu' + (1 - \mu''^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi'' - \varphi')$$

$$\cos \Theta_0 = -\mu_0\mu' + (1 - \mu_0^2)^{1/2} (1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\varphi' - \varphi_0)$$

Voltando à ETR (6.27) e realizando as substituições:

$$\begin{aligned} \pm\mu' \frac{dI_{\lambda}(\tau', \pm\mu', \varphi')}{d\tau} &= I_{\lambda}(\lambda, \tau', \pm\mu', \varphi') \\ &\quad - \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{4\pi} S_{\lambda}(\tau') p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{produção de radiância difusa} \\ \text{por espalhamento simples de} \\ \text{radiância solar direta.} \end{array} \right. \\ &\quad - \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\lambda, \tau', \mu'', \varphi'') p(\lambda, \tau', \cos \Theta'') d\mu'' d\varphi'' \left\{ \begin{array}{l} \text{produção de radiância difusa} \\ \text{por espalhamento de radiância} \\ \text{difusa disponível em } \tau' \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Quando  $-\mu' = -\mu_0$

$$-\mu_0 \frac{dS_\lambda(\tau')}{d\tau} = S_\lambda(\tau')$$

$$\int_{\tau'}^0 \frac{dS_\lambda(\tau')}{S_\lambda(\tau')} = -\int_{\tau'}^0 \frac{1}{\mu_0} d\tau \Rightarrow \ln S_\lambda \Big|_{\tau'}^0 = -\frac{\tau}{\mu_0} \Big|_{\tau'}^0 \Rightarrow \ln S_{0\lambda} - \ln S_\lambda(\tau') = \frac{\tau'}{\mu_0}$$

$$\ln \left( \frac{S_{0\lambda}}{S_\lambda(\tau')} \right) = \frac{\tau'}{\mu_0} \Rightarrow \frac{S_{0\lambda}}{S_\lambda(\tau')} = e^{\tau'/\mu_0} \Rightarrow S_\lambda(\tau') = S_{0\lambda} e^{-\tau'/\mu_0} \begin{cases} \text{Lei de} \\ \text{Beer} \end{cases} \quad (6.31)$$

Portanto, a radiância direta sofre apenas atenuação pela Lei de Beer.

Uma outra simplificação da solução analítica é obtida para o caso em que a probabilidade de ocorrência de espalhamento múltiplo ou produção de radiância difusa por espalhamento de radiância difusa já disponível for desprezível. Esta situação ocorre em regiões espectrais nas quais os valores da profundidade óptica da atmosfera são muito baixos, por exemplo, no infravermelho próximo, na ausência de nuvens ou partículas de aerossol muito grandes (da moda grossa) e sem absorção gasosa, apenas espalhamento molecular. A solução é obtida como:

- a) Região do almucântar solar, cone formado pela variação do ângulo azimutal na situação em que  $-\mu' = -\mu_0$ , isto é, o ângulo zenital de observação é igual ao ângulo zenital solar.

$$-\mu_0 \frac{dI_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi')}{d\tau} = I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') - \frac{\omega_0(\lambda, \tau')}{4\pi} S_\lambda(\tau') p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0)$$

Suprimindo-se os índices para facilitar a resolução e multiplicando-se todos os termos da equação por  $\left( -\frac{1}{\mu_0} e^{\tau/\mu_0} d\tau \right)$ :

$$\left( -\mu_0 \frac{dI}{d\tau} - I = -\frac{\omega_0}{4\pi} S_\lambda p(\cos \Theta_0) \right) \times \left( -\frac{1}{\mu_0} e^{\tau/\mu_0} d\tau \right)$$

$$dI \times e^{\tau/\mu_0} + \frac{I}{\mu_0} e^{\tau/\mu_0} d\tau = \frac{\omega_0}{4\pi\mu_0} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} d\tau$$

$$d\left(I e^{\tau/\mu_0}\right) = \frac{\omega_0}{4\pi\mu_0} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} d\tau$$

Integrando-se desde o topo da atmosfera a uma altura caracterizada pela profundidade óptica  $\tau'$ :

$$\int_0^{\tau'} d(I e^{\tau/\mu_0}) = \int_0^{\tau'} \frac{\omega_0}{4\pi\mu_0} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} d\tau$$

$$I e^{\tau'/\mu_0} \Big|_0^{\tau'} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_0^{\tau'} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} \omega_0 d\tau$$

$$I(\tau') = I(0)e^{-\tau'/\mu_0} + \frac{1}{4\pi\mu_0} e^{-\tau'/\mu_0} \int_0^{\tau'} S_\lambda p(\cos \Theta_0) e^{\tau/\mu_0} \omega_0 d\tau$$

mas, como no topo da atmosfera não há radiância difusa, tem-se  $I(0) = 0$ . Usando a lei de Beer para  $S_\lambda$  (equação 6.31) e re-introduzindo os índices:

$$I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu_0} e^{-\tau'/\mu_0} \int_0^{\tau'} \omega_0(\lambda, \tau) p(\lambda, \tau, \cos \Theta_0) d\tau$$

e, finalmente, adotando valores médios na coluna para o albedo simples e a função de fase,  $\hat{\omega}_0(\lambda)$  e  $\hat{p}(\lambda, \cos \Theta_0)$ , respectivamente, a solução para a radiância difusa descendente na região do almucântar solar é obtida como:

$$I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu_0} \hat{\omega}_0(\lambda) \hat{p}(\lambda, \cos \Theta_0) e^{-\tau'/\mu_0} \int_0^{\tau'} d\tau$$

$$I_\lambda(\tau', -\mu_0, \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu_0} \hat{\omega}_0(\lambda) \hat{p}(\lambda, \cos \Theta_0) \tau' e^{-\tau'/\mu_0} \quad (6.32)$$

b) para  $-\mu' \neq -\mu_0$ , novamente suprimindo-se os índices:

$$-\mu' \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{\omega_0}{4\pi} S p(\cos \Theta_0)$$

e, resolvendo analogamente obtém-se:

$$I_\lambda(\tau', -\mu', \varphi') = \frac{S_{0\lambda}}{4\pi\mu'} e^{-\tau'/\mu'} \int_0^{\tau'} \omega_0(\lambda, \tau') e^{-\tau\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu'}\right)} p(\lambda, \tau', \cos \Theta_0) d\tau \quad (6.33)$$

## 6.7 Propagação de radiação terrestre

Em geral, a radiação emitida pela superfície e pelos constituintes atmosféricos propaga-se ao longo da atmosfera sem sofrer processos de espalhamento, em particular, na ausência de nuvens e partículas de aerossol da moda grossa (raio  $> \sim 10 \mu\text{m}$ ). Nessas condições, a solução da ETR é obtida pela integração da equação de Schwarzschild:

$$\pm \mu' \frac{dL_\lambda(\tau', \pm \mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(\lambda, \tau', \pm \mu', \varphi') - B_\lambda[\lambda, T(\tau')]$$

Resolvendo a equação separadamente para radiâncias ascendentes e descendentes:

a) Radiância ascendente ( $\mu' > 0$ ): a equação de transferência se resume a, omitindo-se os índices:

$$\mu' \frac{dL_\lambda}{d\tau} = L_\lambda - B_\lambda \Rightarrow \mu' \frac{dL_\lambda}{d\tau} - L_\lambda = -B_\lambda$$

Multiplicando ambos os membros por  $\left(\frac{1}{\mu'} e^{-\tau/\mu'} d\tau\right)$  e desenvolvendo:

$$d\left(L_\lambda e^{-\tau/\mu'}\right) = -\frac{1}{\mu'} B_\lambda e^{-\tau/\mu'} d\tau$$

que, integrando-se desde a superfície a uma altura caracterizados pelos valores de profundidade óptica de extinção iguais a  $\tau_s$  e  $\tau'$ , respectivamente:

$$L_\lambda(\tau') e^{-\tau'/\mu'} - L_\lambda(\tau_s) e^{-\tau_s/\mu'} = -\int_{\tau_s}^{\tau'} \frac{1}{\mu'} B_\lambda e^{-\tau/\mu'} d\tau$$

Portanto, a radiância ascendente é dada por:

$$L_\lambda(\tau', +\mu', \varphi') = L_\lambda(\tau_s, +\mu', \varphi') e^{-\tau_s/\mu'} \left\{ \begin{array}{l} \text{transferência parcial da} \\ \text{condição de contorno} \end{array} \right. - \frac{1}{\mu'} \int_{\tau_s}^{\tau'} B_\lambda[\lambda, T(\tau)] e^{-\tau/\mu'} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \text{transferência parcial da} \\ \text{contribuição de cada camada} \end{array} \right. \quad (6.34)$$

b) Radiância descendente ( $\mu' < 0$ ):

$$-\mu' \frac{dL_\lambda(\tau', -\mu', \varphi')}{d\tau} = L_\lambda(\tau', -\mu', \varphi') - B_\lambda[\lambda, T(\tau')]$$

Multiplicando por  $\left(-\frac{e^{\tau/\mu'}}{\mu'} d\tau\right)$  e desenvolvendo, tem-se:

$$d\left[L_{\lambda}(\tau') e^{\tau'/\mu'}\right] = \frac{1}{\mu'} B_{\lambda} e^{\tau'/\mu'} d\tau$$

e, finalmente, integrando-se desde o topo da atmosfera a um nível de altura com profundidade óptica igual a  $\tau'$  e sabendo-se que no topo a radiância descendente é nula:

$$L_{\lambda}(\tau', -\mu', \varphi') = \frac{1}{\mu'} \int_0^{\tau'} B_{\lambda}[\lambda, T(\tau)] e^{-(\tau'-\tau)/\mu'} d\tau \quad (6.35)$$

**Exercício 6.1:** Radiância espectral igual a  $1,499 \text{ Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\mu\text{m}^{-1}$  foi medida com um fotômetro solar no instante em que o ângulo zenital solar valia  $30^{\circ}$ . A radiância incidente no topo no mesmo comprimento de onda era igual a  $2,000 \text{ Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}\mu\text{m}^{-1}$ . Com base nessas informações, determine a profundidade óptica da atmosfera no instante da medição.

**Exercício 6.2:** Determine o valor da função de fase do espalhamento Rayleigh para as seguintes geometrias e classifique o espalhamento em frontal ou traseiro de acordo com o valor do ângulo de espalhamento resultante:

- $\Omega_{\text{inc}} = (\theta_{\text{inc}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{inc}} = 10^{\circ}), \Omega_{\text{em}} = (\theta_{\text{em}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{em}} = 190^{\circ})$
- $\Omega_{\text{inc}} = (\theta_{\text{inc}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{inc}} = 10^{\circ}), \Omega_{\text{em}} = (\theta_{\text{em}} = 60^{\circ}, \varphi_{\text{em}} = 10^{\circ})$
- $\Omega_{\text{inc}} = (\theta_{\text{inc}} = 30^{\circ}, \varphi_{\text{inc}} = 10^{\circ}), \Omega_{\text{em}} = (\theta_{\text{em}} = 120^{\circ}, \varphi_{\text{em}} = 10^{\circ})$

**Exercício 6.3:** Determine o valor da função de fase para o aerossol com parâmetro de assimetria igual a 0,6 a partir da aproximação de Henyey-Greenstein e as mesmas geometrias do exercício anterior.

**Exercício 6.4:** Determine a radiância difusa ascendente no topo da atmosfera associada ao espalhamento molecular da radiação solar, no espalhamento traseiro, isto é, para  $\Omega' = (+\mu_0, \varphi_0 + 180^{\circ})$  se  $\Omega_0 = (-\mu_0, \varphi_0)$ ; supondo que a superfície absorve toda a radiação incidente nesse comprimento de onda e que o espalhamento múltiplo é desprezível.

## 7. Balanços Radiativos

Conforme discutido em capítulos anteriores, há equilíbrio ou balanço radiativo quando o saldo de radiação de um sistema é nulo, isto é, quando:

$$Q^* = K \downarrow - K \uparrow + L \downarrow - L \uparrow = K^* + L^* = 0 \quad (7.1)$$

onde  $Q^*$  é o saldo total de radiação e  $K^*$  e  $L^*$  são os saldos parciais de onda curta (radiação solar) e onda longa (radiação terrestre), respectivamente. No caso da Terra, embora local e instantaneamente o sistema não se encontre em equilíbrio radiativo, considerando-se o planeta como um todo e em períodos de alguns anos, é possível estabelecer um modelo simplificado que auxilie na compreensão do conceito de equilíbrio radiativo, dos parâmetros envolvidos e das conseqüências das alterações em tais parâmetros. Vale lembrar que na realidade, o balanço ou equilíbrio energético do planeta requer troca de energia em suas várias formas, e não apenas na forma de radiação eletromagnética. Por exemplo, uma parcela significativa da energia radiativa acumulada nas regiões tropicais é transferida para as regiões polares com o movimento das massas de ar, isto é, na forma de energia cinética, resultante dos gradientes de temperatura entre o equador e os pólos. Essa é a origem da circulação ou da célula de Hadley [Liou, 1980]. Em escala reduzida ou micro-escala, pode-se também verificar a não ocorrência do balanço radiativo. É nessa situação que a energia radiativa absorvida pela superfície, por exemplo, pode ser convertida em calor latente e calor sensível, isto é, fornecendo a energia para a ocorrência da evapotranspiração, da fotossíntese e para gerar os movimentos convectivos.

### 7.1 Equilíbrio radiativo do planeta

Considerando-se apenas a energia na forma de radiação eletromagnética e relembando também a definição de equilíbrio termodinâmico no qual:

- os valores de T (temperatura) e p (pressão) devem ser constantes (uniformes);
- o sistema deve estar em equilíbrio químico;
- e equilíbrio radiativo,

$$\Rightarrow U_{abs} = U_{emit} \quad \text{ou} \quad \int_0^{\infty} U_{abs}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} U_{emit}(\lambda) d\lambda$$

isto é, toda radiação absorvida em um determinado comprimento de onda é re-emitada pelo sistema à sua temperatura. No caso do sistema Terra-atmosfera:

- absorve radiação solar (cuja temperatura é da ordem de 5800K)
- emite radiação terrestre (270 – 300K).

### 7.1.1 Temperatura de equilíbrio radiativo de um planeta sem atmosfera

Um planeta de raio  $R$  intercepta radiação solar que incide sobre a área equivalente de um círculo de raio  $R$ , ao passo que emite radiação à sua temperatura isotropicamente de acordo com a área de uma esfera, também de raio  $R$ , conforme ilustrado na Figura 7.1.

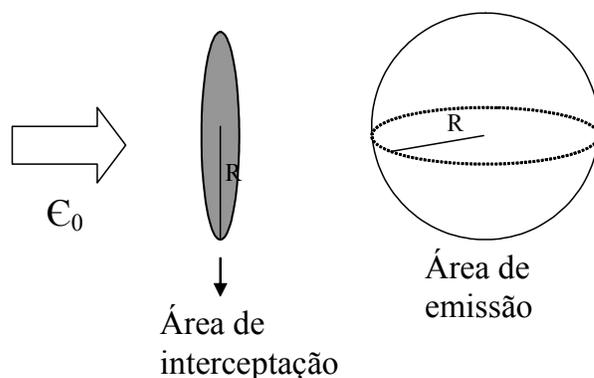


Figura 7.1 – Ilustração da área efetiva de interceptação de radiação solar e de emissão de radiação térmica por um planeta de raio  $R$ .

Supondo que não haja atmosfera e que a superfície do planeta apresente um albedo médio global igual a  $r_s$ , ao incidir sobre ele irradiância solar média anual igual a  $E_0$ , o equilíbrio radiativo do planeta será alcançado se a potência absorvida for igual à potência emitida na forma de radiação:

$$\epsilon_0 (1 - r_s) \pi R^2 = \sigma T_s^4 4\pi R^2 \quad (7.1)$$

e portanto, a temperatura do planeta no equilíbrio radiativo será obtida por:

$$T_s \cong \left[ \frac{(1 - r_s) \epsilon_0}{4\sigma} \right]^{1/4} \quad (7.2)$$

Nesta configuração, se o planeta estiver a uma distância astronômica do Sol, isto é, se  $d = \bar{d}$ , a irradiância solar total incidente no planeta é igual à constante solar:  $E_0 = 1367 \text{ Wm}^{-2}$ . O albedo médio da superfície terrestre é da ordem de 0,3. Substituindo esses

valores na equação 7.2, a superfície da Terra apresentaria uma temperatura média no equilíbrio radiativo da ordem de 255K ou  $-18^{\circ}\text{C}$  caso não houvesse uma atmosfera. Se o albedo da superfície do planeta fosse unitário,  $T_s$  seria igual a 0K e se fosse nulo, a temperatura de equilíbrio radiativo do planeta seria da ordem de 279K. Ou seja, sem uma atmosfera, mesmo que toda a radiação incidente fosse absorvida pela superfície do planeta, a sua temperatura de equilíbrio radiativo seria menor do que a observada na realidade para o planeta Terra.

### 7.1.2 Temperatura de equilíbrio radiativo num planeta com atmosfera

Como foi visto no tópico anterior, sem uma atmosfera, a superfície da Terra seria muito mais fria, mesmo que pudesse absorver toda a radiação solar que incidisse sobre ela. O próximo modelo a ser analisado considera a existência de uma atmosfera constituída de uma única camada homogênea e isotérmica que seja capaz de interagir com a radiação eletromagnética. A interação é significativa com a radiação do espectro terrestre. No espectro solar essa atmosfera absorve uma fração da radiação incidente  $S$ , mas não promove espalhamento. A Figura 7.2 ilustra as características desse sistema.

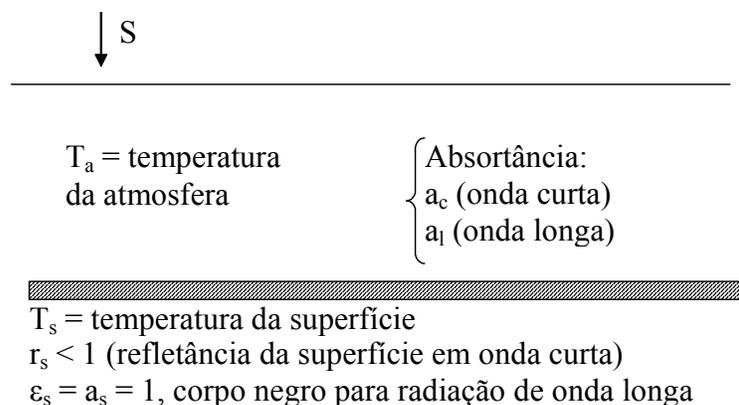


Figura 7.2 – Modelo simplificado de um planeta constituído por uma atmosfera homogênea e isotérmica capaz de absorver radiação eletromagnética sem promover espalhamento. A superfície do planeta atua como um corpo negro na região espectral de onda longa. No topo da atmosfera incide irradiância solar igual a  $S$ .

Com as propriedades apresentadas na Figura 7.2, obtêm-se as seguintes grandezas, no espectro solar:

- irradiância absorvida pela atmosfera:  $[a_c + r_s(1 - a_c)]S$
- irradiância transmitida pela atmosfera até a superfície:  $(1 - a_c)S$
- irradiância refletida pela superfície:  $r_s(1 - a_c)S$
- irradiância emergente no topo da atmosfera:  $r_s(1 - a_c)^2S$

e no espectro de onda longa:

- irradiância emitida pela superfície:  $\sigma T_s^4$
- irradiância emitida pela atmosfera em direção à superfície:  $a_l \sigma T_a^4$
- irradiância emergente no topo da atmosfera:  $a_l \sigma T_a^4 + (1 - a_l) \sigma T_s^4$
- irradiância absorvida pela superfície:  $a_l \sigma T_a^4$

Dessa forma, para que o sistema se encontre em equilíbrio radiativo, é necessário satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\text{a) superfície: } S(1 - r_s)(1 - a_c) + a_l \sigma T_a^4 = \sigma T_s^4 \quad (7.3)$$

$$\text{b) atmosfera: } a_c S + r_s(1 - a_c)a_c S + a_l \sigma T_s^4 = 2a_l \sigma T_a^4 \quad (7.4)$$

$$\text{c) planeta (topo): } (1 - a_c)^2 r_s S + (1 - a_l) \sigma T_s^4 + a_l \sigma T_a^4 = S \quad (7.5)$$

Fazendo algumas mudanças de variáveis:  $x = \sigma T_s^4$

$$y = \sigma T_a^4$$

e substituindo em (7.3) e (7.4):

$$S(1 - r_s)(1 - a_c) + a_l y = x \quad (7.3')$$

$$a_c S[1 + r_s(1 - a_c)] + a_l x = 2a_l y \quad (7.4')$$

Re-arranjando (7.3'):

$$S(1 - r_s)(1 - a_c) - x = -a_l y$$

multiplicando por 2 e somando a (7.4'):

$$\begin{aligned} a_c S[1 + r_s(1 - a_c)] + 2(1 - a_c)(1 - r_s)S + (a_l - 2)x &= 0 \\ x = \frac{\{a_c[1 + (1 - a_c)r_s] + 2(1 - a_c)(1 - r_s)\}S}{2 - a_l} &= \sigma T_s^4 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Substituindo  $x$  de (7.6) em (7.3'):

$$(1 - a_c)(1 - r_s)S + a_l y = \frac{\{a_c[1 + (1 - a_c)r_s] + 2(1 - a_c)(1 - r_s)\}S}{2 - a_l}$$

$$y = \frac{\{a_c [1 + (1 - a_c)r_s] + (1 - a_c)(1 - r_s)a_l\}S}{a_l(2 - a_l)} = \sigma T_a^4 \quad (7.7)$$

onde,

$$S = \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 S_0 \frac{\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{S_0}{4} \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2$$

Portanto,

$$T_s = \left\{ \frac{\{a_c [1 + (1 - a_c)r_s] + 2(1 - a_c)(1 - r_s)\}}{2 - a_l} \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma} \right\}^{1/4} \quad (7.8)$$

$$T_a = \left\{ \frac{\{a_c [1 + (1 - a_c)r_s] + a_l(1 - a_c)(1 - r_s)\}}{a_l(2 - a_l)} \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma} \right\}^{1/4} \quad (7.9)$$

De posse dos resultados, o próximo passo consiste em avaliar situações particulares:

1) Planeta sem atmosfera,  $T_a = 0$ :

$$T_s = \left\{ (1 - r_s) \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma} \right\}^{1/4} \quad (7.10)$$

2) Planeta com atmosfera ( $a_c \neq 0$ ;  $a_l \neq 0$ ), mas com superfície negra ( $r_s = 0$ )

$$T_a = \left\{ \frac{[a_c + a_l(1 - a_c)]}{a_l(2 - a_l)} \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma} \right\}^{1/4} \quad (7.11)$$

$$T_s = \left\{ \frac{[a_c + 2(1 - a_c)]}{2 - a_l} \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma} \right\}^{1/4} \quad (7.12)$$

Os resultados para a temperatura da superfície dependem das possíveis relações entre  $a_c$  e  $a_l$ :

$$\text{Para } a_c = a_l \Rightarrow T_s = \left\{ \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma} \right\}^{1/4} \quad (7.13)$$

Para  $a_c > a_l \Rightarrow \frac{2 - a_c}{2 - a_l} < 1 \Rightarrow$  Temperaturas inferiores à do planeta “negro” com

atmosfera “cinza” (resultado da equação 7.13).

Para  $a_c < a_l \Rightarrow \frac{2-a_c}{2-a_l} > 1 \Rightarrow$  Temperaturas superiores à do planeta “negro” com

atmosfera “cinza” (resultado da equação 7.13).

3) Terra atual ( $r_s \sim 0,3$ ), mas sem nuvens ( $a_c \sim 0,2$ ;  $a_l \sim 0,8$ ):

$$T_a \cong \left\{ \frac{\{a_c [1 + (1 - a_c)r_s] + a_l(1 - a_c)(1 - r_s)\} \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma}}{a_l(2 - a_l)} \right\}^{1/4}$$

$$\Rightarrow T_a \cong 257K$$

$$T_s \cong \left\{ \frac{\{a_c [1 + (1 - a_c)r_s] + 2(1 - a_c)(1 - r_s)\} \left(\frac{\bar{d}}{d}\right)^2 \frac{S_0}{4\sigma}}{2 - a_l} \right\}^{1/4}$$

$$\Rightarrow T_s \cong 288K$$

4) Terra atual, com nuvem ( $a_c \sim 0,7$ ;  $a_l \sim 1$ ):

$$T_a \cong 277K \text{ e } T_s \cong 291K \Rightarrow \text{Efeito estufa}$$

**Exercício 7.1:** Varie o valor da refletância de superfície em  $\pm 10\%$  do valor atualmente aceito para a Terra e avalie o efeito de tal alteração sobre as temperaturas da atmosfera e da superfície.

Como é possível verificar, a presença de nuvens altera a absorvância da atmosfera, aumentando o seu valor médio tanto no espectro de onda curta quanto em onda longa. Dessa forma, uma quantidade maior de radiação é transformada em energia interna, resultando num maior aquecimento radiativo da atmosfera e da superfície na presença de nuvens. As distintas propriedades radiativas de um planeta e principalmente de sua atmosfera, analisadas nos modelos simplificados, mostram que a temperatura da superfície de tal planeta e, conseqüentemente, seu clima é fortemente influenciada pelos denominados gases do efeito estufa. No modelo 3, que se aplica às condições atuais da Terra, a absorvância da atmosfera é baixa na região espectral de onda curta, indicando uma atmosfera praticamente transparente para a radiação solar. Por outro lado, a absorvância em onda longa é alta, o que torna a atmosfera praticamente opaca para a radiação terrestre, com exceção da região espectral da janela atmosférica (situada entre 8 e 12  $\mu\text{m}$ ). Como conseqüência, a superfície terrestre é aquecida pela radiação solar e a perda radiativa é

minimizada pela atuação dos gases “estufa” presentes na atmosfera. Como discutido em capítulos anteriores, no caso da Terra, os principais gases do efeito estufa são o vapor d’água, o dióxido de carbono e o metano. Daí a importância em se monitorar alterações nas concentrações de tais gases na atmosfera, visto que o clima atual da Terra pode ser modificado de acordo com tais variações, como ficou exemplificado com o modelo 4, onde o aumento da absorvância da atmosfera foi simulado com a presença de nebulosidade. Analisando as características físicas de alguns dos planetas do sistema solar, a importância da composição química da atmosfera fica ainda mais evidente. A Tabela 7.1, adaptada de Graedel e Crutzen [1993] apresenta algumas características físicas e químicas da Terra e seus planetas vizinhos Vênus e Marte.

Tabela 7.1 – Características físicas de Vênus, Terra e Marte

Característica	Vênus	Terra	Marte
Massa da atmosfera (razão com relação à atmosfera terrestre)	100	1	0,06
Distância ao Sol ( $10^6$ km)	108	150	228
Constante Solar ( $Wm^{-2}$ )	2610	1367	590
Albedo planetário (%)	75	30	15
Cobertura de nuvens (%)	100	50	Variável
Temperatura da superfície (K) (sem atmosfera)	234	255	217
Temperatura da superfície (K)	700	288	220
Aquecimento devido ao efeito estufa (K)	466	33	3
N <sub>2</sub> (%)	< 2	78	< 2,5
O <sub>2</sub> (%)	< 1 ppmv <sup>13</sup>	21	< 0,25
CO <sub>2</sub> (%)	> 98	0,035	> 96
H <sub>2</sub> O (intervalo %)	$10^{-4}$ a 0,3	$3 \times 10^{-4}$ a 4	< 0,001
SO <sub>2</sub>	150 ppmv	< 1 ppbv <sup>13</sup>	Nulo
Composição química das nuvens	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	H <sub>2</sub> O	Poeira, H <sub>2</sub> O, CO <sub>2</sub>

<sup>13</sup> 1ppmv = uma parte por milhão por volume, o que significa que a concentração volumétrica do gás considerado é um milhão de vezes menor que o volume total da atmosfera; 1 ppbv = uma parte por bilhão por volume.

De acordo com a Tabela 7.1, a distância de cada planeta ao sol varia por um fator aproximado de 1,5, isto é, Vênus está a aproximadamente 100 milhões de quilômetros do Sol, seguido da Terra, cuja distância é da ordem de 1,5 vezes maior e Marte, também a aproximadamente 1,5 vezes mais distante do Sol que a Terra. Como consequência, a constante solar varia por um fator 2 para cada planeta. Com base nessa análise simplificada, seria esperado que a superfície em Vênus apresentasse a maior temperatura, seguida da Terra, e Marte seria o planeta a apresentar a menor temperatura de superfície, caso os demais parâmetros fossem iguais nos três planetas. Como o albedo planetário é significativamente diferente em cada planeta, as temperaturas de equilíbrio radiativo (sem atmosfera) seriam iguais a 234 K para Vênus, 255 K para a Terra e 217 K para Marte, isto é, a Terra seria o planeta mais quente. Entretanto, devido às suas atmosferas, as temperaturas médias reais das superfícies desses planetas são iguais a 700 K em Vênus, 288 K na Terra e 220 K em Marte. Tais resultados ilustram que Vênus possui um significativo efeito estufa, Marte praticamente não é influenciado e a Terra é moderadamente afetada. Analisando-se suas atmosferas, observa-se que em Vênus a atmosfera possui massa cem vezes maior que a da Terra e que sua constituição química é basicamente de gases do efeito estufa,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{SO}_2$ . Embora em Marte a concentração de  $\text{CO}_2$  seja muito maior que na Terra, sua atmosfera apresenta muito menos vapor d'água. Essa composição, aliada ao fato da menor irradiância solar recebida, explica a baixa temperatura de sua superfície. Essa análise comparativa mostra a importância da composição química da atmosfera no balanço de radiação dos planetas e que alterações nessa composição podem produzir efeitos climáticos significativos.

### **7.1.3 Atmosfera com absorção e espalhamento**

Finalmente, para aproximar os modelos discutidos anteriormente das condições reais observadas na Terra, será considerado que a atmosfera pode também promover espalhamento de radiação solar, de forma que parte da radiação incidente pode ser refletida de volta ao espaço. Por simplicidade, a atmosfera continua isotérmica e homogênea com as seguintes características:

$T_A$  = temperatura constante;

$a_c$  = absortância para OC (onda curta, isto é, para radiação solar);

$a_l$  = absorptância para radiação de onda longa (OL);

$r_c$  = refletância para OC

A superfície é considerada um corpo negro com temperatura  $T_s$  e refletância  $r_s$  para radiação solar. As Figuras 7.3 e 7.4 apresentam ilustrações esquemáticas dos componentes do balanço de radiação de onda curta e onda longa, respectivamente.

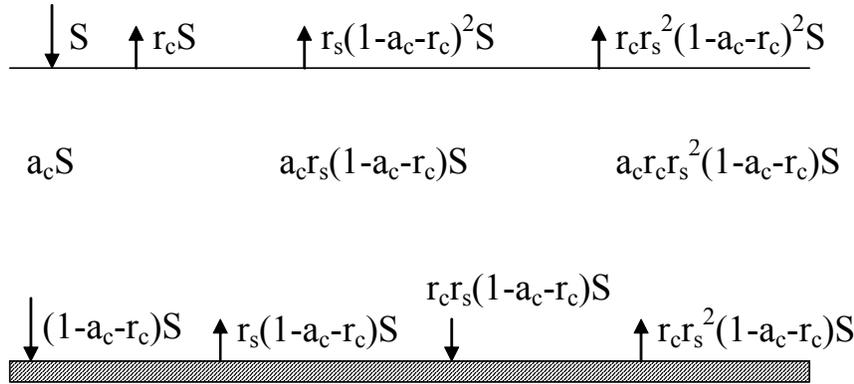


Figura 7.3 – Ilustração esquemática dos fluxos de radiação de onda curta no sistema Terra-atmosfera, considerando um modelo simplificado no qual a atmosfera é constituída de uma única camada com temperatura constante  $T_A$ , capaz de absorver e refletir parte da radiação solar incidente. A superfície também reflete parte da radiação incidente sobre ela, apresentando albedo igual a  $r_s$ .

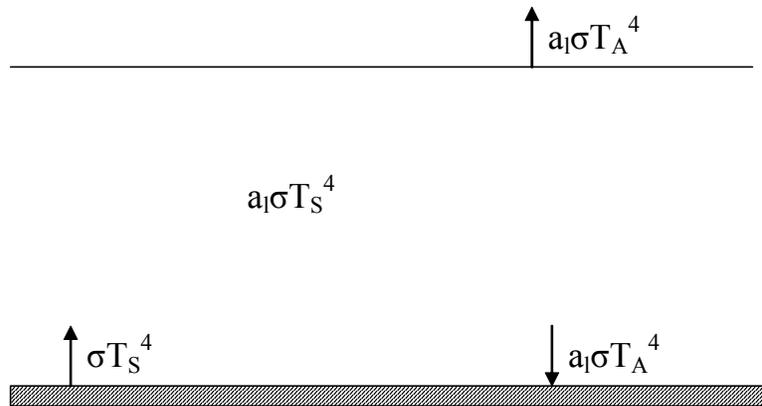


Figura 7.4 – Ilustração esquemática dos fluxos de radiação de onda longa no sistema Terra-atmosfera, considerando um modelo simplificado no qual a atmosfera é constituída de uma única camada com temperatura constante  $T_A$ , capaz de absorver parte da radiação terrestre incidente. A superfície é considerada um corpo negro com temperatura  $T_s$ .

Com base nesse modelo, o balanço de radiação, no equilíbrio radiativo, é obtido:

a) Para a superfície:

$$(1 - r_s)(1 - a_c - r_c)S(1 + r_c r_s) + \dots + a_l \sigma T_A^4 = \sigma T_S^4 \quad (7.14)$$

Observar que, na realidade, termos de ordens superiores em  $r_c$  e  $r_s$  também contribuem para o saldo de radiação à superfície, devido aos efeitos de espalhamento múltiplo entre a atmosfera e a superfície (representados pelas reticências na equação 7.14). Entretanto, como tanto  $r_c$  e  $r_s$  são menores que a unidade, tais termos tendem a zero rapidamente, podendo ser desprezados neste modelo simplificado.

b) Atmosfera:

$$a_c S + a_c r_s S(1 - a_c - r_c) + a_c r_c r_s^2 (1 - a_c - r_c)S + \dots + a_l \sigma T_S^4 = 2a_l \sigma T_A^4 \quad (7.15)$$

De forma análoga ao realizado no modelo precedente, efetuando as mudanças de variáveis e desenvolvendo:

$$x = \sigma T_S^4; \quad y = \sigma T_A^4$$

obtêm-se:

$$x = \left\{ \frac{a_c + [a_c r_s + 2(1 - r_s)](1 - a_c - r_c)(1 + r_c r_s)}{2 - a_l} \right\} S \quad (7.16)$$

$$y = \left\{ \frac{a_c + [a_l(1 - r_s) + a_c r_s](1 - a_c - r_c)(1 + r_c r_s)}{a_l(2 - a_l)} \right\} S \quad (7.17)$$

Para  $r_c = 0$ ,

$$x = \left\{ \frac{a_c + [a_c r_s + 2(1 - r_s)](1 - a_c)}{2 - a_l} \right\} S$$

$$y = \left\{ \frac{a_c + [a_l(1 - r_s) + a_c r_s](1 - a_c)}{a_l(2 - a_l)} \right\} S$$

Recuperando-se as temperaturas de equilíbrio radiativo para a superfície e atmosfera representadas pelas equações (7.8) e (7.9).

## 7.2 Taxa de aquecimento/resfriamento radiativo

Do ponto de vista da meteorologia, a atmosfera é completamente especificada pela velocidade, temperatura e pressão das massas ou camadas de ar. A temperatura e a pressão automaticamente definem a densidade via equação de estado. Estes cinco parâmetros básicos (os três componentes da velocidade, a temperatura e a pressão) são governados pelas denominadas equações primitivas, isto é, equações diferenciais cinemáticas de movimento, para cada componente da velocidade, a equação de continuidade e a equação termodinâmica de estado. Os estudos que envolvem a dinâmica da atmosfera consistem na integração destas equações no espaço e no tempo. A radiação é incorporada às equações matemáticas via equação da termodinâmica:

$$dQ = dU + dW$$

onde  $dQ$  é o calor trocado com o universo,  $dU$  é a variação de energia interna e  $dW$  é o trabalho realizado. No caso da atmosfera, variações de energia interna implicam em variações de temperatura, basicamente, e o trabalho realizado é praticamente nulo. Portanto:

- Se absorção de radiação  $>$  emissão  $\Rightarrow dQ > 0 \Rightarrow dU > 0$  (aquecimento)
- Se absorção  $<$  emissão  $\Rightarrow dQ < 0 \Rightarrow dU < 0$  (resfriamento)

Significa que se houver convergência de radiação haverá um aquecimento do sistema, caso contrário, havendo divergência de radiação, o resultado final será de resfriamento. Considerando uma camada da atmosfera com espessura geométrica  $dz$ , sobre a qual incidem as irradiâncias espectrais  $\epsilon_{\lambda} \downarrow (\lambda, z)$  (descendente no topo da camada) e  $\epsilon_{\lambda} \uparrow (\lambda, z - dz)$  (ascendente na base), de acordo com a Figura 7.5. Além disso, essa camada emite irradiância  $\epsilon_{\lambda} \uparrow (\lambda, z)$  no topo e  $\epsilon_{\lambda} \downarrow (\lambda, z - dz)$  na base, e lembrando que:

$$\epsilon_{\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} L_{\lambda} \mu \, d\mu \, d\varphi \quad \text{onde } \mu = \cos \theta$$

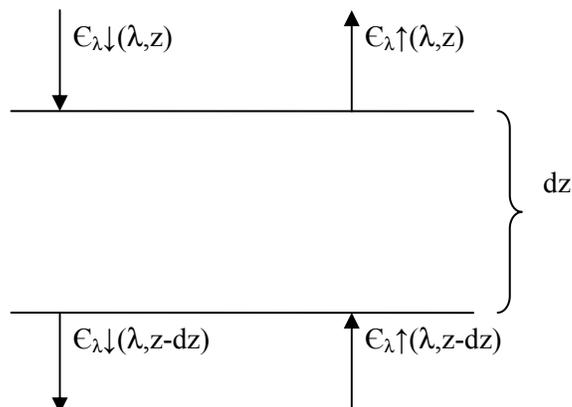


Figura 7.5 – Ilustração esquemática de irradiâncias espectrais incidentes e emergentes de uma camada da atmosfera de espessura  $dz$ .

Havendo interação entre a radiação descendente de comprimento de onda  $\lambda$  e a composição da camada, podem ocorrer:

a)  $\epsilon_{\lambda\downarrow}(\lambda, z) = \epsilon_{\lambda\downarrow}(\lambda, z - dz)$ , isto é, absorção = emissão

b)  $\epsilon_{\lambda\downarrow}(\lambda, z) \neq \epsilon_{\lambda\downarrow}(\lambda, z - dz)$

Obviamente, as duas condições a) e b) são possíveis também para  $\epsilon_{\lambda\uparrow}$ .

O saldo de radiação descendente é obtido como:  $d\epsilon_{\lambda\downarrow} = \epsilon_{\lambda\downarrow}(\lambda, z) - \epsilon_{\lambda\downarrow}(\lambda, z - dz)$

e o saldo de radiação ascendente:  $d\epsilon_{\lambda\uparrow} = \epsilon_{\lambda\uparrow}(\lambda, z - dz) - \epsilon_{\lambda\uparrow}(\lambda, z)$ .

- Para  $d\epsilon_{\lambda\uparrow\downarrow}(\lambda) > 0 \Rightarrow$  absorção > emissão  $\Rightarrow$  aquecimento da camada.

- Para  $d\epsilon_{\lambda\uparrow\downarrow}(\lambda) < 0 \Rightarrow$  absorção < emissão  $\Rightarrow$  resfriamento da camada.

Sinais opostos implicam em configurações mais complexas.

No caso da radiação solar, a absorção pela atmosfera é muito maior que a emissão. Então, a variação  $d\epsilon_{\lambda\uparrow\downarrow}(\lambda)$  é positiva, o que implica em aquecimento da camada. No caso da radiação terrestre pode ocorrer tanto absorção quanto emissão de radiação, portanto  $d\epsilon_{\lambda} > 0$  e/ou  $d\epsilon_{\lambda} < 0$ , dependendo da distribuição de temperaturas e das propriedades ópticas da camada atmosférica. Seja uma camada da atmosfera com temperatura  $T$

delimitada superiormente por uma camada com temperatura  $T_{\text{sup}}$  e inferiormente por uma camada com temperatura  $T_{\text{inf}}$ , de acordo com a ilustração apresentada na Figura 7.6.

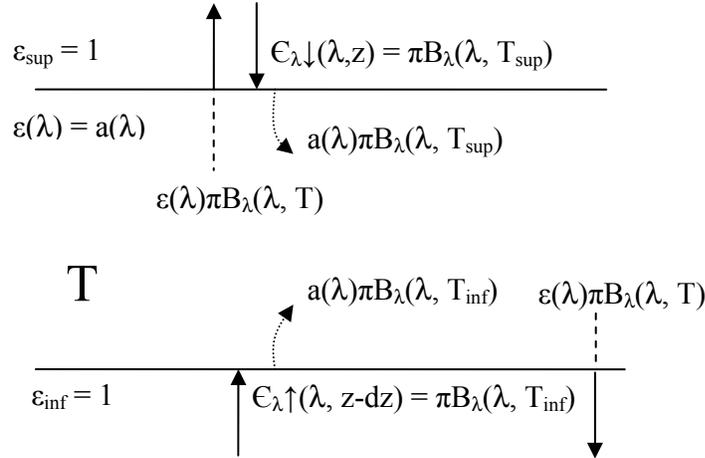


Figura 7.6 – Irradiâncias incidentes e emergentes em uma camada atmosférica de espessura  $dz$  e temperatura  $T$ .

Da Figura 7.6, tem-se que as camadas superior e inferior atuam como corpos negros e por isso emitem irradiância espectral isotropicamente, dependente apenas de suas respectivas temperaturas. A camada de interesse apresenta absorvância espectral  $a(\lambda)$  e temperatura  $T$ . Para essa camada, os saldos de radiação valem:

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_{\lambda}\downarrow &= \epsilon_{\lambda}\downarrow(\lambda, z) - \epsilon_{\lambda}\downarrow(\lambda, z - dz) \\
 &= \pi B_{\lambda}(\lambda, T_{\text{sup}}) - \epsilon(\lambda)\pi B_{\lambda}(\lambda, T) - [1 - a(\lambda)]\pi B_{\lambda}(\lambda, T_{\text{sup}}) = \epsilon(\lambda)\pi[B_{\lambda}(\lambda, T_{\text{sup}}) - B_{\lambda}(\lambda, T)]
 \end{aligned}
 \tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_{\lambda}\uparrow &= \epsilon_{\lambda}\uparrow(\lambda, z) - \epsilon_{\lambda}\uparrow(\lambda, z - dz) \\
 &= \pi B_{\lambda}(\lambda, T_{\text{inf}}) - \epsilon(\lambda)\pi B_{\lambda}(\lambda, T) - [1 - a(\lambda)]\pi B_{\lambda}(\lambda, T_{\text{inf}}) = \epsilon(\lambda)\pi[B_{\lambda}(\lambda, T_{\text{inf}}) - B_{\lambda}(\lambda, T)]
 \end{aligned}
 \tag{7.19}$$

**Exercício 7.2:** Volte aos capítulos anteriores da apostila e justifique as equações (7.18) e (7.19) com base nas leis e conceitos abordados.

Portanto, as variações  $d\epsilon_{\lambda}\uparrow(\lambda)$  e  $d\epsilon_{\lambda}\downarrow(\lambda)$  indicam irradiâncias espectrais (ou quantidades de energia por unidade de área, por unidade de tempo, por unidade de

comprimento de onda) que são adicionadas ou subtraídas da quantidade de energia interna armazenada na camada. Tais variações:

- a) são diretamente proporcionais a  $\epsilon(\lambda)$ ;
- b) são diretamente proporcionais às diferenças entre as funções de Planck associadas às temperaturas da camada ( $T$ ) e externas ( $T_{\text{sup}}, T_{\text{inf}}$ ).

O saldo total do balanço de energia para uma camada qualquer com espessura  $dz$  considerando-se apenas radiação de comprimento de onda  $\lambda$ , pode ser escrito:

$$d\epsilon_{\lambda}(\lambda) = d\epsilon_{\lambda}\uparrow(\lambda) + d\epsilon_{\lambda}\downarrow(\lambda)$$

$$d\epsilon_{\lambda}(\lambda) = [\epsilon_{\lambda}\uparrow(\lambda, z - dz) - \epsilon_{\lambda}\uparrow(\lambda, z)] + [\epsilon_{\lambda}\downarrow(\lambda, z) - \epsilon_{\lambda}\downarrow(\lambda, z - dz)]$$

Caso  $\epsilon_{\text{emergente}} > \epsilon_{\text{incidente}}$  há resfriamento da camada, do contrário, se  $\epsilon_{\text{emergente}} < \epsilon_{\text{incidente}}$ , a camada da atmosfera sofre aquecimento devido ao acúmulo de energia.

Denomina-se divergência de irradiância espectral a quantidade:

$$\frac{d\epsilon_{\lambda}}{dz}, \text{ onde } d\epsilon_{\lambda}(\lambda) = d\epsilon_{\lambda}\downarrow(\lambda) + d\epsilon_{\lambda}\uparrow(\lambda) \quad (7.20)$$

A definição formal do divergente de uma função  $F$  qualquer diz que:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ . Como a hipótese inicial é de que não há variações horizontais significativas de irradiância, isto é, elas são desprezíveis quando comparadas às variações verticais, então a equação (7.20) torna-se uma boa aproximação para o divergente da irradiância.

Como deduzido no Capítulo 1 desta apostila, a irradiância é obtida a partir da energia radiativa (equação 1.7):

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_{\lambda}(\lambda)}{dz} &= \frac{dU}{dt dA d\lambda dz} \times \left( \frac{dT}{dT} \frac{dm}{dm} \right) \\ &= \frac{dm}{dA dz} \frac{dU}{dT dm} \frac{dT}{dt} \frac{1}{d\lambda} \end{aligned}$$

Portanto, desenvolvendo a igualdade, é possível obter a taxa de aquecimento/resfriamento radiativo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{d\epsilon_{\lambda}(z)}{dz} d\lambda \quad (7.21)$$

onde,  $\rho = \frac{dm}{dAdz}$  é a densidade do ar na camada e  $C_p = \frac{dU}{dTdm}$  é o calor específico à pressão constante.

$$\text{- Se } d\epsilon_\lambda(\lambda) < 0 \rightarrow \text{resfriamento} \rightarrow \frac{dT}{dt} < 0$$

$$\text{- Se } d\epsilon_\lambda(\lambda) > 0 \rightarrow \text{aquecimento} \rightarrow \frac{dT}{dt} > 0$$

A taxa de aquecimento/resfriamento radiativo associada a uma região espectral  $\Delta\lambda$  é obtida somando-se as contribuições  $\left(\frac{dT}{dt}\right)\Delta\lambda_i$  correspondentes a cada sub-região  $\Delta\lambda_i$ :

$$\frac{dT}{dt}(\Delta\lambda) = \sum_i \frac{dT}{dt}(\Delta\lambda_i)$$

Ou de maneira mais rigorosa,

$$\frac{dT}{dt}(\Delta\lambda) = \int_{\Delta\lambda} \frac{1}{\rho C_p} \frac{d\epsilon_\lambda(\lambda)}{dz} d\lambda \quad (7.22)$$

E a taxa de aquecimento/resfriamento radiativo total é determinada integrando-se sobre todo o espectro eletromagnético:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{rad. total} = \int_0^\infty \frac{1}{\rho C_p} \frac{d\epsilon_\lambda(\lambda)}{dz} d\lambda = \frac{1}{\rho C_p} \frac{d\epsilon}{dz} \quad (7.23)$$

Para uma atmosfera em equilíbrio hidrostático:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{rad. total} = -\frac{g}{C_p} \frac{d\epsilon}{dp} \quad (7.24)$$

Ou seja, as equações 7.23 e 7.24 definem o potencial da radiação eletromagnética em aquecer ou resfriar a atmosfera. Dessa forma, conhecendo o perfil atmosférico inicial, com a concentração de gases ativos radiativamente (vapor d'água e dióxido de carbono, por exemplo), das partículas de aerossol e da temperatura em cada camada atmosférica, é possível determinar o quanto cada camada irá resfriar ou aquecer devido aos diversos processos radiativos que ocorrem na camada em si e nas camadas vizinhas. Vale lembrar que durante o dia, com a incidência da radiação solar, as camadas podem apenas sofrer aquecimento, caso haja absorção de radiação nessa região espectral. Para o caso de radiação no infravermelho térmico (ou terrestre), a análise do resultado final (se há aquecimento ou

resfriamento) é mais complexa, visto que depende tanto do perfil de temperatura e das absorptâncias espectrais de cada camada.

### 7.3 Balanço de energia à superfície

Novamente, com o intuito de simplificar a compreensão dos processos de troca de energia, é considerado que o transporte de calor pelo vento ou por correntes marítimas seja desprezível, assim como o aproveitamento de energia para a produção de biomassa (fotossíntese). Gradientes horizontais de temperatura também não serão considerados. Nesse modelo simplificado, o saldo total de energia à superfície é obtido como:

$$Q^* = H + LE + G \quad (7.25)$$

onde,  $Q^*$  é o saldo ou balanço total de radiação,  $H$  é o termo que representa a troca turbulenta de calor sensível,  $LE$  representa a transferência de calor latente e  $G$  é o termo de condução de calor no solo. Relembrando de capítulos anteriores, o saldo total de radiação à superfície é obtido como:

$$\begin{aligned} Q^* &= \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} \downarrow(\lambda) d\lambda - \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda} \uparrow(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{4\mu m} \epsilon_{\lambda} \downarrow(\lambda) d\lambda - \int_0^{4\mu m} \epsilon_{\lambda} \uparrow(\lambda) d\lambda + \int_{4\mu m}^{\infty} \epsilon_{\lambda} \downarrow(\lambda) d\lambda - \int_{4\mu m}^{\infty} \epsilon_{\lambda} \uparrow(\lambda) d\lambda \\ &= K \downarrow - K \uparrow + L \downarrow - L \uparrow \end{aligned}$$

A irradiância solar incidente à superfície ( $K \downarrow$ ) varia de acordo com o ciclo diurno da distância zenital solar ( $\mu_0$ ), assim como segundo a variabilidade dos constituintes da atmosfera, em particular, da cobertura de nuvens, vapor d'água e partículas de aerossol. A irradiância solar refletida pela superfície ( $K \uparrow$ ) depende da variabilidade da refletância ou albedo da superfície. No caso da radiação térmica, a variabilidade da radiação emitida pela atmosfera em direção à superfície (componente  $L \downarrow$  do balanço de radiação) depende dos constituintes da atmosfera atuantes no efeito estufa (emissividade) e da temperatura da atmosfera. Finalmente, a variabilidade da irradiância emitida pela superfície ( $L \uparrow$ ) depende da temperatura da superfície e da variabilidade da sua emissividade. Solo nu ou com

vegetação, apresenta variabilidade em  $L \uparrow$  devido à variabilidade diurna da sua temperatura. Por outro lado, superfícies aquáticas (lago, oceano) apresentam emissão de  $L \uparrow$  praticamente constante ao longo do dia, pois apresentam baixa resposta térmica. A falta de resposta pode ser atribuída a quatro características:

- a) Penetração - como a água permite transmissão de radiação de onda curta a profundidades consideráveis, a energia absorvida é difundida através de um grande volume;
- b) Mistura – a existência de convecção e transporte de massa devido aos movimentos de um fluido também permite que a perda e o ganho de calor sejam afetados por um grande volume;
- c) Evaporação – disponibilidade “infinita” de água gera uma fonte eficiente de calor latente e o resfriamento por evaporação tende a desestabilizar a camada superficial e aumentar ainda mais a mistura;
- d) Capacidade térmica – a água apresenta uma alta capacidade térmica de tal forma que exige aproximadamente três vezes mais energia para aumentar uma unidade de volume de água por um mesmo intervalo de temperatura que a maioria dos tipos de solo. Para fins de comparação, a Tabela 7.2 apresenta valores da capacidade térmica para dois tipos de solo e a da água.

Tabela 7.2 – Capacidade térmica para solo arenoso, solo argiloso e água.

Tipo de superfície	c (capacidade térmica) [Jm <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> x 10 <sup>6</sup> ]
Solo arenoso	1,28
Solo argiloso	1,42
água	4,18

## Bibliografia

Chylek, P., Damiano, P. e Shettle, E. P. Infrared emittance of water clouds, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 49(16), 1459-1472.

Coulson, K. L., 1975, “Solar and Terrestrial Radiation Methods and Measurements”, Academic Press, New York.

Feynman, R. P., Leighton, R. B. & Sands, M., 1977, “The Feynman Lectures on Physics”, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 6ª edição.

Fröhlich C. & Shaw, G. E., 1980, New determination of Rayleigh-Scattering in the terrestrial atmosphere. *Appl. Optics* **19(11)**, 1773-1775.

Goody, R. M. e Yung, Y. L., 1989, “Atmospheric Radiation – Theoretical Basis”, segunda edição, Oxford University Press, New York.

Graedel, T. E. & Crutzen, P. J., 1993, “Atmospheric Change – An Earth System Perspective”, W. H. Freeman and Company, New York.

Liou, K-N., 1980 ou 2002, “An Introduction to Atmospheric Radiation”, Academic Press, Inc.

Nussenzveig, H.M., 1996, “Curso de Física Básica 2 – Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor”, Edgard Blücher Ltda, 3ª edição.

Paltridge, G. W. & Platt, C. M. R., 1976, “Radiative Processes in Meteorology and Climatology”, Elsevier.

Ricchiazzi, P., S. Yang, C. Gautier & D. Sowle: SBDART: A research and teaching software tool for plane-parallel radiative transfer in the Earth’s Atmosphere. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **79 (10)**, 2101-2114, 1998.

Seinfeld, J. H. & Pandis, S. N., 1998, “Atmospheric Chemistry and Physics : From Air Pollution to Climate Change”, Wiley, New York.

Thomas, G. E. & Stamnes, K., 1999, “Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean”, Cambridge University Press.

Van de Hulst, H. C., 1981, “Light Scattering by Small Particles”, Dover Publications, Inc., New York.

World Meteorological Organization, 1983, “Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation”.

## Apêndice 1 – Dedução da relação entre o sistema horário e o equatorial

Redesenhando a Figura 3.7, incluindo as retas tangentes aos arcos NP e ND (Figura A.1), tem-se, para o complemento de  $\varphi$ :

$$\tan(\pi/2 - \varphi) = \frac{\overline{NX}}{\overline{ON}} \Rightarrow \overline{NX} = \overline{ON} \tan(\pi/2 - \varphi) \quad (\text{A.1})$$

$$\overline{ON} = \overline{OX} \cos(\pi/2 - \varphi) \Rightarrow \overline{OX} = \overline{ON} \sec(\pi/2 - \varphi) \quad (\text{A.2})$$

Analogamente, para o complemento de  $\delta_o$ :

$$\tan(\pi/2 - \delta_o) = \frac{\overline{NY}}{\overline{ON}} \Rightarrow \overline{NY} = \overline{ON} \tan(\pi/2 - \delta_o) \quad (\text{A.3})$$

$$\overline{ON} = \overline{OY} \cos(\pi/2 - \delta_o) \Rightarrow \overline{OY} = \overline{ON} \sec(\pi/2 - \delta_o) \quad (\text{A.4})$$

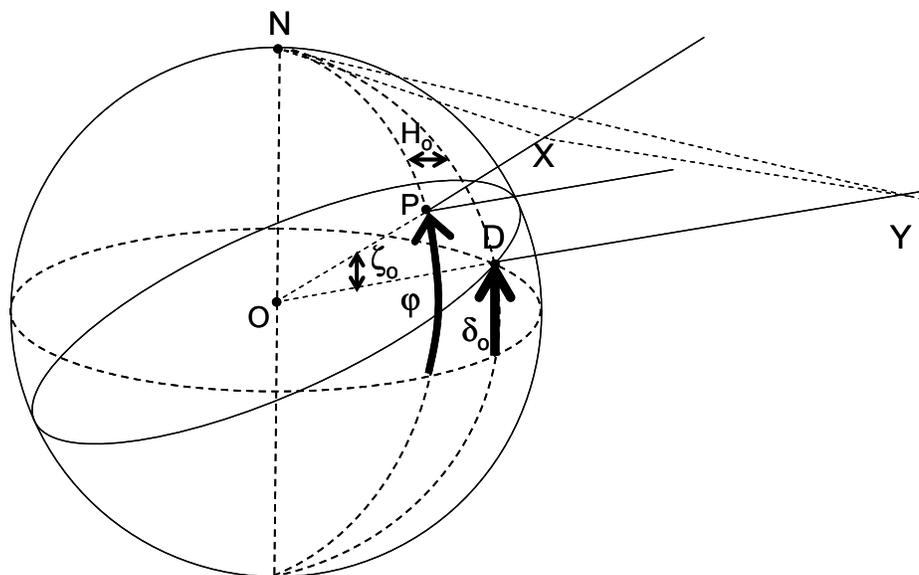


Figura A.1 - Relação entre o ângulo zenital solar  $\zeta_o$  e a latitude  $\varphi$ , a declinação  $\delta_o$  e o ângulo horário  $H_o$ , com a inclusão das retas tangentes aos arcos NP (reta NX) e ND (reta NY).

Do triângulo NXY:

$$\overline{XY}^2 = \overline{NX}^2 + \overline{NY}^2 - 2\overline{NX}\overline{NY} \cos(XNY)$$

mas o ângulo referente ao arco XNY é  $H_o$ , portanto:

$$\overline{XY}^2 = \overline{NX}^2 + \overline{NY}^2 - 2\overline{NX}\overline{NY} \cos H_o \quad (A.5)$$

Analogamente, do triângulo OXY:

$$\overline{XY}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OY}^2 - 2\overline{OX}\overline{OY} \cos \zeta_o \quad (A.6)$$

sendo que, neste caso, o ângulo referente ao arco XOY é  $\zeta_o$ . Substituindo em (A.5) e (A.6) as variáveis obtidas em (A.1) a (A.4) e igualando, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{ON}^2 \tan^2(\pi/2 - \varphi) + \overline{ON}^2 \tan^2(\pi/2 - \delta_o) - 2\overline{ON}^2 \tan(\pi/2 - \varphi) \tan(\pi/2 - \delta_o) \cos H_o = \\ = \overline{ON}^2 \sec^2(\pi/2 - \varphi) + \overline{ON}^2 \sec^2(\pi/2 - \delta_o) - 2\overline{ON}^2 \sec(\pi/2 - \varphi) \sec(\pi/2 - \delta_o) \cos \zeta_o \end{aligned} \quad (A.7)$$

eliminando-se  $\overline{ON}^2$  e utilizando-se a igualdade trigonométrica:  $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ :

$$-2 \tan(\pi/2 - \varphi) \tan(\pi/2 - \delta_o) \cos H_o = 2 - 2 \sec(\pi/2 - \varphi) \sec(\pi/2 - \delta_o) \cos \zeta_o$$

que, isolando  $\cos \zeta_o$ , resulta em:

$$\cos \zeta_o = \cos(\pi/2 - \varphi) \cos(\pi/2 - \delta_o) + \text{sen}(\pi/2 - \varphi) \text{sen}(\pi/2 - \delta_o) \cos H_o$$

ou

$$\cos \zeta_o = \text{sen} \varphi \text{sen} \delta_o + \cos \varphi \cos \delta_o \cos H_o \quad (A.8)$$