2da prova de Cálculo IV

IME-USP: 03-11-2020

1. $(4,0pts)$A série $\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-nz}$, com $z \in \Omega = \{z : |z| \leq 2,\ \operatorname{Re} z \geq 1\}$ converge simplesmente no conjunto Ω?... converge uniformemente?

   Solution 1 *.Temos* $|z^n e^{-nz}| = |z|^n |e^{-nz}| = |z| |e^{-nx} e^{-niy}| = |z|^n e^{-nx}$

   Como $x = \operatorname{Re} z \geq 1$ *então* $nx \geq n$ *donde* $-nx \leq -n$*, assim* $e^{-nx} \leq 2^n e^{-n}$*. Também por hipótese* $|z| \leq 2$ *portanto* $|z|^n e^{-nx} \leq 2^n e^{-n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n$*. Ou seja* $|z^n e^{-nz}| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$*.*

   Como $\lim \sqrt[n]{\frac{2}{n}} = 0 < 1$ *a série* $\sum \left(\frac{2}{n}\right)^n$ *converge e pelo M-Test de Weistrasss, a série dada converge uniformemente e portanto simplesmente.*

2. $(3pts)$Existe o limite $\lim_{z \to 0} \frac{x^2+y^2}{x+iy}$?. Em caso afirmativo encontre o limite, $(z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy)$

   Solution 2 .
   $$\lim_{z \to 0} \frac{x^2+y^2}{x+iy} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2 \bar{z}}{|z|^2} = \lim_{z \to 0} \bar{z} = 0$$

3. .$(3pts)$

   (a) $(1,75pts)$Em que pontos $z = x + iy$ a função $f(z) = x^2 + y^2 + (2x + 3y + xy) i$ é derivável?

   (b) $(0,75pts)$Encontre a derivada nestes pontos

   (c) $(0,5pts)$A função f é analitica neste pontos?.

   Solution 3 *(a) temos* $u = x^2 + y^2$*,* $v = 2x + 3y + xy$*, estas funções* <u>*são de classe* C^1</u> *em* $\mathbb{R}^2$*.*
   $$\begin{aligned} u_x &= 2x,\ v_y = 3 + x \\ u_y &= 2y,\ v_x = 2 + y \end{aligned}$$

   Então impondo as equações de Cauchy -Riemann
   $$\begin{aligned} 2x &= 3 + x \\ 2y &= -(2 + y) \end{aligned}$$

   cuja solução é $x = 3, y = -2/3$*. Assim* f *é derivavel em* $z = 3 - \frac{2}{3}i$*.*

   (b) A derivada é
   $$f'(0) = u_x\left(3, -\frac{2}{3}\right) + iv_x\left(3, -\frac{2}{3}\right) = 6 + \left(2 - \frac{2}{3}\right) i = 6 + \frac{4}{3} i$$

   (c) f *não é analítica em* $z = 3 + 2i$*, pois apenas neste ponto são satisfeitas as equações de Cauchy Riemann, isto é não existe disco* $D(3 + 2i, \varepsilon)$ *onde* f *seja derivável.*