

Classe Álge Lin

Exercício

30/08/18

Independência linear

V espaço vetorial

$V_1, V_2, V_3, V_4 \in V$

$$0 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 + 0 \cdot V_3 + 0 \cdot V_4 = 0$$

$$V_1 = (1, 1, 0), \quad V_2 = (2, 0, 1), \quad V_3 = (1, -1, 1)$$

$$\begin{array}{ccc} - & + & - \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & +1 & -1 \end{array} \quad V_1 + V_2 - V_3 = (0, 0, 0) \quad \text{--- combinação linear não trivial} = 0$$

- Definição: Um subconjunto $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, é dito linearmente independente se a única combinação linear de seus elementos com resultado 0 é a trivial.

Ex. 1: $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 1, 0); (2, 0, 1); (1, -1, 1)\}$
não é linearmente independente (l.i.)

Ex. 2: $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$

é l.i.

$$a \cdot (1; 0; 0) + b \cdot (0; 1; 0) + c \cdot (0; 0; 1) = (0; 0; 0)$$

$$(a; b; c) = (0; 0; 0)$$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

$$E_{c.3}: V = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(1; 2; 3); (1; 4; 9); (1; 8; 27)\}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot (1; 2; 3) + y \cdot (1; 4; 9) + z \cdot (1; 8; 27) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 8z = 0 \\ 3x + 9y + 27z = 0 \end{cases} \quad (2)^* = (2) - (1) \cdot 2 \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \\ 3x + 9y + 27z = 0 \end{cases}$$

$$(3)^* = (3) - 3 \cdot (1) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \\ 6y + 24z = 0 \end{cases}$$

$$(3)^* = (3) - 3 \cdot (2) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \quad (3)^* = (3) \cdot \frac{1}{6}, \quad (2)^* = (2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad z = 0 \rightarrow y + 3z = 0 \rightarrow y = 0$$

$$z, y = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x = y = z = 0 \rightarrow S \text{ é l.i.}$$

$$E_{c.4}: V = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(1; 2; 1); (2; 4; 2); (5; 10; 5)\}$$

é l.d.

$$V_2 = 2V_1 \rightarrow V_2 - 2V_1 + 0V_3 = 0$$

Ex: $V = P_3(x) = \{ \text{polinômios em } x \text{ de grau } \leq 3 \}$

$$S = \{1, x, x^2, 2+x, 2+x^2\}$$

$$S' = \{1, x, x^2, 2+x+2x^2\}$$

$$P_4 = 2 \cdot P_1 + P_2 + 2 \cdot P_3 \longrightarrow 2 \cdot P_1 + P_2 + 2 \cdot P_3 - P_4 = 0$$

é l.d.

* Propriedades de dependência linear.

1- $S \subset V$ subconjunto finito.

$$0 \in S \longrightarrow S \text{ é l.d.}$$

2- $S = \{v\}, v \neq 0$

S é l.i.

3- $S' = \{v_1, \dots, v_n\}$ é l.d.

Um dos vetores de S deve ser combinação linear dos demais vetores de S .

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ não todos nulos: } \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 = -\lambda_2 \cdot v_2 - \dots - \lambda_n \cdot v_n, \lambda_1 \neq 0$$

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$$

4- $S_1 \subset S_2 \subset V$

Se S_1 é l.d. $\longrightarrow S_2$ é l.d.

5- $S_1 \subset S_2 \subset V$

Se S_2 é l.i. $\longrightarrow S_1$ é l.i.

6- $S' = \{v_1, \dots, v_n\}$ l.d.

/ /

$\exists j \in \{1, \dots, n\} : v_j \text{ é e.l. das outras } v_i$

$$S' = \{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} = S \setminus \{v_j\}$$

$$[S'] \subsetneq [S]$$

$$v \in [S']$$

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_j \cdot v_j + \dots + \lambda_n \cdot v_n, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$v_j = \underbrace{a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{j-1} \cdot v_{j-1} + a_{j+1} \cdot v_{j+1} + \dots + a_n \cdot v_n}_E$$

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_j \cdot E + \dots + \lambda_n \cdot v_n,$$

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_j \cdot (a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{j-1} \cdot v_{j-1} + a_{j+1} \cdot v_{j+1} + \dots + a_n \cdot v_n) + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

$$v = (\lambda_1 + a_1 \cdot \lambda_j) \cdot v_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda_j \cdot a_n) \cdot v_n$$

- Definição: Uma base de V é um subconjunto $S \subset V$ com as seguintes propriedades:

• S é l.i.

$$[S] = V$$

* Teorema: Qualquer espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.

- Demonstração:

$\exists G \subset V$ subconjunto finito: $[G] = V$

$$G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$