1ra prova de Cálculo IV-edisciplinas

IME-USP: 1-10-2020

. Resolva o item a) se o seu nro USP. termina em $0, 5, 8$

Resolva o item b) se o seu nro USP. termina em $1, 2, 6$

Resolva o item c) se o seu nro USP. termina em $3, 4, 7, 9$

1. .

   (a) ($3pts$) Se $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ com $\theta \in \mathbb{R}$, escreva na forma polar o valor de z^4.

   (b) ($3pts$) Escreva na forma polar o numero complexo $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$.

   (c) ($3pts$) Seja $z = x + iy$. Encontre as raices quadradas de z na forma cartesiana, como funções de x e y.

Solution 1 *(a) Se* $z + \frac{1}{z} = \cos\theta$ *então* $z^2 + 2z\cos\theta + 1 = 0$ *ou* $(z - \cos\theta)^2 = 1 - \frac{\cos^2\theta}{2}$
$(z + \cos\theta)^2 - (\cos^2\theta - 1) = z^2 + 2(\cos\theta)z + 1$
$(z + \cos\theta)^2 = \cos^2\theta - 1 \Rightarrow z + \cos\theta = \pm\sqrt{\cos^2\theta - 1} \Rightarrow z + \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}\, i$
$z + \cos\theta = \pm\sin\theta i \Rightarrow z = -\cos\theta + \sin\theta i$ *ou* $z = -\cos\theta - \sin\theta i$*, Assim* $z = -e^{i\theta}$ *ou* $z = -e^{-i\theta} = -e^{-i\theta} = i\sin\theta - \cos\theta$
Daqui $z^4 = e^{-i4\theta}$ *ou* $z^4 = e^{i4\theta}$.

(b) Temos $|z| = \sqrt{(1 + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2(1 + \cos\alpha)} = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$
Como $\alpha \in (-\pi, \pi)$ *então* $\operatorname{Re} z = 1 + \cos\alpha \geq 0$*. Portanto o argumento principal* $\theta = \arg z$ *satisfaz* $\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ *ou*

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}\right) = \arctan\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

(pois $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*.).*
Assim $1 + e^{i\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$

(c) Se $z = x + iy$*, e* $\theta = \arg z$ *então* $w_k = \sqrt{|z|}e^{\frac{i(\theta + 2k\pi)}{2}}$: $k = 0, 1$*.Para* $k = 0$. $w_0 = \sqrt{|z|}e^{\frac{i\theta}{2}} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$*. Agora* $\theta \in (-\pi, \pi]$*, implica que* $\frac{\theta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*, e* $\cos\theta \geq 0$*, também* $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$, $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$*. (o sinal do seno é positivo se* $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ *e negativo se* $\frac{\theta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *) Como,* $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ *então*

$$w_0 = \sqrt{|z|}\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{x}{|z|}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1 - \frac{x}{|z|}}{2}}\right) = \sqrt{\frac{x + |z|}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|z| - x}{2}}$$

a segunda raiz w_1 *é obviamente* $-w_0$.

.. Resolva o item a) se o seu nro USP. termina em $0, 5, 8$

Resolva o item b) se o seu nro USP. termina em $1, 2, 6$

Resolva o item c) se o seu nro USP. termina em $3, 4, 7, 9$

2 .

(a) $(3, 5pts)$ Vc pode afirmar que se ln é o logaritmo principal então $n\ln z = \ln(z^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}-\{0\}$?. Calcule o limite $\lim n\ln\left(\frac{i-n}{i+n}\right)$

(b) $(3, 5pts)$. Encontre o limite da sequência $\lim\left(\frac{1+in}{2n^2}\right)^n$. Justifique analiticamente cada um de seus passos. Use apenas o estudado em aula.

(c) $(3, 5pts)$. Vc pode afirmar que se ln é o logaritmo principal então $n\ln z = \ln(z^n)$. para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}-\{0\}$?. Calcule o limite $\lim n\ln\left(1 + \frac{2i}{n}\right)$

Solution 2 .

(a) A relação $n\ln z = \ln(z^n)$ *não é válida em* $\mathbb{C}-\{0\}$. *Observe que* $2\ln(-1) = 2(\pi i) = 2\pi i$, *por outro lado* $\ln(-1)^2 = \ln 1 = 0$. *Assim* $2\ln(-1) \neq \ln(-1)^2$.

$$\left|\frac{1+in}{2n}\right| = \frac{1}{2}\frac{n^2+1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right), \ \forall n \geq 2$$

Isto é

$$\left|\frac{1+in}{2n}\right| \leq \frac{5}{8}$$

donde

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+in}{2n}\right|^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$$

Pelo teorema do confronto $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+in}{2n}\right)^n = 0$

(b) Temos

$$\left|\frac{1+in}{2n^2}\right|^n = \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{2n^2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{2n^2}\right)^n$$

portanto

$$\lim\left|\frac{1+in}{2n^2}\right|^n = \lim\left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{2n^2}\right)^n = \lim e^{n\ln\frac{\sqrt{1+n^2}}{2n^2}}$$

Como $\lim n\ln\frac{\sqrt{1+n^2}}{2n^2} = +\infty \times \ln 0 = -\infty$, *então* $\lim\left|\frac{1+in}{2n^2}\right|^n = e^{-\infty} = 0$.

(c) A relação $n\ln z = \ln(z^n)$ *não é válida em* $\mathbb{C}-\{0\}$. *Observe que* $2\ln(-1) = 2(\pi i) = 2\pi i$, *por outro lado* $\ln(-1)^2 = \ln 1 = 0$. *Assim* $2\ln(-1) \neq \ln(-1)^2$.

Calculamos o limite: Vemos que multiplicando pelo conjugado $n - i$ *obtemos* $\frac{i-n}{i+n} = \frac{n^2-1}{n^2+1} - \frac{2in}{n^2+1}$. *Tmabém* $\left|\frac{i-n}{i+n}\right| = 1$. *Observe que* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i-n}{i+n}\right) = 1$. *Assim para* n *sufiscentemente grande o argumento de* $\frac{i-n}{i+n}$ *esta ente* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Portanto*

$$\arg\left(\frac{i-n}{i+n}\right) = \arctan\left(\frac{-2n}{n^2+1}\Big/\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) = \arctan\left(\frac{-2n}{n^2-1}\right).$$

Assim $n\ln\left(\frac{i-n}{i+n}\right) = n\left(\ln 1 + i\arctan\left(-\frac{2n}{n^2-1}\right)\right) = in\arctan\left(-\frac{2n}{n^2-1}\right)$ *e* $\lim_{n\to+\infty} in\arctan\left(-\frac{2n}{n^2-1}\right) = -2i$. *(Aplique L'Hospital)*

. Resolva o item a) se o seu nro USP. termina em $0, 5, 8$

Resolva o item b) se o seu nro USP. termina em $1, 2, 6$

Resolva o item c) se o seu nro USP. termina em $3, 4, 7, 9$

3 .

(a) $(3,5pts)$ Converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} i^n \ln\frac{n+2}{n+3}$?... Converge absolutamente?. Justifique de forma detalhada a sua resposta.

(b) $(3,5pts)$ Converge a série $\sum(-i)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$?Converge absolutamente?. Justifique de forma detalhada a sua resposta.

(c) $(3,5pts)$ Converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} i^n \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$?. Converge absolutamente?. Justifique de forma detalhada a sua resposta.

Solution 3 .

(a) *.Temos* $\left|i^n\ln\frac{n+2}{n+3}\right| = \ln\frac{n+3}{n+2} = \ln(n+3) - \ln(n+2)$. *Donde* $\sum_{n=1}^{N}\left|i^n\ln\frac{n+2}{n+3}\right| = \sum_{n=1}^{N}(\ln(n+3)-\ln(n+2)) = \ln(N+3) - \ln 3$ *e portanto* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|i^n\ln\frac{n+2}{n+3}\right| = \lim_{N\to+\infty}(\ln(N+3)-\ln 3) = +\infty$.*Assim a série não é absolutamente convergente* $\left(-\ln\frac{n+2}{n+3}\right)$ *é descrescente pois* $f(x) = -\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$ *tem derivada* $f'(x) = -\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = -\frac{1}{x^2+5x+6} < 0$. *Também* $\lim\ln\frac{n+2}{n+3} = \ln 1 = 0$. *Assim* $\sum i^n\left(-\ln\frac{n+2}{n+3}\right)$ *converge pelo critério de Dirichlet e portanto* $\sum i^n\ln\frac{n+2}{n+3}$ *converge.*

(b) *Se* $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ *então* $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) < 0$, *(pois* $x^2 < x^2+1$*) Assim* $\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ *é descescente e* $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$.*Também se* $a_n = (-i)^n$ *então* $\left|\sum_{j=1}^{N} a_j\right| \le 2$. *Pelo criterio de leibniz a série converge,*

Se $b_n = 1/n$ *então* $L = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)/(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n/\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)$ *ou*

$$L = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{2}$$

Como $\sum\frac{1}{n}$ *diverge então pelo criterio da comparação a série* $\sum\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ *diverge.*

(c) *Se* $b_n = 1/n^2$ *então*

$$L = \lim\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)/b_n = \lim_{n\to+\infty} n^2\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ou façendo $x = 1/n$ *e aplicando* $L'Hospital$ *duas veces*

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\ln(1+x)}{1+x}}{2x} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(1+x)}{2x+1} = 1 \end{aligned}$$

Daqui como $\sum 1/n^2$ *convege então* $\sum_{n=1}^{\infty} i^n \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *converge absolutamente portanto também converge.*