

## MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

IAG

Prova 3 - 29/11/2016

| Questão | Nota |
|---------|------|
| 1       |      |
| 2       |      |
| 3       |      |
| 4       |      |
| Total   |      |

Nome \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura \_\_\_\_\_

1. (2,0) Seja  $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3$ .

- (a) Determine a equação da reta tangente à curva de nível que contém o ponto  $(-1, 2)$  no ponto  $(-1, 2)$ .
- (b) Em qual direção a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(-1, 2)$  é máxima? Qual é o valor dessa derivada direcional?
- (c) Em qual direção a derivada direcional de  $f$  no ponto  $(-1, 2)$  é nula?

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 6xy, 3x^2 + 3y^2)$$

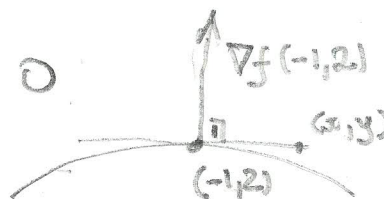
$$\nabla f(-1, 2) = (-9, 15)$$

$$(a) \quad \langle (-9, 15), (x+1, y-2) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow -9(x+1) + 15(y-2) = 0$$

$$-9x + 15y - 39 = 0$$

$$\underline{-3x + 5y = 13}$$



(b) A derivada direcional  $D_{\vec{u}} f(-1, 2)$  é máxima quando  $\vec{u}$  é o versor do vetor gradiente de  $f$  em  $(-1, 2)$ .

$$\vec{u} = \frac{(-9, 15)}{\|(-9, 15)\|} = \frac{3(-3, 5)}{3\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{(-3, 5)}{\sqrt{34}}$$

O valor da derivada direcional máxima em  $(-1, 2)$

$$\text{é } \|\nabla f(-1, 2)\| = 3\sqrt{34}$$

(c) A derivada é nula se a direção  $\vec{u} \perp \nabla f(-1, 2)$ .

$$\vec{u} = \frac{(5, 3)}{\sqrt{34}} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \frac{(-5, -3)}{\sqrt{34}}$$

2. (2,0) Determine a equação da reta tangente à intersecção das superfícies

$$x = yz \text{ e } x^2 + y^2 - z^2 = 7$$

no ponto  $(2, 2, 1)$ .

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x - yz}_{f(x, y, z)} = 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2 + y^2 - z^2}_{g(x, y, z)} = 7\}$$

$$(2, 2, 1) \in S_1 \cap S_2$$

Seja  $\vec{v}$  o vetor diretor da reta tangente à curva  $S_1 \cap S_2$  em  $(2, 2, 1)$ . Então

$$\vec{v} \perp \nabla f(2, 2, 1) \quad \text{e} \quad \vec{v} \perp \nabla g(2, 2, 1),$$

$$\text{Logo } \vec{v} \parallel \nabla f(2, 2, 1) \times \nabla g(2, 2, 1)$$

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -z, -y) \Rightarrow \nabla f(2, 2, 1) = (1, -1, -2)$$

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -2z) \Rightarrow \nabla g(2, 2, 1) = (4, 4, -2).$$

$$\text{Assim } \vec{v} \parallel \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Assim a equação da reta tangente a  $S_1 \cap S_2$  em  $(2, 2, 1)$  é

$$X = (2, 2, 1) + \lambda (5, -3, 4), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3. (3,0) Seja  $f(x, y) = y^3 - x^2y + x^2 + 3y^2$ .

(a) Determine e classifique os pontos críticos de  $f$ .

(b) Ache os pontos de máximo e de mínimo de  $f$  no conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}.$$

$$(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy + 2x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - x^2 + 6y = 0 \quad (2)$$

$$\text{De (1)} \quad -2x(y - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 1$$

$$\boxed{x = 0} \text{ em (2)} \Rightarrow$$

$$3y^2 + 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = -2.$$

$$(0, 0) \text{ e } (0, -2)$$

$$\boxed{y = 1} \text{ em (2)}$$

$$3 - x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

pts críticos

$$(\pm 3, 1)$$

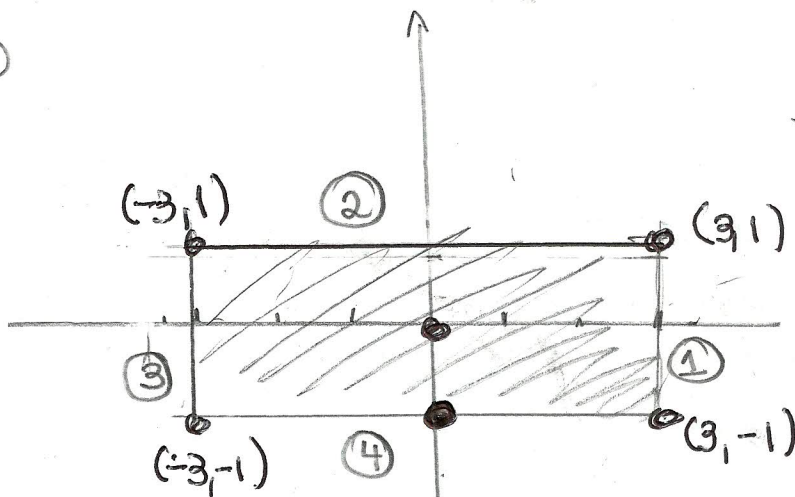
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y + 2 = -2(y - 1)$$

$$H(x, y) = \det \begin{bmatrix} -2(y-1) & -2x \\ -2x & 6y+6 \end{bmatrix} = -12(y^2-1) - 4x^2$$

$$= -4(3(y^2-1) + x^2)$$

| PONTO CRÍTICO<br>( $x_0, y_0$ ) | $H(x_0, y_0)$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ | CONCLUSÃO    |
|---------------------------------|---------------|-----------------------------------------------|--------------|
| (0, 0)                          | 4 > 0         | 2 > 0                                         | MÍNIMO LOCAL |
| (0, -2)                         | -36           | —                                             | SELA         |
| (3, 1)                          | -36           | —                                             | SELA         |
| (-3, 1)                         | -36           | —                                             | SELA         |

(b)



| CANDIDATO<br>(x <sub>0</sub> , y <sub>0</sub> ) | f(x <sub>0</sub> , y <sub>0</sub> ) |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------|
| (0, 0)                                          | 0 MÍNIMO                            |
| (x, 1)<br>x ∈ [-3, 3]                           | 4                                   |
| (0, -1)                                         | 2                                   |
| (-3, -1)                                        | 20                                  |
| (3, -1)                                         | 20 MÁXIMO                           |

$$K = [-3, 3] \times [-1, 1]$$

$$\text{int } K = ]-3, 3[ \times ]-1, 1[$$

$$\text{fr } K = \{(3, y), -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1), -3 \leq x \leq 3\} \cup \{(-3, y), y \in [-1, 1]\} \\ \cup \{(x, -1), x \in [-3, 3]\}.$$

candidatos a pontos de máx e mín de  $f$  em  $K$

- pontos críticos de  $f$  em  $\text{int}(K)$ : (0, 0)  
só ↑

- Analisar  $f$  na  $\text{fr}(K)$

$$\textcircled{1} f_1(y) = f(3, y) = y^3 - 9y + 9 + 3y^2, \quad y \in [-1, 1]$$

candidatos:  $y = -1$  e  $y = 1$

pontos críticos de  $f_1$  em  $] -1, 1 [$

$$f_1'(y) = 3y^2 + 6y - 9 = 3(y^2 + 2y - 3) = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}$$

Não há pto críticos em  $] -1, 1 [$

$$(3, -1) \text{ e } (3, 1)$$

$$\textcircled{2} f_2(x) = f(x, 1) = 4 \quad \text{todos os pontos} \\ (x, 1), x \in [-3, 3] \text{ são candidatos}$$

$$\textcircled{3} f_3(y) = f(-3, y) = f(3, y) = y^3 + 3y^2 - 9y + 9$$

Agora, apenas os pto  $(-3, -1)$  e  $(-3, 1)$

$$\textcircled{4} f_4(x) = f(x, -1) = 2x^2 + 2, \quad x \in [-3, 3]$$

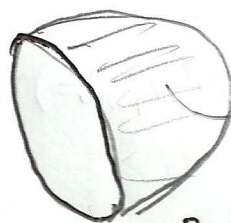
pto crítico de  $f_4(x)$  em  $] -3, 3 [ \Rightarrow x = 0.$

$$x = -3 \text{ e } x = 3$$

Candidatos  $(-3, -1), (3, -1), (0, -1)$

4. (3,0) Determine os valores máximo e mínimo da função  $f(x, y, z) = xy + z$  sujeita às condições

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \text{ e } x + y \geq 2.$$



$$g(x, y, z)$$

$$x + y \geq 2$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$$

$$\text{e } x + y = 2$$

$$(1) \quad x + y > 2 \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y > 2\}$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$$

$$C = \{(x, y, z) \in A \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 4\}$$

Os candidatos a pontos de máx e mín de  $f$  em  $C$  (se existirem) estão entre os pontos  $(x, y, z) \in C$  tais que  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  com

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ y & x & 1 \\ x & y & 2z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 0 & (1) \\ 2xz - y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1)  $y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$

$y = -x \Rightarrow x + y = 0 < 2$ ,  
então não está em  $C$

$$\boxed{y = x}$$

(1) em (2)  $2xz - x = 0$

$$x(2z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } \boxed{z = 1/2}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$  e  $x + y = 0 < 2$ , não está em  $C$

Logo  $\boxed{z = 1/2}$

$$y = x \text{ e } z = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 4$$

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$2x^2 = 7/2$$

$$x^2 = 7/4$$

$$x = \pm \sqrt{7}/2$$

mas serve pois  $-\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} = -\sqrt{7} < 2$

ÚNICO CANDIDATO

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \text{ e } x + y = 2\}$$

Os pontos de máx. e mín. de  $f$  em  $C$  estão entre os pontos  $(x, y, z) \in C$  tais que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ com } \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z).$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2x & 2y & 4z \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$2xz - y - 1(2yz - x) = 0$$

$$(x - y) + 2z(x - y) = 0$$

$$(x - y)(2z + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = y} \text{ ou } \boxed{z = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{x = y} \text{ e } x + y = 2 \Rightarrow x = y = 1$$

$$2 + 2z^2 = 4 \quad 2z^2 = 2 \quad z = \pm 1$$

$$\boxed{(1, 1, \pm 1)}$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}}$$

$$x + y = 2 \quad y = 2 - x$$

$$x^2 + (2 - x)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 + \frac{1}{2} = 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{4}$$

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)} \text{ e } \boxed{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

| CANDIDATO<br>$(x_0, y_0, z_0)$                                              | $f(x_0, y_0, z_0)$                               |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$          | $\frac{7}{4} + \frac{2}{4} = \frac{9}{4}$ MÁXIMO |
| $(1, 1, 1)$                                                                 | 2                                                |
| $(1, 1, -1)$                                                                | 0                                                |
| $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ | $1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$   |
| $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ | $1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$   |

} MÍNIMO