MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

IAG

Prova 2 - 18/10/2016

Nome_____

Número USP:_____

Assinatura_____

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

1. **(2,0)** Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2+3x^2y}{4x^4+3y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^4}\,\mathrm{sen}(x^4+y^2)$

(a) $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{2y^2+3x^2y}{4x^4+3y^2}}_{f(x,y)}$, pois se $\gamma_1(t)=(0,t)$, então $\gamma_1(0)=(0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{2t^2}{3t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = L_1$$

Se $\gamma_2(t)=(t,t^2)$, $\gamma_2(0)=(0,0)$, então $f(\gamma_2(t)) = \dfrac{2t^4+3t^2t^2}{4t^4+3t^4} = \dfrac{5}{7}$ $\forall t\neq 0$

Logo $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{5}{7} = \frac{5}{7} = L_2$. Como $L_1 \neq L_2$,

$\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2+3x^2y}{4x^4+3y^2}$.

(b) $$\frac{y^3}{x^2+y^4}\,\mathrm{sen}(x^4+y^2)\cdot\frac{(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)} = \frac{y^3(x^4+y^2)}{x^2+y^4}\cdot\frac{\mathrm{sen}(x^4+y^2)}{x^4+y^2}$$

$$= \frac{y^3}{x^2+y^4}\,\mathrm{sen}(x^4+y^2) \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

Logo $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^4}\,\mathrm{sen}(x^4+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\underbrace{\cancel{y^3x^2}\,\frac{x^2}{x^2+y^4}}_{\to 0} + \underbrace{\cancel{y}\cdot\frac{y^4}{x^2+y^4}}_{\to 0}\right]\underbrace{\frac{\mathrm{sen}(x^4+y^2)}{x^4+y^2}}_{(*)}$$

limitada

lim.

$\to 0$ $\to 0$ $\to 1$

$= 0 \cdot 1 = 0.$

(*) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x^4+y^2)}{x^4+y^2} \underset{\substack{u=x^4+y^2\\(x,y)\to(0,0)\Rightarrow u\to 0}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,u}{u} = 1.$$

3. **(2,0)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f(t^3 - 2t, 2t^4 - t^2) = t^6 - 2t^2 \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

(a) Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$, calcule $\nabla f(-1,1)$.

(b) Determine $f(-1,1)$ e a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1,1,f(-1,1))$

(a) Sejam $x = t^3 - 2t$, $y = 2t^4 - t^2$

Pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dt} f(\underbrace{t^3-2t}_{x}, \underbrace{2t^4-t^2}_{y}) = \frac{d}{dt}(t^6 - 2t^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(3t^2-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(8t^3-2t) = 6t^5 - 4t$$

Se $t = 1$, $(x,y) = (-1,1)$.

Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) \cdot 6 = 6 - 4$

Como, por hipótese $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$,

temos que

$$7\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 2/7.$$

Logo $\nabla f(-1,1) = (2/7, 2/7)$.

(b) $t = 1 \Rightarrow (x,y) = (-1,1)$

$f(-1,1) = 1 - 2 = -1$ (por $*$)

Eq. do plano tangente

$$z = -1 + \frac{2}{7}(x+1) + \frac{2}{7}(y-1).$$

4. **(2,5)** Seja $f(x,y) = \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (0,0)$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(c) Verifique que a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.

(d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Por quê?

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2x$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0).$$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} =$

$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\cos(x^{2/3}) - 1}{x^{2/3} \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3}}\right] \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{L'H}{=}}$

$\lim_{x\to 0} -\operatorname{sen}(x^{2/3}) \cdot \frac{x}{\frac{2}{3}x^{-1/3}}$

$\lim_{x\to 0} -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x^{1/3}} \cdot \frac{x}{x^{1/3}}$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x^{2/3}} \cdot x^{1/3} = 0.1 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

(c) Temos que mostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2+y^2}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2+y^2}} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\frac{x^2}{x^2+y^2}$ lim.

$u = \sqrt[3]{x^2+y^2}$, $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow u \to 0$

(d) A função f é simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$). Assim, de modo "idêntico" (trocando x por y) temos que $\partial f/\partial y$ também é contínua em $(0,0)$. Logo f é diferenciável em $(0,0)$.