

Exercícios Vetoriais

28.08.2018

"Não vou copiar, se eles já o definiram com isto para umas 3 vezes!"

R. Alexandre Nunes, Melina

$$(1) V = P(x)$$

$$W = P_3(x) = \{ \text{polin. em } x \text{ de grau } \leq 3 \}$$

$$1. 0 \in W$$

$$2. p, q \in P_3(x), p+q \in P_3(x)$$

$$3. p \in P_3(x), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot p \in P_3(x)$$

$\rightarrow W$ é um subespaço vetorial!

$$(2) V = \mathbb{R}^5$$

$$W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \}$$

$$(1, 2, -3, 0, 1) \notin W$$

$$(-2, 3, 1, 0, 2) \in W$$

$$(iii) (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5)$$

$$\lambda x_1 + 2\lambda x_3 - \lambda x_4 = \lambda(x_1 + 2x_3 - x_4) = 0$$

$$i) (0, 0, 0, 0, 0) \in W$$

$$ii) (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W$$

$$(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5') \in W$$

$$(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3', x_4 + x_4', x_5 + x_5')$$

$$x_1 + x_1' + 2x_3 + 2x_3' - x_4 - x_4' = 0$$

Obs:

1. V é esp. vet. e $W \subset V$ é subespaço
 $\Rightarrow W$ é um esp. vetorial.

2. V é esp. vet., $W_1, W_2 \subset V$ não subesp. vet.

$W_1 \cap W_2$ é um esp. vet. de V .

Exemplo:

$$V = \mathbb{R}^5$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_5 = 0\}$$

$$W_1 \cap W_2$$

$$W_1 = \{(x_1, \dots, x_5) \mid x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

$$W_2 = \{(x_1, \dots, x_5) \mid x_2 + x_5 = 0\}$$

$$W = W_1 \cap W_2 \quad \begin{matrix} (2, 0, -1, 0, 1) \in W_1 + \\ (1, 1, 0, 0, -1) \in W_2 \end{matrix}$$

(3) $W_1, W_2 \subset V$ subespaços

$$(3, 1, -1, 0, 1) \in W_1 \cup W_2$$

Intersecção do certo,
união não!

Combinação linear de vetores

V : esp. vetorial

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n \in V$$

C.L. de $v_1, \dots, v_n$ / coef.
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Exemplo:

$$V = \mathbb{R}^3$$

$\hookrightarrow$ C.L. não trivial

$$v_1 = (1, 0, 1)$$

$$v_2 = (2, 0, 0)$$

$$v_3 = (0, 0, 3)$$

$$v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = (0, 0, 0)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

~~Exemplo~~

V : esp. vetorial

$S \subset V$ subconjunto

$[S] = \{\text{Todos os comb. lineares de elementos de } S\}$

$$(1) S = \{0\}, [S] = \{0\}$$

$$(2) V = \mathbb{R}^3$$

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$[S] = \{\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$S \subset [S],$$

$\forall S \subset V \Rightarrow [S]$ é um subespaço vetorial de V .

$$(i) 0 \in [S]$$

$$(ii) v_1, v_2 \in [S], v_1 + v_2 \in [S]$$

$$(iii) v \in [S], \lambda \in \mathbb{R}, \lambda v \in [S]$$

Obs: $[S]$ é o menor subespaço vetorial de V que contém S .

Se $W \subset V$ é um subespaço que contém $S \rightarrow [S] \subset W$

Def: $[S]$ é chamado o subespaço gerado por S .

Soma de subespaços:

V : espaço vetorial

$W_1, W_2 \subset V$ subespaços de V .

$[W_1 \cup W_2] \rightarrow$ menor subesp. de V que contém W_1 e W_2 . = soma de W_1 e $W_2 = W_1 + W_2$

Exemplo:

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W_1 = \{(a, -a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, b, 2b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

$$(a, -a, 0) + (a', -a', 0) = (a+a', -(a+a'), 0)$$

$$\lambda(a, -a, 0) = (\lambda a, -\lambda a, 0) \in W_1$$

$$W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \quad \beta_1, \dots, \beta_s$$

$$\uparrow$$

$$W_1$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r$$

$$\uparrow$$

$$W_2$$

$$\mu_1, \dots, \mu_s$$

$$\underbrace{\alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_n \alpha_n}_{\bar{\alpha} \in W_1} + \underbrace{\beta_1 \beta_1 + \dots + \beta_s \beta_s}_{\bar{\beta} \in W_2}$$

$$\bar{\alpha} \in W_1, \quad \bar{\alpha} + \bar{\beta}:$$

$$\beta \in W_2 \quad W_1 + W_2 = \{(a, b-a, 2b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, 2y+2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\{(a, b-a, 2b) : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \{(x, y, 2y+2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Def: Um esp. vetorial V é dito "finitamente gerado" se $\exists S \subset V$ finito, t.q. $[S] = V$.

Ex:

$$(1) V = \mathbb{R}^3$$

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$[S] = \mathbb{R}^3$$

$$(2) V = P(x) \rightarrow \bar{n} \text{ é finitamente gerado.}$$

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

$$(3) P_{100}(x) = \{p \in P(x) \mid \text{grau de } p \leq 100\}$$

$$S' = \{1, x, x^2, \dots, x^{100}\}$$

↑
finitamente gerado.

$$[S] = P_{100}(x)$$

Obs: $W_1, W_2 \subset V$ "subespaços"

$$W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2] =$$

$$= \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$$