

Exercícios

$$1. \mathbb{R}^3 = V$$

$$S \subseteq \mathbb{R}^3, T \subseteq \mathbb{R}^3, U \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$S = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)]$$

$$T = [(0, 1, -1), (1, 2, 1)]$$

$$U = \{(x, y, z) : x + y = 4x - z = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z) : 3x - y - z = 0\}$$

Calcular as dimensões de $S, T, U, V, S+T, S \cap T, T+V, T \cap U$.

U : é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelas soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sistema linear homogêneo}$$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) \\ (x_2, y_2, z_2) \end{aligned} \text{ são soluções}$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \text{ é solução!}$$

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) \text{ e } \lambda(x_2, y_2, z_2) \text{ são soluções}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_1 + y_1 &= 0 \\ x_2 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x_1 + y_1)}_0 + \underbrace{(x_2 + y_2)}_0 = 0$$

Portanto: 3

As soluções de um sistema linear homogêneo em $\mathbb{R}^n$ formam um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

$$\dim(S), \dim(T) \leq 2$$

$$T: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz escalonada} \Rightarrow \text{L.I.} \\ \therefore \dim T = 2$$

$$S: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz escalonada} \Rightarrow \text{L.I.} \\ \therefore \dim S = 2$$

$$U: \begin{cases} x+y=0 \\ 4x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -4y-z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 5t \\ y = -\frac{1}{4}5 \\ x = \frac{1}{4}5 \end{cases}$$

$$S: \left\{ \frac{1}{4}5, -\frac{1}{4}5, 5 \right\} \Rightarrow$$

$$S: \left\{ \frac{1}{4}5, -\frac{1}{4}5, 1 \right\} \Rightarrow$$

$$S: \lambda \left\{ \frac{1}{4}5, -\frac{1}{4}5, 1 \right\}, \lambda \in \mathbb{R} \\ \dim U = 1$$

$$V: 3x - y - z = 0$$

$$\begin{aligned} y &= 5 & (1/3, 1, 0) &\sim (1, 3, 0) \\ z &= t & & \\ x &= \frac{1}{3}(5+t) & (1/3, 0, 1) &\sim (1, 0, 3) \end{aligned}$$

$$\dim T = 2$$

A dimensão de um espaço está relacionada ao seu nº de parâmetros livres!!!

$$S = T$$

$$(0, 1, -1) \in S?$$

$$(0, 1, -1) = \alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 1, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1/3 \\ \alpha = -2/3 \end{cases}$$

$$\therefore (0, 1, -1) \in S \quad \text{Solução! : 3}$$

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$$

$$\Rightarrow 3 = 2 + 2 - \dim(S \cap T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim(S \cap T) = 1 \quad |S \cap T = \mathbb{R}(0, 1, -1)|$$

$$2 \leq \dim(T+U) \leq 3$$

$$(1, -1, 4) \in T?$$

$$(1, -1, 4) = \alpha(0, 1, -1) + \beta(1, 2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = -1 \Rightarrow \alpha = -3 \\ -\alpha + \beta = 4 \end{cases} \checkmark$$

$$\therefore (1, -1, 4) \in T \Rightarrow U \subset T$$

$$\therefore \dim(T+U) = \dim T = 2$$

$$U \cup U = U$$

$$\Rightarrow T \cap U = U \therefore \dim(T \cap U) = 1$$

$$2 \leq \dim(S+U) \leq 3$$

$$(1, -1, 2) \notin U$$

$$\hookrightarrow \text{não é solução de } 3x - y - 3z = 0$$

$$\therefore \dim(S+U) = 3$$

$$\dim(S \cap U) = 1$$

$$S \cap U = ?$$

Linear comb. linear de
 $(1, -1, 2)$ e $(2, 1, 1)$:

$$\alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 1, 1) =$$

$$= (\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta, 2\alpha + \beta) =$$

$$= 3(\alpha + 2\beta) - (\beta - 2) - (2\alpha + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 1, \alpha = -2 \quad \text{4 equações de } U!$$

$$(0, 3, -3) \Rightarrow S \cap U = \mathbb{R}(0, 1, -1)$$

Exercício:

$$V = \mathbb{R}^4 \quad (x, y, z, t)$$

$$S \subset V \rightarrow \text{soluções de}$$

$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3y + 2z + 3t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = t \\ 3y + 5t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = t = s \\ y = -\frac{5s}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3y + 5s = 0 \Rightarrow y = -\frac{5s}{3}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5s}{3} + 2s \Rightarrow x = \frac{1s}{3}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}s, -\frac{5}{3}s, s, s \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = s \left\{ \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1, 1 \right) \right\} \quad p/s=1$$

SCR uma base de S!