Provinha 2
Cálculo II - IAG

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Justifique as respostas. Esta prova vale 10.5 pt.

Exercício 1 (2 pt)**.** Considere uma partícula se movendo no espaço e seja $\vec{s} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ a função que fornece a sua posição em função do tempo t. Se $\vec{s}(t)$ é, para todo $t > 0$, perpendicular à velocidade $\vec{v}(t)$ da partícula, mostre que o ângulo entre $\vec{s}(t)$ e o vetor aceleração $\vec{a}(t)$ não pode ser agudo, qualquer que seja $t > 0$.

Observação: Lembre-se de que, por definição,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt}(t),$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t).$$

Estamos supondo nessa questão que a função $\vec{s}$ é diferenciável pelo menos até a 2ª ordem em $(0, \infty)$.

Exercício 2 (2 pt)**.** Deseja-se prender uma corda nos pontos A e B, de coordenadas cartesianas $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, respectivamente, de modo que não haja sobras (ver figura abaixo). Sabendo-se que uma corda suspensa nessa situação adquire um formato que obedece à função da catenária,

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e + e^{-1}),$$

calcule o seu comprimento.

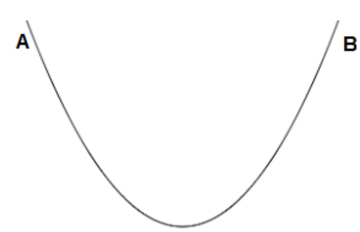

Figura 1: representação esquemática do Exercício 2.

Exercício 3 (3 pt)**.** Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x - y$ e

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}.$$

Raciocinando *geometricamente* (uma solução utilizando multiplicadores de Lagrange não será aceita), determine o valor máximo e o valor mínimo de f em A.

Exercício 4 (3.5 pt)**. Teorema do Trabalho-Energia Cinética**

Sob ação de uma força resultante $\vec{F}$, uma partícula de massa m desloca-se de A até B, sendo sua trajetória descrita pela curva $s : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$, com $s(t_1) = A$ e $s(t_2) = B$. O trabalho total que a força $\vec{F}$ realiza sobre a partícula ao longo da trajetória é dado por

$$W_{TOTAL} =: \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) \ \mathrm{d}t.$$

Nessas condições, se v_A e v_B denotam os módulos das velocidades da partícula nos instantes t_1 e t_2, respectivamente, mostre que

$$W_{TOTAL} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Observação: Lembre-se de que, pela segunda Lei de Newton,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Todas as funções desse exercício são assumidas infinitamente diferenciáveis.