

Propriedades de operações e vetores

Def: Se chamamos espaço vetorial $\mathcal{R}^n$ um conjunto $V \neq \emptyset$ com 2 operações

$$+: (u, v) \in V \times V \mapsto u + v \in V$$

$$\cdot: (\alpha, u) \in \mathbb{R} \times V \mapsto \alpha \cdot u \in V, \text{ tais que}$$

1) $+$ é comutativa $(\forall u, v \in V: u + v = v + u)$

2) $+$ é associativa $(\forall u, v, w \in V: (u + v) + w = u + (v + w))$

3) $+$ possui elemento neutro $(\exists 0 \in V: \forall u \in V: 0 + u = u + 0 = u)$

4) Existência do elemento oposto
 $(\forall u \in V \exists -u, \text{ t.q. } u + (-u) = 0)$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in V: (\alpha \cdot \beta)u = \alpha(\beta u)$

7) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V: \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

8) $\forall u \in V: 1 \cdot u = u$

* (As mesmas propriedades valem para complexos).

Matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ matriz (real) 2×2

$$V = \{ \text{todas as matrizes } 2 \times 2 \} = M_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$+: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$7): \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \}$$

$$= \{ (2\pi, \pi, 3\pi) : \pi \in \mathbb{R} \}$$

$\downarrow$
subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$

Def: Se V é esp. vetorial, se chama subespaço vetorial de V um conjunto $W \subset V$, t.q. W com as operações de V é espaço vetorial.

Um esp. vetorial V
tem sempre 2
subespaços:
→ V e $\{0\}$ a homôgenea

Subespaços vetoriais
sempre passam
pelo origem!!!