

Aula 1 – (a31... a35)

- 1) • *Exercício (relações de ortogonalidade)* Prove que se $\alpha_m(t) = e^{imt}$ $m \in \mathbb{Z}$ então $\int_0^{2\pi} \alpha_m(t) \overline{\alpha_n(t)} dt = 0$ se $m \neq n$ e $\int_0^{2\pi} \alpha_m(t) \overline{\alpha_n(t)} dt = 2\pi$ se $m = n$.
- 2) • *Exercício* Seja $\alpha_m(t) = e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$ Suponha que $f(t) = \sum_{m=-N}^N c_m \alpha_m(t)$, onde c_j são constantes para $j = -N, \dots, N$. Prove que
$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{\alpha_m(t)} dt$$

Aula 2 – (a36... a37)

- 3) • **Exercício* Sejam P, Q polinômios de graus m, n respectivamente e $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Prove que se $n > m + 1$, então $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(0,R)} f(z) dz = 0$
- 4) • *Exercício* Calcular as integrais
- ▶ $\int_{\alpha} \frac{1}{z} dz$ onde α é o quadrado de vértices $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = i, z_4 = -i$, orientado em sentido positivo
 - ▶ $\int_{\alpha} (xy + i(x^2 + y^2)) dz$, onde α é o segmento de reta que une os pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 1 + i$.
 - ▶ $\int_{\alpha} z^2 dz$ onde α é o segmento parabólico $y = x^2, x \in [0, 1]$
 - ▶ $\int_{\alpha} e^{iz} dz$ onde α é a semi-circunferência $\alpha(t) = 2e^{it}, t \in [-\pi, 0]$
 - ▶ $\int_{\alpha} \frac{1}{|z|^2 + 1} dz$ onde α é a semireta $y = -x, x \in [0, \infty)$.
 - ▶ * $\int_{\alpha} \frac{1}{z^n} dz$ onde α é a circunferência $z = R \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ e $n \in \mathbb{Z}$.
- 5) • *Exercício* Seja $f(z) = e^{iz^2}$
- ▶ Prove que $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, para todo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (*)
 - ▶ Verifique que a integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} R i \cdot e^{i(R^2 e^{2it})} e^{it} dt$ corresponde a $\int_{\alpha} f(z) dz$, onde α_R é o segmento circular $\alpha_R(t) = R \cdot e^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
 - ▶ Prove que $\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} R i \cdot e^{i(R^2 e^{2it})} e^{it} dt \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2t} dt$
 - ▶ De (*) conclua que $e^{-R^2 \sin 2t} \leq e^{-R^2}$, para todo $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
 - ▶ Conclua que $\left| \int_{\alpha_R} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{4} \pi R e^{-R^2}$ e portanto que
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\alpha_R} f(z) dz \right| = 0$$

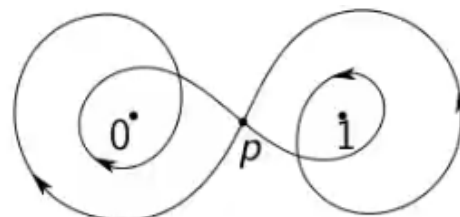
Aula 3 – (a38... a310)

- 6) • *Exercício* Calcular $\int_{|z|=1} z^{-\frac{3}{4}} dz$ usando o ramo definido em $\{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$. R: $-4 + 4i$
- 7) • *Exercício* Seja $\alpha(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Provemos que $\left| \int_{\alpha} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e$.

Aula 4 – (a311... a313)

- 8) • *Exercício* $\int_{\alpha} \frac{zdz}{(2z-1)(z+1)}$ onde α é o círculo $C(0, 2)$, percorrido uma única vez e orientada positivamente.
- 9) • *Exercício* $\int_{\alpha} \frac{e^z}{z^2-4} dz$, onde α é o círculo $C(2, 1)$, percorrido uma única vez e orientada positivamente.

- 10) Calcule a integral $\int_{\alpha} \frac{e^z - i}{z^2(z-1)} dz$ onde α é a curva mostrada na figura, orientada em sentido positivo



R: $4\pi (ie + 2 + 2i)$

- 11) • *Exercício* Seja $P(z) = (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}$ um polinômio de grau $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Prove que $\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n_1}{z-z_1} + \frac{n_2}{z-z_2} + \dots + \frac{n_k}{z-z_k}$.
 - Suponha que existe um $R > 0$ tal que $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C} - \overline{D(0, R)}$.
 - Prove que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = n$, onde α é o círculo $C(0, R)$ percorrido uma única vez em sentido antihorário.

- 12) • *Exercício* Use as fórmulas integrais de Cauchy para calcular as seguintes integrais. Considere que todas as curvas são percorridas uma única vez em sentido positivo

- ▶
- ★ (1) $\int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1} dz$ R: πe^i
 - ★ (2) $I = \int_{|z-i|=1} \frac{\sin(\pi iz/2)}{1+z^2} dz$ R: $-\pi$
 - ★ (3) $\int_{|z|=1} \left(\frac{e^z}{z+2} - 3\bar{z} \right) dz$ R: $-6\pi i$
 - ★ (4) $\int_{|z-2|=3} \frac{z^3}{(z-1)^2} dz$ R: $6\pi i$
 - ★ (5) $\int_{|z-2|=3} \frac{\exp z}{z^3(z-1)} dz$ R: $\pi i (2e - 5)$
 - ★ (6) $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$, $C: 3x^2 + y^2 = 90$ R: 0
- ▶ $\int_C \frac{ze^z}{z^2-2z-3} dz$ onde C é o losango de vértices ± 2 , e $\pm i$. R: $\frac{\pi i}{2e}$
- ▶ $\int_C \frac{z^3 + \sin z}{(z-i)^3} dz$ onde C é o triângulo de vértices $z = \pm 2$ e $z = 2i$. R: $\pi (\sinh 6 - 6)$
- ▶ $\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$, onde $a, b \in D(0, R)$ e f inteira. R: $\frac{2\pi i}{a-b} (f(a) - f(b))$
- ▶ $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-a)^m(z-b)^n}$, onde $|a| < 1 < |b|$, $m, n \in \mathbb{N}$ R: $(-1)^m \frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(a-b)^{n+m-1}}$

- 13) • *Exercício* Use os mesmos argumentos usados no teorema de Liouville e as técnicas do corolário anterior e prove que se f é inteira com $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = az$ para algum $a \in \mathbb{C}$. Generalize e prove que se f é inteira e $|f(z)| \leq |z|^p$ para algum $p \in \mathbb{N}$, então $f(z) = az^p$ para algum $a \in \mathbb{C}$.

Aula 5 – (a314... a316)

- 14) • *Exercício* Encontre o módulo máximo de $f(z) = e^z$ no disco $D(a, R)$.
- 15) • *Exercício* (princípio do módulo mínimo) Seja f diferenciável no aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, tal que f não possui zeros em $D(a, r) \subset \Omega$. Prove que

$$|f(a)| \geq \min_{t \in \mathbb{R}} |f(a + r \exp it)|$$

Aula 6 – (a317... a319)

16) • **Exercício** Classifique as singularidades de f

▶ $f(z) = \frac{z^2+2z+1}{(2z+1)(z+1)}$

▶ $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$

▶ $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$

▶ $f(z) = \frac{\sin z^2}{z(z+i)}$

▶ $f(z) = \frac{z^2}{e^z-1}$

▶ $f(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right)$

17) • **Exercício** Prove que a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{n^2}$ converge para todo $z \in D(0,1)$ e que a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$ não converge em nenhum ponto.

Aula 7 – (a320... a323)

18) • **Exercício** Encontre a série de Laurent de f em torno de a . Indique em que anel converge.?

▶ $f(z) = \frac{z^2+2z}{z-3i}$ $a = 3i$.

R: $\frac{-(9-6i)}{z-3i} + (2+6i) + (z-3i)$

▶ $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z+1)^2}$, $a = -1$.

R: $-\frac{7}{9(z+1)} - \frac{1}{3(z+1)^2} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{13}{3^{n+2}} (z+1)^n$, $D^*(-1,3)$

▶ $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$ $a = -1$,

R: $\frac{1}{e(z+1)^2} + \frac{1}{e(z+1)} + \sum_{n \geq 0} \frac{(z+1)^n}{e(n+2)!}$.

▶ $f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$, $a = 0$.

R: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!)} z^{3-2n}$, $D^*(0, \infty)$

19) • **Exercícios** Encontre o resíduo de f em a

▶ $f(z) = \frac{2z^2}{z-1}$ em $a = 1$ R: 2

▶ $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$ em $a = -1$. R: $-\frac{1}{2e}$

▶ $f(z) = \frac{z}{(z-2)(3z-1)}$ em $a = 2$. R: $\frac{2}{5}$

▶ $f(z) = \left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ em $a = 0$ R: $-\frac{1}{6}$.

Aula 8 – (a324... a326)

- 20) • *Exercício* Calcular cada integral, identificando primeiro o caracter de cada singularidade da função.

▶ $\int_{\alpha} \frac{1}{z^2+2} dz$, onde $\alpha = \partial([0, 1] \times [0, 1])$.	R: 0
▶ $\int_{C(\frac{3}{2}, 1)} \frac{z^2}{z^3-8} dz$	R: $2\pi i/3$
▶ $\int_{\alpha} \frac{z+2}{(z^2-2z+1)^2} dz$ onde $\alpha = \partial\{z : \operatorname{Re} z \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}$	R: $2\pi i/3$
▶ $\int_{C(0, \pi)} \frac{\sin z}{z(z-\pi/4)} dz$,	R: $4\sqrt{2}i$
▶ $\int_{ z =1} z^2 e^{1/z} dz$	R: $\frac{2\pi i}{6}$
▶ $\int_{ z =1} (z^2 + z + 1) \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$	R: $\frac{5}{3}i\pi$

Aula 9 – (a327... a328)

21)

• <i>Exercício</i> $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x + \sin x}$.	R: $\int_{C(0,1)} \frac{1-i}{(2+2i)z+z^2+i} dz = \sqrt{2}\pi$
• <i>Exercício</i> $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x} \quad (a > 1)$	R: $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$
• <i>Exercício</i> $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.	R: $\frac{2\pi}{4}$
• <i>Exercício</i> $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^4}$.	R: $\frac{5\pi}{32a^7}$
• <i>Exercício</i> $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad (a, b > 0),$	R: $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$