

Listinha Tópico 2 - Pt 1

1)

- Exercício Encontre o conjunto dos pontos de acumulação e dos pontos isolados de
 - ▶ $\Omega = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
 - ▶ $\Omega = \{0 < \arg z < \pi : n \in \mathbb{N}\}$.

2)

- Exercício Usando a definição prove que
$$L = \lim_{z \rightarrow a} f(z) \Leftrightarrow \lim_{|z-a| \rightarrow 0} |f(z) - f(a)| = 0.$$

3) (aula 2.4)

- Exercício Prove usando a definição que
$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{|z-a| \rightarrow 0} |f(z)| = +\infty.$$

4) (aula 2.4)

- Exercício Prove que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L \Leftrightarrow \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z) - L| = 0$

5) (aula 2.5)

- Exercício
 - ▶ Prove que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^n} = \infty$ se $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^n} = 0$, se $n \in \mathbb{Z}^-$.
 - ▶ Prove que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} = 0$ se $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} = \infty$, se $n \in \mathbb{Z}^-$.

6) (aula 2.5)

- ★Exercício Se $|f(z)| \leq C \forall z \in \Omega$ e $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$, prove que
$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) f(z) = 0.$$

7) (aula 2.5)

- ★Exercícios Calcule os limites se existirem. Se não existir justifique

- | | |
|---|---|
| ▶ $\lim_{z \rightarrow 0} e^{i \operatorname{Re} z}$ | ▶ $\lim_{z \rightarrow -1} \ln z$ |
| ▶ $\lim_{z \rightarrow 2+2i} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}{ z ^2 - 8}$ | ▶ $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \ln z$ |
| ▶ $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{z^2+1}$ | ▶ $\lim_{z \rightarrow 0} z e^{\frac{1}{z}}$ |
| ▶ $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^3-i}{z^2+1}$ | ▶ $\lim_{z \rightarrow i} \frac{2 \arg z - \pi}{z^2+1}$ |
| ▶ $\lim_{z \rightarrow 1+i} \ln z$ | ▶ $\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \arg z$ |
| ▶ $\lim_{z \rightarrow -1} \ln z$ | ▶ $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{iy}{x^2+y^2}} \cdot ?$ |

8) (aula 2.7)

- ★Exercício Se $p(z)$ e $q(z)$ são polinômios prove que
$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) / q(z) = 0 \text{ se } \deg(q) > \deg(p), \lim_{z \rightarrow \infty} p(z) / q(z) = \infty \text{ se } \deg(p) > \deg(q). \text{ A que sera igual o limite se } \deg(p) = \deg(q). ?$$

9) (aula 2.7)

- ★ *Exercício* Seja Ω um conjunto e $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
 - ▶ Se a um ponto de acumulação de Ω e $f(z) \neq 0$ para $z \neq a$, então $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} 1/f(z) = \infty$
 - ▶ Se 0 e ∞ são pontos de acumulação de Ω então $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = L \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{z}\right) = L$

10) (aula 2.10)

- *Exercício* Prove que $f(z) = \bar{z}$ é contínua

11) (aula 2.10)

- *Exercício* Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é dita lipchitziana se existir uma constante $K \geq 0$ tal que $|f(z) - f(w)| \leq K|z - w| \forall w, z \in \Omega$. Prove que uma função lipchitziana é contínua

12) (aula 2.10)

- *Exercício* Prove que $f(z) = z^2$ é lipchitziana em qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ limitado.

13) (aula 2.10)

- *Exercício* Encontre a imagem do conjunto dado pela função $f(z) = e^z$

$$L = \left\{ z : \arg z = \frac{\pi}{4} \right\},$$

$$A = \{ z : \operatorname{Re} z = 2 \}$$

14) (aula 2.10)

- *Exercício* Encontre a imagem do conjunto $\{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ pela função $f(z) = e^{1/z}$.

15) (aula 2.10)

- *Exercício* Encontre o domínio das seguintes funções. Em que subconjunto do domínio são contínuas?

▶ $f(z) = \ln(z - i)$

▶ $f(z) = \ln(iz)$

▶ $f(z) = \ln\left(\frac{1}{z}\right)$

▶ $f(z) = \ln\left(i - \frac{1}{z}\right)$