Listinha Tópico 2 - Pt 2

1) (aula 2.14)
   - *Exercício* Prove que toda função derivavle é contínua
2) (aula 2.14)
   - ★*Exercício* Prove que se $g : \Omega \to \mathbb{C}$ é contínua em $z = a$ com $g(a) \neq 0$. Então existe uma constante $m > 0$ e um disco $D(a, r)$ tal que $|g(z)| > m$ para todo $z \in \Omega \cap D(a, r)$.
3) (aula 2.14)
   - ★*Exercício* Prove as propriedade $(1/g)'(z) = -g'(z)/g^2(z)$. Use o exercício anterior e as propriedades da função ϕ_g.
4) (aula 2.14)
   - ★*Exercício* Seja $f(z) = (z - z_1)^{n_1} \ldots\ldots (z - z_k)^{n_k}$ onde $z_1, z_2, .., z_k$ são constantes e $n_j \in N$ para todo $j = 1, 2.., k$. Encontre $\frac{f'(z)}{f(z)}$ e simplifique.
5) (aula 2.14)
   - *Exercício* Se $\alpha(t) = e^{it}$ $t \in \mathbb{R}$, calcule $\alpha'(t)$.
6) (aula 2.14)
   - *Exercício* Se $f'(1 + i) = i$ e $\beta(t) = t + i$, calcule $(f \circ \beta)'(1)$
7) (aula 2.14)
   - ★*Exercício* Sabemos que $f(z) = \ln z$ não é contínua em $z \in \mathbb{R}^-$. Portanto não é derivável em estes pontos. Considere $\alpha(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
     - É $f \circ \alpha$ contínua em $t = \pi$?
     - É $f \circ \alpha$ derivavel em $t = \pi$?.
8) (aula 2.17)
   - ★*Exercício* Em que pontos f derivavel? em que pontos é analítica? $(z = x + iy)$
     - $f(z) = x^2$
     - $f(z) = z|z|$
     - $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$
     - $f(z) = \sqrt{|z|}$
9) (aula 2.19)
   - ★*Exercícios*
     - (i) Prove que $f'(z) = 0$ em $D(a, R)$ então $f(z)$ é constante
     - (ii) Prove que se f é diferenciavel em $D(a, R)$ e $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo z então $f(z)$ é constante.
     - (iii) Prove que f é diferenciavel em $D(a, R)$ e $|f(z)| = C$ é constante, então f é constante

10) (aula 2.19)

- *Exercício* Suponha que $f = u + iv$ é derivavel em todos pontos do aberto $\Omega \subset C$. Prove que a parte real e u e aparte imaginaria v satisfazem a equação do potencial $w_{xx} + w_{yy} = 0$

11) (aula 2.19)

- *Exercício* Verifique se $f(z) = z^3$, então a forma polar de f vem dada por $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ onde $v(r,\theta) = r^3 \cos 3\theta$, e $u(r,\theta) = r^3 \sin 3\theta$.

12) (aula 2.19)

- *Exercício* Suponha que $z = re^{i\theta}$, prove que se $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ é derivável em todo ponto do aberto $\Omega \subset C$ então $ru_r = v_\theta$ e $u_\theta = -rv_r$. Neste caso $f'\left(re^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}\frac{d}{dr}f\left(re^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}\left(u_r + iv_r\right)$.

13) (aula 2.20)

- *Exercício* Prove que $f(z) = z^3$ é injetora em $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right]$. Encontre a função inversa e a sua derivada.

14) (aula 2.20)

- *Exercício* Por um exercício é possivel calcular derivadas usando coordenadas polares. Encontre a derivada da inversa de $f(z) = z^2$ e $f(z) = z^3$ usando este exercício,