0

MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Prova 2

2osemestre de 2018 – Prof. Claudio H. Asano – 13/11/2018

1. Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial y′′−2y′+2y = 5 sen(t) + 10 cos(t), sujeito a y(0) = 1 e y′(0) = 2. Justifique.



2. Calcule a transformada de Laplace de f(t) = 

(

0, 0 ≤ t < 1 t, 1 ≤ t < 2 0, t ≥ 2

. Expresse a resposta em

termos da função da função escada uc(t) =

0 se t < c

1 se t ≥ c. Justifique.

3. Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial y′′−5y ′+4y =

 

1, 0 ≤ t < 1 −1, 1 ≤ t < 2 0, t ≥ 2

, sujeito a y(0) = 3 e y′(0) = −5. Justifique.

4. Resolva o problema de valor inicial y′′ + 3y′ + 2y = 1 + δ(t − 1), sujeito a y(0) = 1 e y′(0) = −1, com a transformada de Laplace. Justifique sua resposta.

5. Encontre uma solução particular de y′ = parâmetros. Justifique sua resposta.

"0 1 −1 0

#

y +

"1 t

#

. Utilize variação dos

Respostas: 0 MAP2223 – Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações, Prova 2, 2osemestre de 2018, Prof. Claudio H. Asano – 13/11/2018

1. De (s2 − 2s + 2)Y (s) = 5

s~~2~~+1 +10s

s~~2~~+1 + s, obtemos por frações parciais

Y (s) = 2s + 1

s2 + 1+−2s + 3

s2 − 2s + 2+2s − 4

s2 + 1+−2s + 8

s2 − 2s + 2+s

s2 − 2s + 2

e, completando o quadrado s2 − 2s + 2 = (s − 1)2 + 1,

s2 + 1+−3s + 11

=4s − 3 = 4s

(s − 1)2 + 1

s2 + 1− 31

s2 + 1− 3(s − 1)

(s − 1)2 + 1+ 81

(s − 1)2 + 1

e assim

y(t) = 4 cos(t) − 3 sen(t) − 3etcos(t) + 8etsen(t)

= 4 cos(t) − 3 sen(t) − et(3 cos(t) − 8 sen(t)).

2. Como

f(t) = (u1(t) − u2(t))t (pulso retangular) × (rampa)

= u1(t) + (t − 1)u1(t) − (t − 2)u2(t) − 2u2(t)

obtemos

F(s) = e−s

s+e−s

s2−e−2s

s2− 2e−2s

1

s

= e−s

s+1s2 − e−2s 1s2+2s

3. O termo forçante é f(t) = u0(t) − 2u1(t) + u2(t) com correspondente transformada de Laplace F(s) = 1s − 2e−s

s +e−2s

s − 2e−s

s. Da equação diferencial, temos (s2 − 5s + 4)Y (s) =

s +e−2s

1

s + 3s − 20 e usando frações parciais 1/4

s+1/12

+−8/3

Y (s) =(1 − 2e−s + e−2s) =1/4s−31/12

s − 4+16/3

s − 1

− e−s1/2s− e−s1/6

s − 4−1/3 s − 1

s − 4+17/3 s − 1

s − 4+ e−s2/3

s − 1

+ e−2s1/4s+ e−2s1/12

s − 4− e−2s1/3

s − 1

Portanto, usando que L(uc(t)ea(t−c)) = e−csL(eat) = e−cs 1 s−a

y(t) =14−3112e4t +163et

−12u1(t) −16u1(t)e4(t−1) +23u1(t)et−1

+14u2(t) + 112u2(t)e4(t−2) −13u2(t)et−2

Agrupando,

y(t) = 14−3112e4t +163et + u1(t) 23et−1 −16e4(t−1) −12+ u2(t) 14+112e4(t−2) −13et−2

4. Aplicando a transformada de Laplace, obtemos (s2 + 3s + 2)Y (s) = 1s + e−s + s + 2. Por frações parciais,

Y (s) = 1/2s−1

s + 1+1/2

1

s + 1−1

+1

s + 1

=1/2s+1/2

s + 2+ e−s 1

s + 2

s + 2+ e−s

s + 1−1 s + 2

e assim, usando L(uc(t)ea(t−c)) = e−csL(eat) = e−cs 1 s−a:

y(t) = 12+12e−2t + u1(t)e−(t−1) − u1(t)e−2(t−1)) =12(1 + e−2t) + u1(t)(e−(t−1) − e−2(t−1))

5. Os autovalores são complexos λ = ±i com autovetores

"1 ±i

#

, respectivamente, e escreve

mos a solução complexa do sistema homogêneo (cos(t)+isen(t))

"1 ±i

#

=

"cos(t) + isen(t) − sen(t) + i cos(t)

#

=

"cos(t) − sen(t)

#

+ i

"sen(t) cos(t)

#

. Deste modo, obtemos duas soluções L.I. y1 =

"cos(t) − sen(t)

#

e y2 =

"sen(t) cos(t)

#

. Procuramos uma solução particular do tipo yp = L1y1 + L2y2

que é obtida resolvendo o sistema

"cos(t) sen(t) − sen(t) cos(t)

# " L′1 L′2

#

=

"1 t

#

. Deste modo

L′1 = cos(t) − tsen(t) e L′2 = t cos(t) + sen(t) e portanto L1 = t cos(t) e L2 = tsen(t) e

uma solução particular é yp = t cos(t)

"cos(t) − sen(t)

#

+ tsen(t)

"sen(t) cos(t)

#

=

"t 0

# .

(

f

t

s

−

e

∞

0

Z =

)

s

(

F

) t

(f

 c

 <

t

e s

0

c

≥ t

e

s

1

)

c

−

t

(

f

)

) t

(

ft

c

) t

c

(

τ

d

)

τ

(

g

)

τ

−

)

c

−

t

)

s

(

F

n

s

)

t

(

)

n

(

) t

(

f

n

) t

) t

(f

t

0 >

T

o

d

o

í

r

 pe

 de

)

t

(

δ

)

0

(

 + f

τ

d

)

τ

(f

=

}

)

t

(

( =

)

t

(

t

(c

u

e

f

t

0

t (

f

(δ

f

−

(

a

c

i

d

ói

r

)t

(′

f

t

0

Z

c

u

f

{

L

e

c

a

l

p

 La

Z

e

p

)

t

(

f

| )s(F= } )t(f{ L | 0 >s, 1 s | 0 > s. 21 s | 0 > s, 1!  +nns | 0 >s ,  1)  1++pp s( Γ |  a > s, a 1 −s | 0 >s, 2 aa  2s | 0 > s,  2 as  2s | |a| > s,  2  a a −2 s | |a| > s, 2  as  −2 s |  a >s,  2 b+ 2 b  a−s |  a >s, 2  b+a 2  − as  −s |  a >s,  1 +n!  an− s |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ) t(f | 1 | t |  . .., 2, 1 0, =n , n t  | 1 − >p, p t  | tae | )ta(nes | )ta(soc | )ta(hnes | )ta(hsoc | )tb(nest ae | )tb(soct ae |  ..., 2, 1 0, =n , t aen t  |

 de

s

a

d

a

m

r

o

f

s

n

a

 Tr

 de

a

l

e

b

a

T