Funções de 2 variáveis: Limites e Continuidade

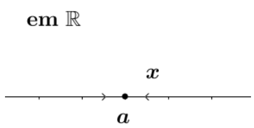
Considere a função de duas variáveis $f(x, y)$. Escrevemos:

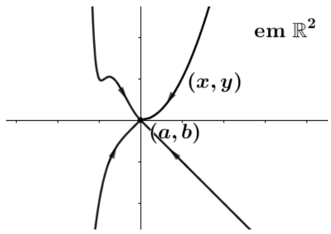
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L}$$

quando temos que, se $(x, y) \to (a, b)$ então $f(x, y) \to L$, isto é,

$$\text{se} \quad ||(x,y) - (a,b)|| \to 0 \quad \text{então} \quad f(x,y) - L \to 0.$$

Para função de uma variável $f(x)$, um ponto $x \in \mathbb{R}$ pode se aproximar de um ponto a pela direita ou pela esquerda. Para funções de duas variáveis, os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ podem se aproximar do ponto (a, b) por diversos caminhos distintos.





A existência do limite não pode depender da maneira como (x, y) se aproxima de (a, b). O limite existe se, e somente se, todos os "sublimites" (obtidos tomando os vários caminhos) forem iguais.

Exemplo 1. Mostre que não existe

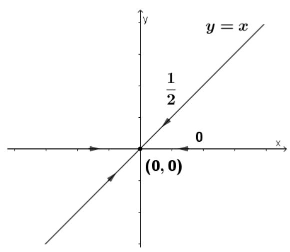
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Nota: A função $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ está definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Vamos ver que existem 2 sublimites diferentes tomando 2 caminhos diferentes passando na origem formados por retas.

Pela reta $y = 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$



Pela reta $y = x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Encontramos dois sublimites diferentes, logo o limite não existe (pois se existisse, todos os sublimites seriam iguais).

Poderíamos ter resolvido o problema de maneira mais geral, considerando uma reta genérica $y = mx$, para $m \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

O valor deste limite depende de m, isto é, depende da reta que tomamos. Desta maneira obtemos uma infinidade de sublimites diferentes (para $m = 0 : 0$; para $m = 1 : \frac{1}{2}$; para $m = 2 : \frac{2}{5}$, etc), logo o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

não existe.

Exemplo 2. Mais geralmente, quando temos um quociente entre polinômios e os graus de **todos** os monômios no numerador e denominador são iguais (com $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, limite na origem, indeterminação $\frac{0}{0}$), o limite não existe. Por exemplo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{x^3y}^{\text{grau } 4}}{\underbrace{x^4}_{\text{grau } 4} + \underbrace{y^4}_{\text{grau } 4}}$$

não existe. De fato, deixamos para o leitor verificar que, os sublimites ao longo das retas $y = mx$ são diferentes.

Exemplo 3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{existe ?}$$

Ao longo das retas $y = mx$ $(m \neq 0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0.$$

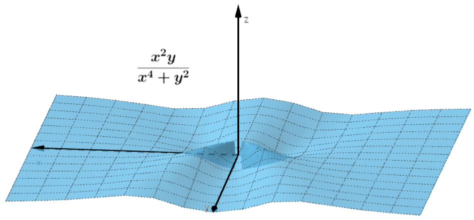
(É fácil ver que o sublimite ao longo da reta $y = 0$ também é 0.) Logo, todos os sublimites ao longo de quaisquer retas são iguais a 0. Será que o limite existe?

Não sabemos se o limite existe, pois há outros caminhos além das retas.

Ideia: Vamos tentar igualar os graus dos monômios do numerador e denominador. Fazendo $y = x^2$ os monômios no denominador ficam ambos com grau 4. Verificamos que, com $y = x^2$, o monômio do numerador também ficou com grau 4. Vamos ver que o limite **não existe**, tomando caminhos da forma $y = x^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

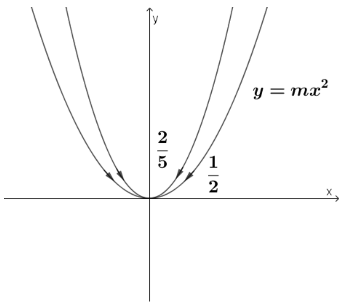
Encontramos 2 sublimites distintos (0 e $\frac{1}{2}$), logo o limite não existe.



Poderíamos ter resolvido este limite considerando logo de início caminhos da forma $y = mx^2$, $m \in \mathbb{R}$ (relações que igualam os graus dos monômios do numerador e denominador):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2}.$$

O valor deste limite depende de m, logo existem infinitos sublimites distintos $(0, 1/2, 2/5, \cdots)$, e o limite dado (em $\mathbb{R}^2$) não existe.



Exemplo 4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^{500}}{x^2+y^{1000}} \quad \text{existe?}$$

Em caso negativo, que tipo de caminhos você considerará, para encontrar vários sublimites diferentes?

Exemplo 5.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{existe?}$$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Neste caso, a 'análise do grau' também funciona. Ambos os monômios do denominador têm grau 2. O monômio do numerador tem grau $3 > 2$. Ou seja, embora tenhamos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, o numerador está indo para 0 'mais rapidamente' que o denominador (note que x e y são quantidades pequenas, que ficam mais pequenas quanto maior for o grau da potência a que forem elevadas). Isto nos leva a crer que o limite existe e é 0.

Como vamos provar isto?

Não dá para calcular o limite por todos os caminhos! Vamos usar um método cuja prova independe de caminhos: o Teorema do Confronto (Teorema do Sanduíche), assim como fazemos em cálculo I.

Vamos tentar escrever:

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \quad \text{infinitésimo} \times \text{limitado},$$

pois (pelo Teorema do Confronto), isto será também um infinitésimo. Podemos escrever:

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 2y \times \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado?}}$$

Claramente

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \geq 0.$$

E ainda,

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1, \text{ pois } x^2 \leq x^2+y^2,$$

logo $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ é uma função limitada.

Formalizamos o raciocínio da seguinte maneira (utilizamos o valor absoluto, para lidar apenas com quantidades positivas nas desigualdades a seguir):

$$0 \leq \left| \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \right| = |2y| \times \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |2y| \times 1 = |2y|\,.$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |2y| = 0$, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Exemplo 6.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+|y|} \quad \text{existe ?}$$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Fazendo a separação,

$$\frac{xy}{x^2+|y|} = x \times \frac{y}{x^2+|y|}$$

obtemos infinitésimo $\times$ limitado.

De fato,

$$\left| \frac{y}{x^2+|y|} \right| = \frac{|y|}{x^2+|y|} \leq 1 \quad (\text{pois } |y| \leq x^2+|y|).$$

Formalizando

$$0 \xleftarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 \leq \left| \frac{xy}{x^2+|y|} \right| = |x| \times \frac{|y|}{x^2+|y|} \leq |x| \times 1 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+|y|} = 0.$$

Continuidade:

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se contínua em $(a, b) \in D$ se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b),$$

ou seja,

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe;

(2) este limite é igual a $f(a, b)$.

Note que para falarmos de continuidade, o ponto (a, b) tem de pertencer ao domínio de $f(x, y)$, porque usamos o valor $f(a, b)$ (para o limite, o ponto (a, b) não tem de pertencer ao domínio da função, porque apenas calculamos os valores de $f(x, y)$ para (x, y) 'perto' de (a, b)).

Proposição:

(1) Polinômios são funções contínuas em todo o seu domínio $D = \mathbb{R}^2$. Exemplo: $f(x, y) = x^4 + 3x^2y^2 + y^3$.

(2) O produto e o quociente de funções contínuas são funções contínuas (nos pontos do seu domínio). Exemplo: $f(x, y) = \frac{x^4+3x^2y^2+y^3}{x^2+y^2}$ é contínua em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(3) A composição de funções contínuas é uma função contínua (nos pontos do seu domínio). Exemplo: $f(x, y) = \text{sen}\,(x^2 + y^2)$ é contínua em $D = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 7. Quais os pontos de continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} ?$$

• Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$

Nos pontos da região aberta $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$, f é contínua pois, nessa região, f é dada pelo quociente de 2 funções contínuas (veja proposição anterior).

• Na origem

Vimos no Exemplo 3, que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ não existe, logo f não é contínua na origem (independentemente do valor de f na origem).

Exemplo 8. Determine, se possível, o valor de a de modo que a função f seja contínua em $\mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ a & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pela proposição anterior, f é contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (quociente de polinômios). E como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

(veja Exemplo 5), para f ser contínua na origem deveremos ter $0 = f(0, 0) = a$.

Exercício) Calcule os limites, se existirem, ou mostre que não existem.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \log\left(\dfrac{1+x^2}{x^2+xy}\right)$ [Dica: utilize continuidade].

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+\ \mathrm{sen}^2 y}{2x^2+y^2}$ [Dica: $\mathrm{sen} y \approx y$].

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ [Dica: multiplique em cima e em baixo por $\sqrt{x^2+y^2+1}+1$].