Provinha 4

Cálculo II - IAG

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Justifique as respostas.

Exercício 1 (3 pt)**.** Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável.

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 + 2x + y$.

a) Calcule o gradiente de f em um ponto (x,y) de $\mathbb{R}^2$ e verifique que ele nunca se anula. (0.5 pt)

b) Para $c \in \mathbb{R}$, considere a curva de nível $f(x,y) = c$, e (x_0, y_0) um ponto que pertence a ela. Usando o Teorema das Funções Implícitas, conclua que existem intervalos abertos I e J, com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$ tais que, para cada $t \in I$, existe um único $y(t) \in J$ com $f(t, y(t)) = c$. Exprima $y'(t)$, para $t \in I$. (0.5 pt)

c) Conclua que as curvas $\gamma(t) = (t, y(t))$ nas condições acima são segmentos de reta, de coeficiente angular -2.
(0.5 pt)

d) Verifique que a função f acima satisfaz a equação de derivadas parciais

$$-\frac{\partial g}{\partial x} + 2\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \qquad (*)$$

(0.5 pt)

e) Prove que se uma função diferenciável g satisfaz (*), então existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $g(x, y) = \phi(2x + y)$. (1 pt)

Sugestão: estude o Exemplo 2 da seção 13.1 do Guidorizzi.

Exercício 3 (2 pt)**.** Determine todas as retas que sejam tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 5$ e paralelas à reta $4x - 2y = 1$.

Exercício 4 (2 pt)**.** A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na interseção das superfícies $2x^2 - y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 + 2y^2 - z = 1$. Suponha $\gamma(t_0) = (1, 0, 0)$ e $\gamma'(t_0) \neq (0, 0, 0)$, para algum t_0. Determine a reta tangente a γ no ponto $(1, 0, 0)$.