

# Análise Harmônica

## Objetivo

A análise harmônica é uma situação particular de um MMQ, que visa aproximar uma função (seja ela contínua ou dada por uma tabela de valores) por um **polinômio trigonométrico**, isto é, funções do tipo  $\sin(kx)$  e  $\cos(lx)$ ,  $k$  e  $l$  inteiros.

Basicamente, estamos querendo projetar a função dada em um espaço vetorial gerado pelos vetores:

$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(kx), \sin(kx)\}$ , sendo  $k$  a ordem do polinômio trigonométrico, que é o valor máximo que multiplica  $x$  (diminuindo seu período).

## Prática:

Se tivermos um **produto interno conveniente**, de forma que os vetores  $\{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(kx), \cos(kx)\}$  sejam **ortogonais**, então teremos um sistema normal do tipo:

$$A = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sin(x), \sin(x) \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \cos(x), \cos(x) \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle \end{pmatrix}$$

Que é uma matriz **diagonal**, que, pois, já está escalonada.

Sendo assim, é fácil de resolver um sistema do tipo:

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sin(x), \sin(x) \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sin(2x), \sin(2x) \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f(x), 1 \rangle \\ \langle f(x), \sin x \rangle \\ \langle f(x), \sin 2x \rangle \\ \vdots \\ \langle f(x), \cos(nx) \rangle \end{pmatrix}$$

Já que precisamos apenas isolar a variável:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \frac{1}{\langle 1, 1 \rangle} \\ r_2 \frac{1}{\langle \sin(x), \sin(x) \rangle} \\ r_3 \frac{1}{\langle \cos(x), \cos(x) \rangle} \\ \vdots \\ r_n \frac{1}{\langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle} \end{pmatrix}$$

Sendo  $r_i$  o produto interno da linha correspondente.

Note que o vetor  $x$  é o vetor de multiplicadores de  $1, \sin(x), \cos(x) \dots \cos(nx)$ , em ordem, no polinômio!

## Notas:

O produto interno conveniente é:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_c^{c+2\pi} f(x)g(x)dx$$

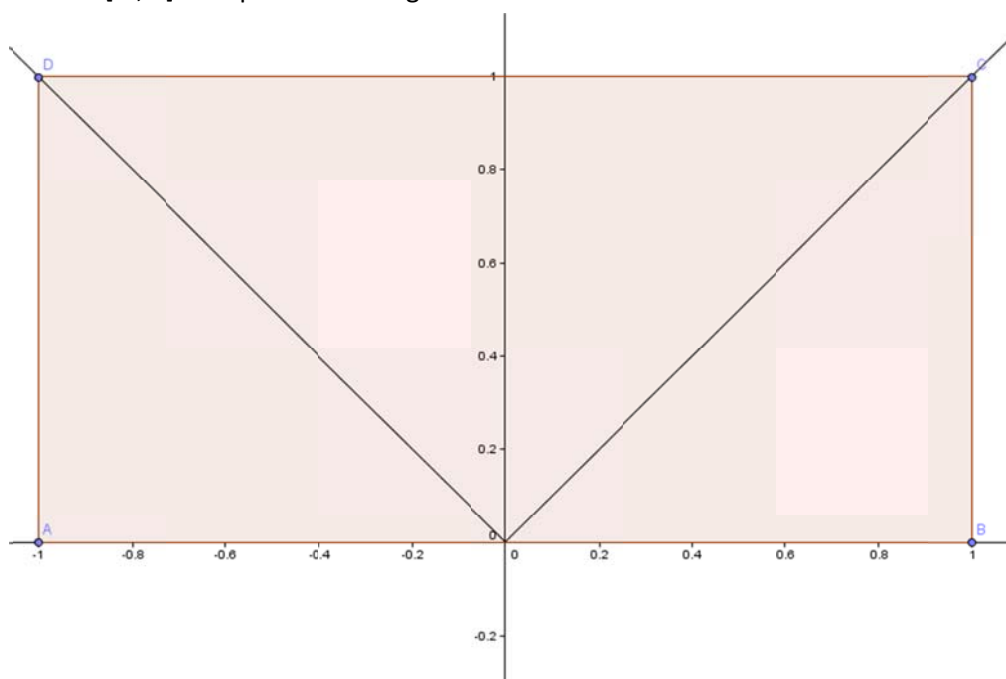
Que, para as funções trigonométricas, garante a ortogonalidade procurada. Um intervalo bom é  $-\pi, \pi$ , ou  $0, 2\pi$ .

Note que nem sempre os exercícios serão dados nesse intervalo, o que motivará uma mudança de variáveis de forma que o intervalo passe de  $[-T, T]$  para  $[-\pi, \pi]$ .

## Exemplo:

Aproxime a função  $f(x) = |x|$  no intervalo  $[-1, 1]$  com polinômios trigonométricos de ordem  $\leq 3$ .

Queremos aproximar a função ao lado, no intervalo destacado, com polinômios trigonométricos. Para isso, definiremos uma mudança de variável para um intervalo interessante, já que  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  não são ortogonais nesse intervalo.



Para facilitar o entendimento, vamos substituir  $x$  por  $t$  na função dada. Temos:

$$f(t) = |t| = \begin{cases} t, & \forall t > 0 \\ -t & \forall t \leq 0 \end{cases}$$

Transformando o intervalo  $[-1, 1]$  em  $[-\pi, \pi]$ :

$$t = \frac{x}{\pi} \rightarrow F(x) = f\left(\frac{x}{\pi}\right) = \left|\frac{x}{\pi}\right|;$$

Note que **mudamos a função**  $f(\mathbf{t})$  para a função  $F(\mathbf{x})$ , que é composta de  $f(t)$  e  $t(x)$ . O problema pede para aproximarmos em  $f(t)$ , logo teremos que, ao final do exercício, voltar às variáveis iniciais.

Nossa função aproximadora, por restrição do enunciado, é do tipo:

$$a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x)$$

Basta encontrarmos os coeficientes do polinômio para encontrarmos a aproximação desejada.

Sistema normal:

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1 \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \text{sen}x, \text{sen}x \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \text{sen}2x, \text{sen}2x \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle \text{sen}3x, \text{sen}3x \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \text{cos}x, \text{cos}x \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \text{cos}2x, \text{cos}2x \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle \text{cos}2x, \text{cos}3x \rangle \end{pmatrix}$$

Fazendo os produtos internos:

$$\langle 1,1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$$

$$\langle \text{sen}x, \text{sen}x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(x) \, dx = \pi$$

$$\langle \text{sen}(2x), \text{sen}(2x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(2x) \, dx = \pi$$

$$\langle \text{cos}x, \text{cos}x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{cos}^2(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(x) \, dx = \pi$$

...

$$\langle \text{sen}(nx), \text{sen}(nx) \rangle = \langle \text{cos}(nx), \text{cos}(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) \, dx = \pi$$

Logo, o sistema normal é:

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

**Que NÃO VAI VARIAR nos exercícios, se usarmos este intervalo!**

Agora basta fazermos os produtos internos  $\langle F(x), 1 \rangle$ ,  $\langle F(x), \text{cos}(x) \rangle$ , ... e, finalmente, resolvermos o sistema: Note que usaremos **F(x)**, e não **f(x)**, pois f é definida em **t**, e nossa variável é x!

$$\langle F(x), 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{x}{\pi} \right| \, dx = 2 \int_0^{\pi} \left| \frac{x}{\pi} \right| \, dx = \pi$$

\*Podemos fazer isso porque a função módulo é simétrica (Par).

$$a_0 = \frac{\langle F(x), 1 \rangle}{\langle 1,1 \rangle} = \frac{1}{2}$$

Para os outros produtos internos, tentaremos encontrar uma relação mais geral para determiná-los em função de  $n$ , o multiplicador de  $x$ , para não ter que calcular todas as integrais. Deixaremos, portanto,  $n$  como incógnita.

$$\langle F(x), \sin(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{x}{\pi} \right| \sin(nx) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Vemos, portanto, que o seno não terá contribuição nenhuma em nossa aproximação.

$$\langle F(x), \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{x}{\pi} \right| \cos(nx) dx = \frac{2(\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi n^2} \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Logo, temos os seguintes valores para os produtos internos:

$$\langle F(x), \cos(x) \rangle = -\frac{4}{\pi}$$

$$\langle F(x), \cos(2x) \rangle = 0$$

$$\langle F(x), \cos(3x) \rangle = -\frac{4}{9\pi}$$

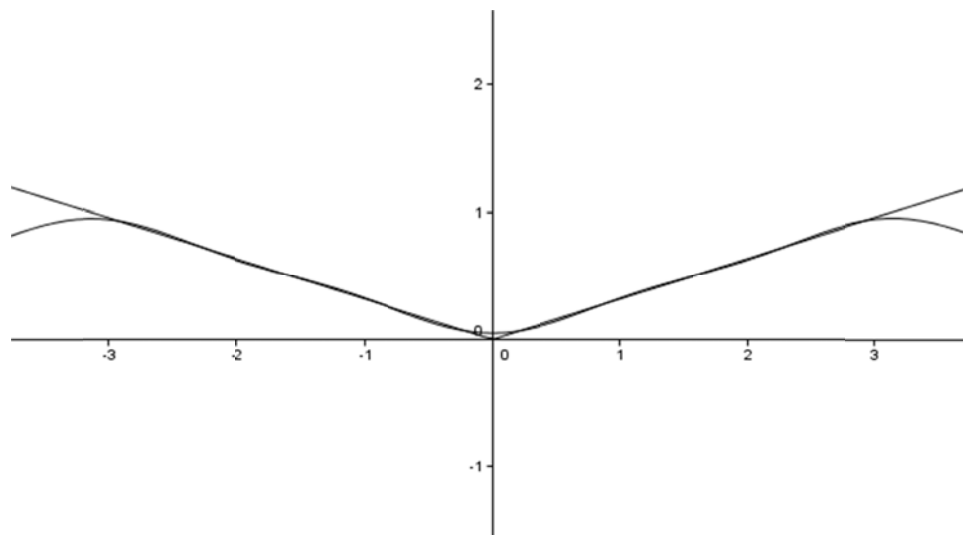
Daí podemos calcular os valores dos outros coeficientes:

$$a_1 = \frac{\langle F(x), \cos(x) \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{\langle F(x), \cos(3x) \rangle}{\langle \cos 3x, \cos 3x \rangle} = -\frac{4}{9\pi^2}$$

Encontramos a aproximação  $G(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3x)$ , em  $x$ :



Observe que essa não é a função que queremos, mas é, sim, uma aproximação para  $F(x) = \left| \frac{x}{\pi} \right|$ .

Queremos passar essa aproximação para a função  $f(x) = |x|$ , e sabemos que  $t = x \pi$

$$G(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3x) \xrightarrow{t = \pi x} g(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3(\pi x))$$

