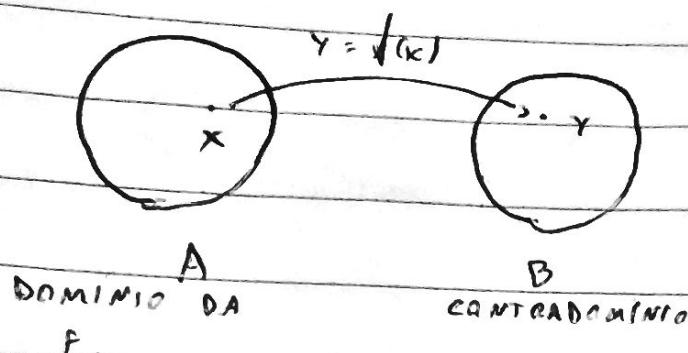


Transformações lineares.

- Transformações = funções = aplicações.



- $f: A \rightarrow B$ é injetora $\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

- $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$.

$$\text{Im}(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ com } f(a) = b \}$$

f é sobrejetora $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = B$

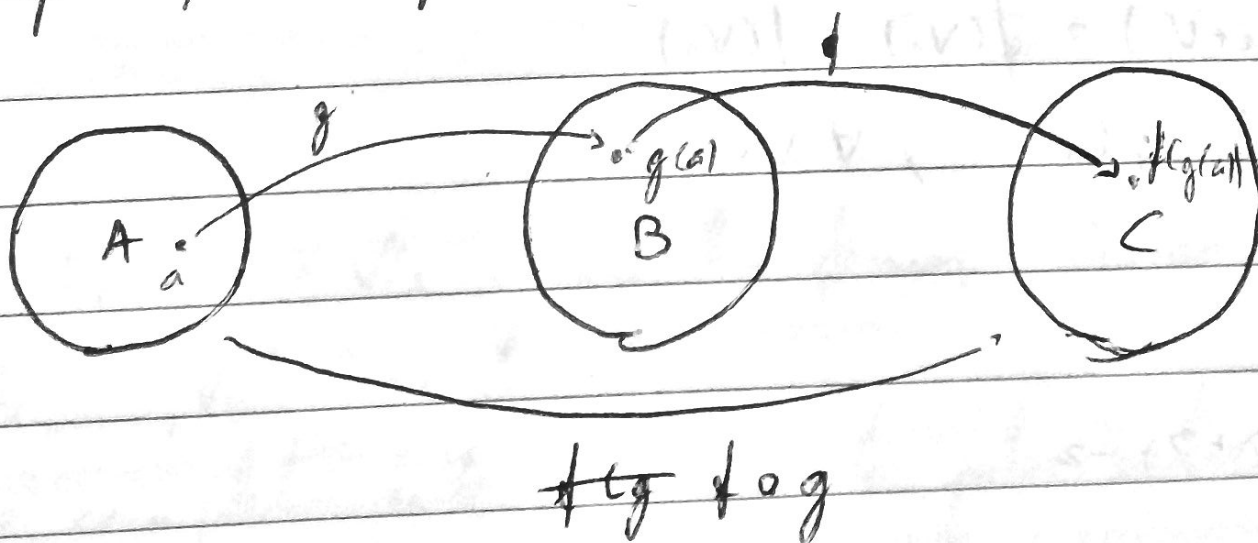
- f^{-1} = função inversa de f .

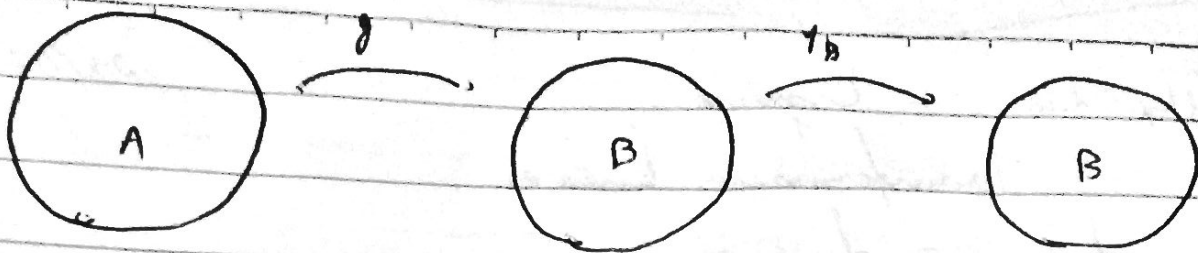
$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$\forall b \in B, f(f^{-1}(b)) = b$$

$$\forall a \in A, f^{-1}(f(a)) = a$$

- Composição de funções

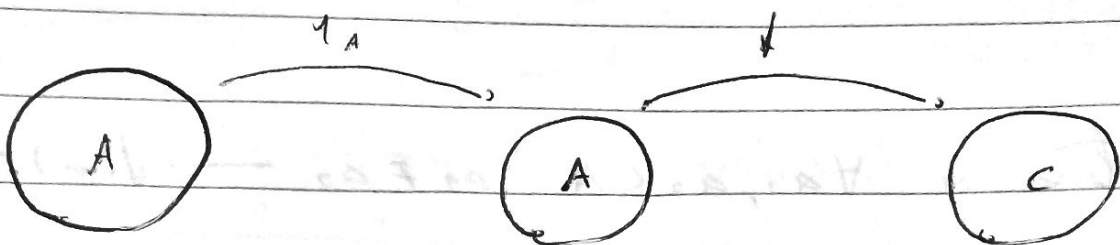




$$f_B: B \longrightarrow B$$

$$b \longrightarrow b$$

$$f_B \circ f = f$$

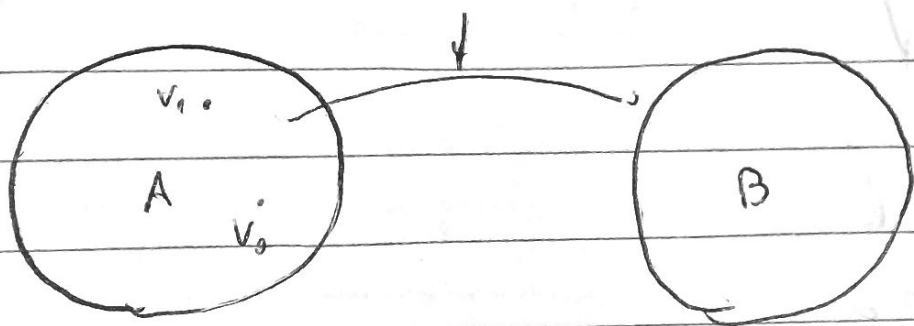


$$f_A: A \longrightarrow A$$

$$a \longrightarrow a$$

$$f \circ f_A = f$$

* Transformações lineares



$$f: A \longrightarrow B$$

A, B espaços vetoriais.

- f linear:

$$\bullet \forall v_1, v_2 \in A, f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

$$\bullet \forall v \in A, f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ex.: } f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = 2x + 3y - z$$

$$f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$$2 \cdot (x_1 + x_2) + 3 \cdot (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 2x_1 + 3y_1 - z_1 + 2x_2 + 3y_2 - z_2$$

$$f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$$

$$f(\lambda x + \lambda y + \lambda z) = \lambda \cdot f(x + y + z)$$

$$2 \cdot \lambda x + 3 \cdot \lambda y - \lambda z = \lambda \cdot (2x + 3y - z)$$

$$\lambda \cdot (2x + 3y - z) = \lambda \cdot (2x + 3y - z) \quad \checkmark$$

- D: $f: V \rightarrow V$ transformações lineares, então f pode ser chamada de operador linear.

Ex. 2: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operadores lineares

$$f(1, 2) = (3, -1)$$

$$f(0, 1) = (1, 2)$$

$$V_1 = (1, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{base de } \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

$$V_2 = (0, 1)$$

$$f(v) = f(\lambda_1 \cdot V_1 + \lambda_2 \cdot V_2)$$

$$= f(\lambda_1 \cdot V_1) + f(\lambda_2 \cdot V_2)$$

$$= \lambda_1 \cdot f(V_1) + \lambda_2 \cdot f(V_2)$$

$$V(x, y) = \lambda_1 \cdot V_1 + \lambda_2 \cdot V_2 \Rightarrow \lambda_1 \cdot (1, 2) + \lambda_2 \cdot (0, 1)$$

$$(\lambda_1; 2\lambda_1 + \lambda_2) \Rightarrow x = \lambda_1$$

$$y = 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2x + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = y - 2x$$

$$\lambda_1 \cdot f(V_1) + \lambda_2 \cdot f(V_2) \Rightarrow x \cdot (3, -1) + (y - 2x) \cdot (1, 2)$$

$$(3x; -x) + (y - 2x; 2y - 4x) = (y + x; 2y - 5x) = f(x, y)$$

- $f: V_1 \rightarrow V_2$ é uma transformação linear

$(v_1, \dots, v_n)$ base de V_1 .

f é completamente determinada pelos valores $f(v_1), \dots, f(v_n)$

- $f: V_1 \rightarrow V_2$ transformações lineares

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 0 \rightarrow 0 \cdot f(0) = 0 \rightarrow f(0) = 0$$

$f: V_1 \rightarrow V_2$ transformações lineares

f não é injetora, $\exists v, w \in V_1, v \neq w : f(v) = f(w)$

$$v - w \neq 0 \rightarrow f(v - w) = f(v) - f(w) = 0$$

Então, f não é injetora $\Leftrightarrow \exists z \in V_1, z \neq 0 : f(z) = 0$
 $f(0) = 0$

* Núcleo de f

$$\text{Ker}(f) = \{z \in V_1 : f(z) = 0\}$$

$$0 \in \text{Ker}(f)$$

f é injetora $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$

$$\text{Ex. 3: } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x; y) = (x+y; x-y)$$

$$\text{Ker } f = \{(x; y) : f(x; y) = 0\}$$

$$x+y=0$$

$$x-y=0$$

$$x=0, y=0 \rightarrow \text{Ker}(f) = \{(0; 0)\}$$

$f: V_1 \rightarrow V_2$ transformação linear

$$\text{Ker}(f) \subset V_1$$

$\text{Ker}(f)$ é um subespaço vetorial de V_1

$$v, w \in \text{Ker}(f), f(v) = f(w) = 0$$

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 \rightarrow v+w \in \text{Ker}(f)$$

$$v \in \text{Ker}(f), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0 = 0 \rightarrow \lambda v \in \text{Ker}(f)$$

$f: V_1 \rightarrow V_2$ transformações lineares.

f é sobrejetora e $\text{Im } f = V_2$

$0 \in \text{Im } f$

$\text{Im } f$ é um subespaço vetorial de V_2

$w_1, w_2 \in \text{Im } f \rightarrow \exists v_1 : f(v_1) = w_1$

$\exists v_2 : f(v_2) = w_2$

$w_1 + w_2 \in \text{Im } f \rightarrow f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$

$w \in \text{Im } f, \lambda w \in \text{Im } f \rightarrow \exists v : f(v) = w$

$f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot w$

$\lambda w \in \text{Im } f$

Ex. 4! $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \rightarrow (x+y, x-y)$

$\text{Ker } f = \{(0, 0)\} \rightarrow f$ é injetora

$v_1 = (1; 0) \rightarrow w_1 = f(v_1) = (1; 1)$

$v_2 = (0; 1) \rightarrow w_2 = f(v_2) = (1; -1)$

$\left. \begin{array}{l} w_1, w_2 \in \text{Im } f \end{array} \right\}$

$\text{Im } f$ é gerado por $w_1, w_2 : w \in \text{Im } f \rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2 : f(v) = w$

$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = w \rightarrow \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) = w$

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = w$

w_1, w_2 não l.i.

supondo que não, $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0, \lambda_1, \lambda_2$ não ambos 0

$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = 0 \rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = 0$

$\text{Ker } f$

/ /

$\lambda \dots V_1, \lambda \dots V_2 = 0 \rightarrow V_1, V_2$ variações lentas $\lambda \rightarrow \lambda_2 \rightarrow 0$

$\dim(\text{Im } f) = 2 \rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}^2$

f injetora e sobrejetora: $(\text{Im } f) \cap \{x+y \mid x+y=0\} = \{0\}$ $\rightarrow$ admit solução quando $(a; b) \in \text{Im } f$

$\text{Im } f = \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}^2 \cap \{x+y \mid x+y=0\} = \{0\}$

O fato de f ser sobrejetora diz que a equação tem solução, o fato de f ser injetora diz que a solução é única

$$(x, x, x+y) \mapsto (x, x)$$