

21/08/2018

Matrizes e operações

$$n, m \geq 1$$

Uma matriz $n \times m$ é uma:

$$\begin{matrix} n \\ \text{linhas} \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{array} \right) \begin{matrix} a_{ij} \in \mathbb{R} \\ \forall i = 1, \dots, n \\ \forall j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

m colunas

Ex:

$$2 \times 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -15 & \frac{1}{4} & e \end{pmatrix}$$

$$4 \times 1: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} n = m \Rightarrow \text{matriz} \\ \text{quadrada} \end{array} \right|$$

Operações

~~matrizes~~ (Vou copiar só o que ainda não vi)

~~matrizes~~ como: ...

Propriedade do soma associativo também vale para matrizes!!!

$$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$$

" Comutativo

$$A+B = B+A$$

∃ elemento neutro A_0

$$A + A_0 = A \quad \forall A \in M_{n \times m}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Existência do oposto:

$$A \in M_{n \times m}$$

∃ $B \in M_{n \times m}$, tal que $A+B=0$

$$B = -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nm} \end{pmatrix}$$

Multiplicação por escalar:

$$\mathbb{R} \times M_{n \times m} \rightarrow M_{n \times m}$$

$(\lambda, A) \rightarrow \lambda \cdot A$, todos os entradas são mult. por λ .

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

Próximo passo!

Conclusão: $M_{n \times m}$ é espaço vetorial

Produto linha por coluna

n, m, k fixados ≥ 1

$$M_{n \times m} \times M_{m \times k} \rightarrow M_{n \times k}$$

$$A = (a_{ij}) \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m \end{array}$$

$$B = (b_{rs}) \quad \begin{array}{l} r=1, \dots, m \\ s=1, \dots, k \end{array}$$

$$A \times B = C$$

$$C = (c_{uv}) \quad \begin{array}{l} u=1, \dots, n \\ v=1, \dots, k \end{array}$$

$$\rightarrow (a_{u1}, a_{u2}, \dots, a_{um})$$

u -ésima linha de A

$$\begin{pmatrix} b_{1v} \\ b_{2v} \\ \vdots \\ b_{mv} \end{pmatrix}$$

v -ésima linha de B

$$\left| \begin{array}{l} c_{uv} = a_{u1}b_{1v} + a_{u2}b_{2v} + \dots + a_{um}b_{mv} \\ = \sum_{l=1}^m a_{ul}b_{lv} \end{array} \right|$$

↙ Perceba, ele explicou de um jeito mais fácil!

Exemplos:

$$\bullet M_{1,1} = \mathbb{R}$$

$$\bullet M_{1,2} \times M_{2,3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (C_1, C_2, C_3)$$

$$A \times B = (4+5 \quad 6+0 \quad 10-10) = (9 \quad 6 \quad 0)$$

:3

Matrizes quadradas:

$$M_{n \times n} \times M_{n \times n} = M_{n \times n} \quad :3$$

Associatividade:

$$A \in M_{n \times m}, B \in M_{m \times k}, C \in M_{k \times l}$$

• $A \times B \in M_{n \times k}$ • $(A \times B) \times C \in M_{n \times l}$

• $B \times C \in M_{m \times l}$ • $A \times (B \times C) \in M_{m \times l}$

$\rightarrow (A \times B) \times C = D = (d_{ij})$ $i=1, \dots, n$
 $j=1, \dots, l$

$d_{ij} = \sum_{s=1}^k (A \times B)_{is} \cdot C_{sj} = \sum_{s=1}^k \left(\sum_{r=1}^m A_{ir} \cdot B_{rs} \right) C_{sj}$
 $= \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^m A_{ir} B_{rs} C_{sj}$

$\rightarrow A \times (B \times C) = E = (e_{ij})$ $i=1, \dots, n$
 $j=1, \dots, l$

$e_{ij} = \sum_{s=1}^m A_{is} (B \times C)_{sj} = \sum_{s=1}^m A_{is} \sum_{r=1}^k B_{sr} C_{rj}$
 $= \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^k A_{is} B_{sr} C_{rj}$

$\Rightarrow$ Produto de linhas por colunas é associativo.

Matrizes quadradas: (Não é comutativa, a não ser $M_{1 \times 1}$!!!)

$M_{n \times n}$ $A \times B$

• $\exists$ In elemento neutro p.l.x

$A \times I_n = I_n \times A = A$

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definição:

$A \in M_{n \times n}$ $\exists ! B \in M_{n \times n}$, tal que

$A \times B = B \times A = I_n$

Uma matriz com pelo menos uma coluna ou/ou uma linha não formada por zeros não é invertível.

Problema:

Determinar quais matrizes $A \in M_{n \times m}$ admitem inversa A^{-1} , e como calcular A^{-1}

Operações elementares com matrizes

$M_{n \times m}$

3 operações elementares

1. Permutar 2 linhas

2. Multiplicar uma linha por uma constante $\neq 0$

3. Somar a uma linha um múltiplo de outro linha

Definição: $A, B \in M_{n \times m}$

$A \sim B$ se A pode ser obtida aplicando um número finito de operações elementares a B .

Ex:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A \sim B$