Hamilton Luiz Guidorizzi

UM CURSO DE CÁLCULO

VOLUME 3

LTC

1

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES VETORIAIS

1.1. FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES VETORIAIS

Sejam n e m dois naturais diferentes de zero. Uma função de n variáveis reais a valores em $\mathbb{R}^m$ é uma função $f: A \to \mathbb{R}^m$, onde A é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}^n$. Uma tal função associa a cada n-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ um único vetor $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertencente a $\mathbb{R}^m$. O conjunto A é o *domínio* de f. A *imagem* de f é o conjunto

$$Im\, f = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m \mid (x_1, \ldots, x_n) \in A\}.$$

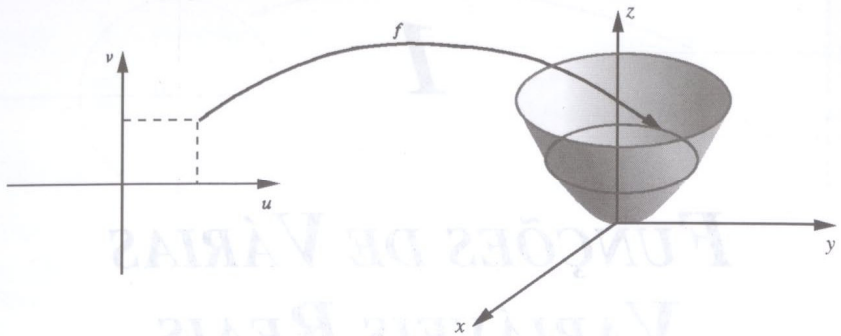
A imagem de f será, também, indicada por $f(A)$. Se B for um subconjunto de A, indicaremos, ainda, por $f(B)$ o conjunto de todos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$; diremos, então, que f transforma o conjunto B no conjunto $f(B) \subset \mathbb{R}^m$. As palavras *transformação e aplicação* são sinônimos de função.

EXEMPLO 1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(u, v) = (x, y, z)$ onde

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

é uma função com domínio $\mathbb{R}^2$ e com valores em $\mathbb{R}^3$. Esta função transforma o par ordenado (u, v) na terna $(u, v, u^2 + v^2)$. A imagem de f é o conjunto $\{(u, v, u^2 + v^2) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ que é igual a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

A imagem de f coincide, então, com o gráfico da função dada por $z = x^2 + y^2$.



f transforma o plano uv no parabolóide $z = x^2 + y^2$ ■

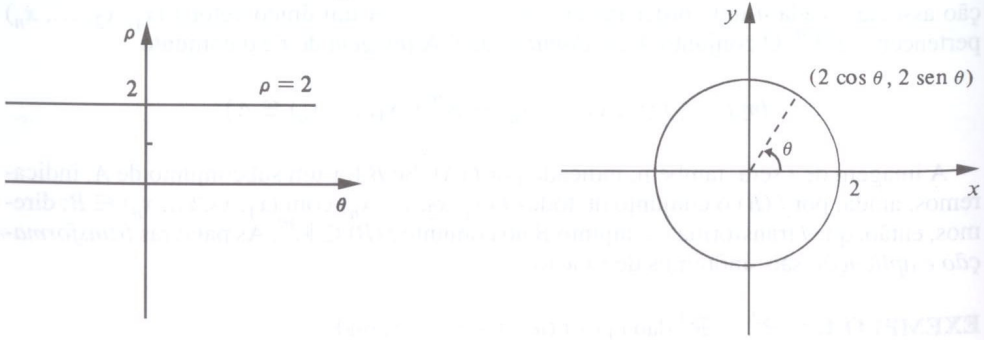
EXEMPLO 2. (*Coordenadas polares.*) Seja a função $\varphi(\theta, \rho) = (x, y)$ dada por

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

a) Desenhe o conjunto $\varphi(B)$ onde B é a reta $\rho = 2$.
b) Desenhe o conjunto $\varphi(B)$ onde B é o retângulo $0 \leq \rho \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

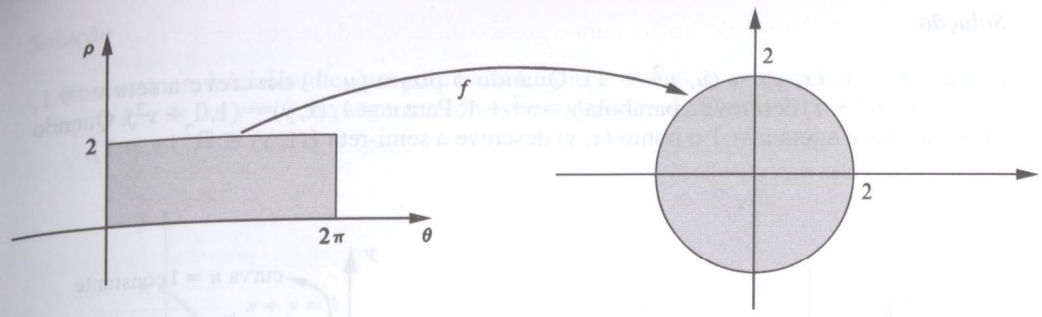
Solução

a) $\varphi(B)$ é o conjunto dos pares (x, y), com $x = 2 \cos \theta$ e $y = 2 \operatorname{sen} \theta$; $\varphi(B)$ é, então, a circunferência de centro na origem e raio 2.



φ transforma a reta $\rho = 2$ na
circunferência $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \operatorname{sen} \theta$

b) Fixado ρ em $]0, 2]$, quando θ varia de 0 a 2π, o ponto $(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$ descreve a circunferência de raio ρ e centro na origem. A φ transforma, então, o retângulo $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ no círculo de raio 2 e centro na origem. Observe que $\varphi(\theta, 0) = (0, 0)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

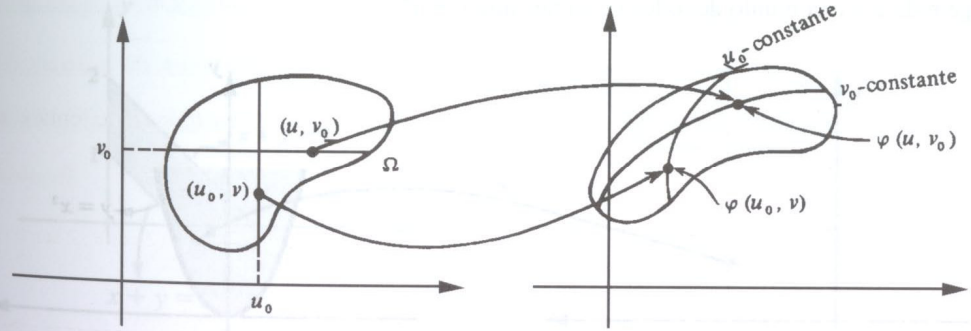


φ transforma o retângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$,
$0 \leq \rho \leq 2$, no círculo $x^2 + y^2 \leq 4$

Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) = \varphi(u, v)$ e seja $(u_0, v_0) \in \Omega$. Fixado v_0, podemos considerar a curva, no parâmetro u, dada por

① $$u \mapsto \varphi(u, v_0).$$

Referir-nos-emos a ① como *curva v_0-constante*. Do mesmo modo, podemos considerar a *curva u_0-constante:* $v \mapsto \varphi(u_0, v)$.



Quando (u_0, v) varia em Ω, $\varphi(u_0, v)$ descreve a curva u_0-constante.
Quando (u, v_0) varia em Ω, $\varphi(u, v_0)$ descreve a curva v_0-constante. ■

EXEMPLO 3. Seja $(x, y) = \varphi(u, v)$ dada por

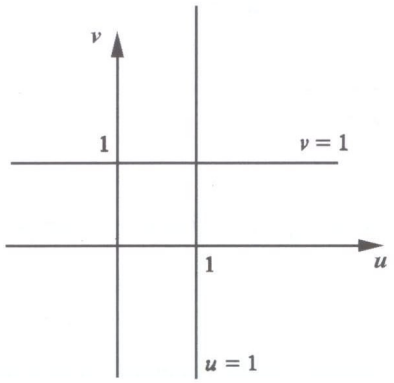
$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$$

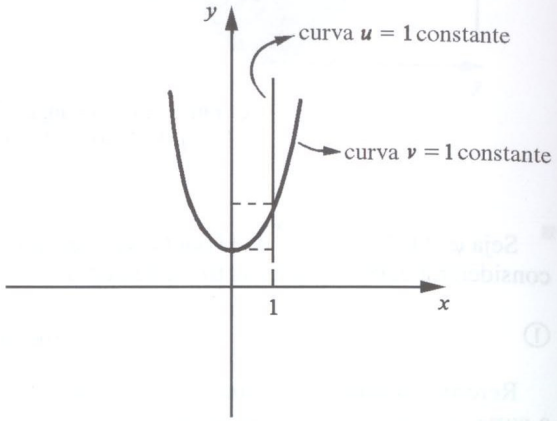
com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

a) Desenhe as curvas $v = 1$ constante e $u = 1$ constante.
b) Desenhe a imagem de φ.

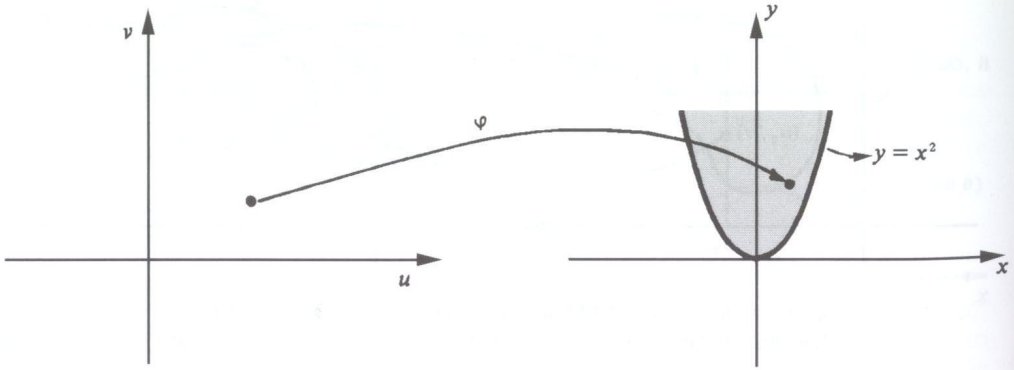
Solução

a) Para $v = 1$, $(x, y) = (u, u^2 + 1)$. Quando o ponto $(u, 1)$ descreve a reta $v = 1$, $(x, y) = (u, u^2 + 1)$ descreve a parábola $y = x^2 + 1$. Para $u = 1$, $(x, y) = (1, 1 + v^2)$. Quando $(1, v)$ descreve a reta $u = 1$ o ponto (x, y) descreve a semi-reta $\{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\}$.





b) Para cada k constante, φ transforma a reta $v = k$ na parábola $y = x^2 + k^2$. Assim, a imagem de φ é o conjunto de todos (x, y) tais que $y \geq x^2$.



φ transforma o plano uv no conjunto de todos (x, y) tais que $y \geq x^2$ ■

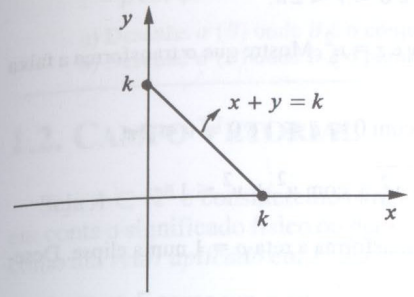
EXEMPLO 4. Considere a transformação $(u, v) = \varphi(x, y)$ dada por

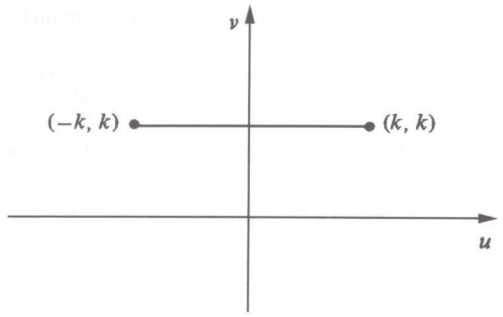
$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

com $1 \leq x + y \leq 2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Desenhe a imagem de φ.

Solução

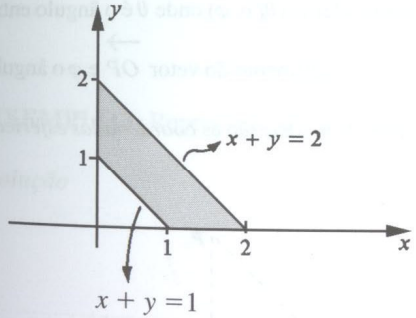
Observamos, inicialmente, que para cada k, com $1 \leq k \leq 2$, φ transforma o segmento $x + y = k$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, no segmento de extremidades $(-k, k)$ e (k, k).

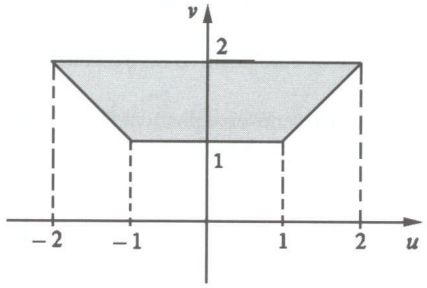




Observe: $\begin{cases} x + y = k \Rightarrow v = k \\ x = 0 \text{ e } y = k \Rightarrow (u, v) = (-k, k) \\ x = k \text{ e } y = 0 \Rightarrow (u, v) = (k, k) \end{cases}$

A imagem de φ é, então, o trapézio de vértices $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(-2, 2)$.





■

Exercícios 1.1

1. Considere a transformação $(x, y) = \varphi(\theta, \rho)$ dada por $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$. Desenhe o conjunto $\varphi(B)$ onde B é o retângulo $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2. Considere a transformação φ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $x = u + v$ e $y = u - v$. Desenhe $\varphi(B)$
   a) sendo B a reta $v = 0$.
   b) sendo B o quadrado $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.

3. Mostre que a transformação φ do exercício anterior transforma o círculo $u^2 + v^2 \leq r^2$ no círculo $x^2 + y^2 \leq 2r^2$.

4. Seja f a transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ dada por $(x, y, z) = (u + v, u, v)$. Mostre que f transforma o plano uv no plano $x - y - z = 0$.

5. Seja $f(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$. Desenhe a imagem de f.

6. Seja $\sigma(u, v) = (x, y, z)$, com $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$ e $z = u$.
   a) Mostre que a transformação σ transforma a reta $u = u_1$ ($u_1 \neq 0$ constante) numa circunferência. Desenhe tal circunferência no caso $u_1 = \frac{1}{2}$.
   b) Mostre que σ transforma a reta $v = v_1$ (v_1 constante) numa reta (no espaço xyz) passando pela origem.
   c) Desenhe $\sigma(B)$ onde B é o retângulo $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

7. Seja $\sigma(u, v) = (x, y, z)$, com $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$ e $z = u^2$. Mostre que σ transforma a faixa $u \geq 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$, no paraboloide $z = x^2 + y^2$.

8. Desenhe a imagem de $\sigma(u, v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, u)$, com $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

9. Desenhe a imagem de $\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, com $u^2 + v^2 \leq 1$.

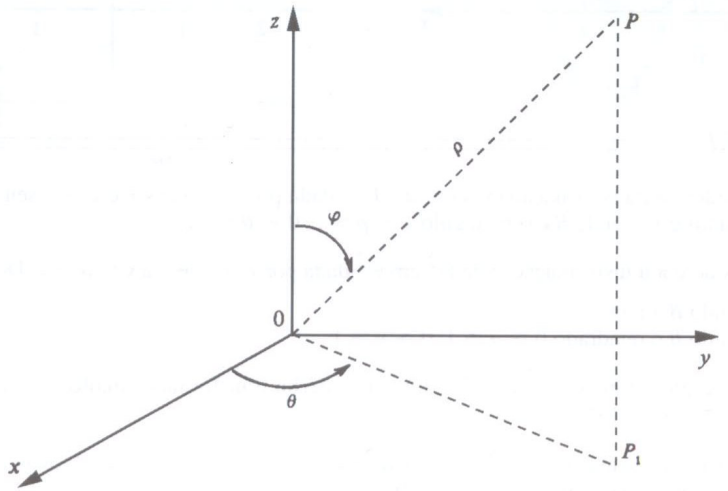
10. Seja $\sigma(\theta, \rho) = (2\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$. Mostre que σ transforma a reta $\rho = 1$ numa elipse. Desenhe tal elipse.

11. Seja σ a transformação do exercício 10. Desenhe $\sigma(B)$ onde B é o retângulo $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

12. Seja $\sigma(u, v, w) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, w)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ e $0 \leq w \leq 1$. Desenhe a imagem de σ.

13. Seja σ a transformação do exercício anterior. Verifique que σ transforma o retângulo $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ e $w = 1$, em um círculo. Desenhe tal círculo.

14. (*Coordenadas esféricas*) Seja $P = (x, y, z)$ e considere a terna (θ, ρ, φ) onde θ é o ângulo entre o semi-eixo positivo Ox e o vetor $\overrightarrow{OP_1} = (x, y, 0)$, ρ o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ e φ o ângulo entre o semi-eixo positivo Oz e o vetor $\overrightarrow{OP}$. Os números θ, ρ e φ são as *coordenadas esféricas* do ponto P. Verifique



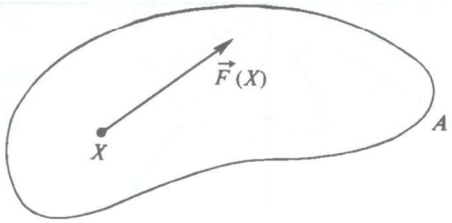
que as coordenadas esféricas (θ, ρ, φ) relacionam-se com as cartesianas do seguinte modo:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

15. Considere a transformação $\sigma(\theta, \rho, \varphi) = (x, y, z)$ onde $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ e $z = \rho \cos \varphi$.
   a) Desenhe $\sigma(B)$ onde B é o conjunto $\rho = \rho_1$ ($\rho_1 > 0$ constante), $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$.
   b) Desenhe $\sigma(B)$ onde B é o paralelepípedo $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$.

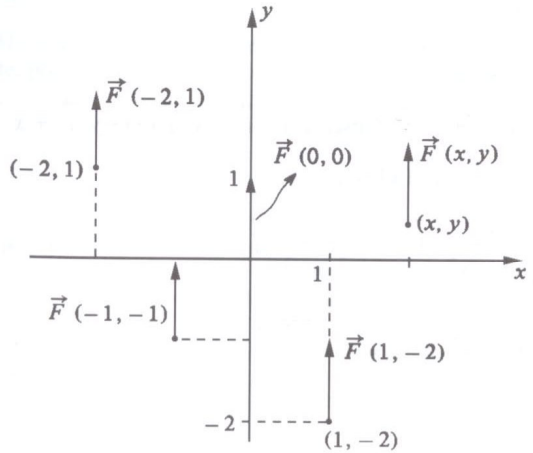
1.2. CAMPO VETORIAL

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e consideremos uma transformação F de A em $\mathbb{R}^m$. Muitas vezes, levando em conta o significado físico ou geométrico de F, será conveniente interpretar $F(X)$, $X \in A$, como um *vetor aplicado* em X. Sempre que quisermos interpretar $F(X)$ desta forma, referir-nos-emos a F como um *campo vetorial* e utilizaremos, então, a notação $\vec{F}$.



EXEMPLO 1. Represente geometricamente o campo vetorial $\vec{F}$ dado por $\vec{F}(x, y) = \vec{j}$.

Solução

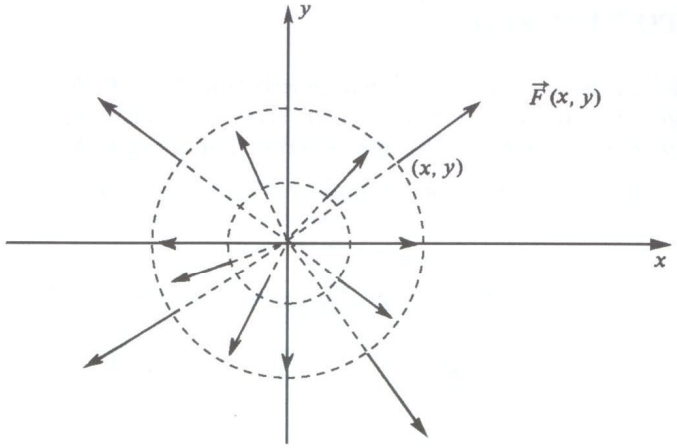


Trata-se de um campo vetorial constante; este campo associa, a cada ponto (x, y) de $\mathbb{R}^2$, o vetor $\vec{j} = (0, 1)$, aplicado em (x, y). ■

EXEMPLO 2. Faça a representação geométrica do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

Solução

$\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; segue que a intensidade do campo é a mesma nos pontos de uma mesma circunferência de centro na origem. Observe que a intensidade do campo no ponto (x, y) é igual ao raio da circunferência, de centro na origem, que passa por este ponto.



■

Exercícios 1.2

1. Represente geometricamente o campo vetorial dado.

   a) $\vec{v}(x, y) = x^2\,\vec{j}$

   b) $\vec{h}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}$

   c) $\vec{F}(x, y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$ (Observe: $(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) \cdot (-y\,\vec{i} + x\,\vec{j}) = 0$)

   d) $\vec{v}(x, y) = (1 - x^2)\,\vec{j}$, $|x| < 1$.

   e) $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j}$

   f) $\vec{v}(x, y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j}$

   g) $\vec{v}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$

2. Considere o campo vetorial $\vec{f}(x, y) = \vec{i} + (x - y)\,\vec{j}$. Desenhe $\vec{f}(x, y)$ nos pontos da reta

   a) $y = x$ *b)* $y = x - 1$ *c)* $y = x - 2$

3. Considere o campo vetorial $\vec{g}(x, y) = \vec{i} + xy\,\vec{j}$. Desenhe $\vec{g}(x, y)$ nos pontos da hipérbole $xy = 1$, com $x > 0$.

4. Seja $\vec{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = x + 2y$. Desenhe $\vec{F}(x, y)$, com (x, y) na reta $x + 2y = 1$.

5. Seja $\vec{F} = \nabla \varphi$, onde $\varphi(x, y) = y - x^2$. Desenhe $\vec{F}(x, y)$ com (x, y) na parábola $y = x^2$.

6. Seja $\vec{F} = \nabla f$, onde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Desenhe $\vec{F}(x, y, z)$, com $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$.

7. Seja $\vec{F} = \nabla f$, onde $f(x, y, z) = x + y + z$. Desenhe $\vec{F}(x, y, z)$, com $x + y + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$.

8. Seja $V(x, y) = x^2 + y^2$. Desenhe um campo $\vec{F}(x, y)$ para o qual se tenha $\nabla V(x, y) \cdot \vec{F}(x, y) \leq 0$.

9. Sejam V e $\vec{F}$ como no exercício anterior. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva tal que, para todo t no intervalo I, $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$. Prove que $g(t) = V(\gamma(t))$ é decrescente em I. Conclua que se $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$, for um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, então, para todo $t \geq t_0$, $t \in I$, $\gamma(t)$ pertencerá ao círculo $x^2 + y^2 \leq r^2$. Interprete geometricamente.

10. Sejam $V(x, y) = x^2 + y^2$ e $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$, com P e Q contínuas em $\mathbb{R}^2$, tais que, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$, $\nabla V(x, y) \cdot \vec{F}(x, y) < 0$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \neq (0, 0)$, $t \geq 0$, tal que $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$.

    a) Prove que $g(t) = V(\gamma(t))$ é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$. Interprete geometricamente.

    b) Sejam T, r e R, com $T > 0$ e $r < R$, reais dados. Suponha que $r \leq \|\gamma(t)\| \leq R$ para todo t em $[0, T]$. Seja M o valor máximo de $f(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot \vec{F}(x, y)$ na coroa $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. (Tal M existe, pois f é contínua e a coroa um conjunto compacto.) Prove que, para todo t em $[0, T]$,

$$\int_0^t \nabla V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \leq M\,t$$

    e, portanto, para todo t em $[0, T]$,

$$V(\gamma(t)) - V(\gamma(0)) \leq M\,t.$$

    c) Utilizando a última desigualdade do item *b* e observando que $M < 0$, prove que $\gamma(t)$ não pode permanecer na coroa $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ para todo $t \geq 0$.

    d) Prove que $\lim_{t \to +\infty} V(\gamma(t))$ existe e é zero.

    e) Prove que $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = (0, 0)$. Interprete geometricamente.

11. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e suponha que, para todo $t \geqslant 0$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - (x(t))^3 \\ \dot{y}(t) = x(t) - (y(t))^3. \end{cases}$$

Prove que $\gamma(t)$ tende a $(0, 0)$ quando $t \to +\infty$. (*Sugestão*: Utilize o exercício anterior.)

1.3. ROTACIONAL

Consideremos o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$ definido no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Suponhamos que P, Q e R admitam derivadas parciais em Ω. O *rotacional* de $\vec{F}$, que se indica por rot $\vec{F}$, é o campo vetorial definido em Ω e dado por

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

A expressão acima pode ser lembrada facilmente representando-a pelo "determinante":

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Os "produtos" que ocorrem nos "determinantes" de 2.ª ordem devem ser interpretados como derivadas parciais: por exemplo, o "produto" de $\dfrac{\partial}{\partial y}$ por R é a derivada parcial $\dfrac{\partial R}{\partial y}$.

Podemos, ainda, expressar rot $\vec{F}$ como um "produto vetorial":

$$\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \wedge \vec{F}$$

onde $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Consideremos, agora, o campo vetorial de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, Ω aberto, dado por $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$ e suponhamos que P e Q admitem derivadas parciais em Ω. Neste caso, o rotacional de $\vec{F}$ é a transformação de Ω em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & O \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

EXEMPLO 1. Seja $\vec{F}(x, y, z) = xy\,\vec{i} + yz^2\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$. Calcule rot $\vec{F}$.

Solução

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz^2 & xyz \end{vmatrix} = (xz - 2yz)\,\vec{i} + (0 - yz)\,\vec{j} + (0 - x)\,\vec{k}$$

ou seja

$$\text{rot}\,\vec{F} = z(x - 2y)\,\vec{i} - yz\,\vec{j} - x\,\vec{k}. \qquad \blacksquare$$

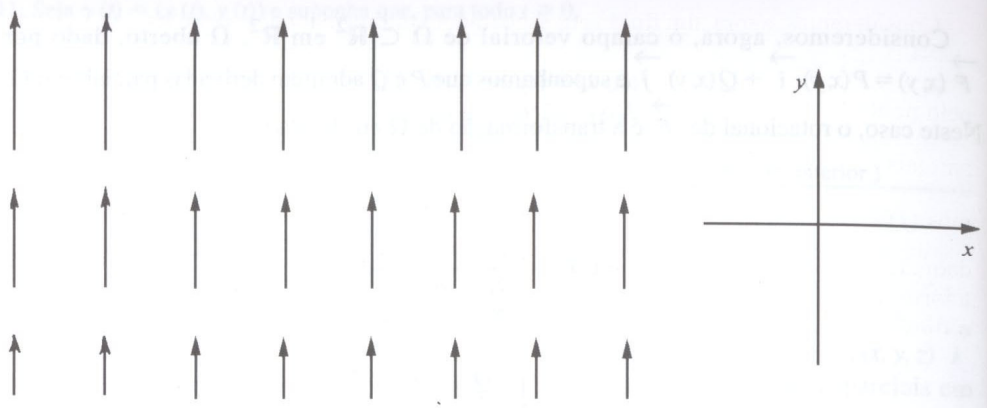
EXEMPLO 2. Seja $\vec{F}(x, y) = Q(x, y)\,\vec{j}$. Suponha que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$.

a) Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas.

b) Calcule rot $\vec{F}$.

Solução

a) Como, para todo (x, y), $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$, segue que Q não depende de x, isto é, Q é constante sobre cada reta paralela ao eixo x.



O campo acima satisfaz as condições dadas. Sugerimos ao leitor desenhar outros campos que satisfaçam as condições dadas.

b) rot $\vec{F}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\ \vec{k} = \vec{0}$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ■

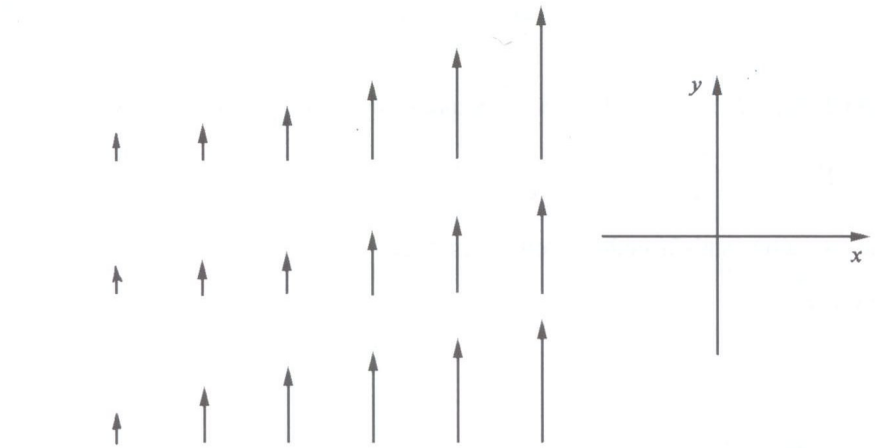
EXEMPLO 3. Seja $\vec{F}(x, y) = Q(x, y)\ \vec{j}$. Suponha que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) > 0$.

a) Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas.

b) Calcule rot $\vec{F}$.

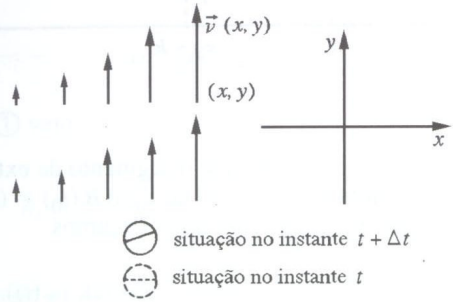
Solução

a) Segue da hipótese que, para cada y fixo, a função $x \mapsto Q(x, y)$ é estritamente crescente, isto é, $Q(x, y)$ é estritamente crescente sobre cada reta paralela ao eixo x.



b) rot $\vec{F}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\ \vec{k} \neq \vec{0}$, para todo (x, y). ■

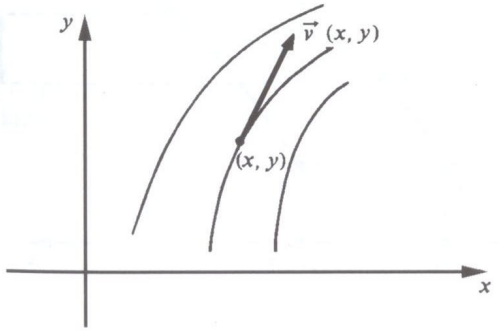
Consideremos, agora, um fluido em escoamento bidimensional com *campo de velocidade* $\vec{v}(x, y) = Q(x, y)\ \vec{j}$. ($\vec{v}(x, y)$ é a velocidade com que uma partícula do fluido passa pelo ponto (x, y).) Observe que as trajetórias descritas pelas partículas do fluido são retas paralelas ao eixo y. Suponhamos que rot $\vec{v}(x, y) \neq (0, 0)$. Para fixar o raciocínio, suponhamos $Q(x, y) > 0$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) > 0$. O campo de velocidade $\vec{v}(x, y)$ tem, então, o aspecto daquele do exemplo anterior. É *razoável* esperar, então, que "qualquer pequena coisa" (com a forma de um pequeno disco) que flutue sobre o fluido *gire* à medida que se desloca sobre o fluido.



Consideremos novamente um fluido em escoamento bidimensional com *campo de velocidade*

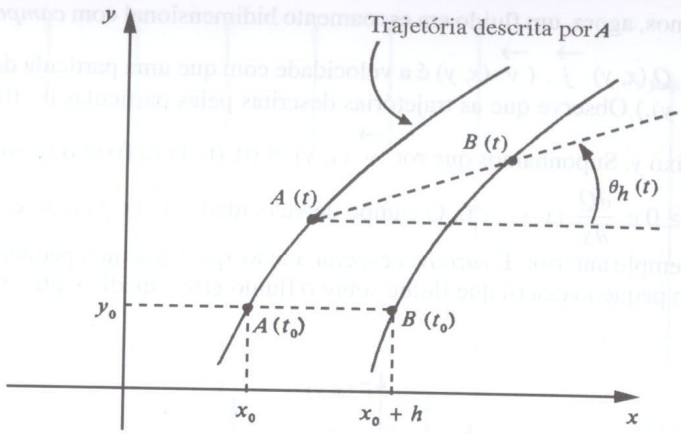
$$\vec{v}(x, y) = P(x, y)\ \vec{i} + Q(x, y)\ \vec{j}.$$

As componentes P e Q são supostas de classe C^1.



Nosso objetivo a seguir é dar uma interpretação para a componente $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ do rotacional de $\vec{v}$.

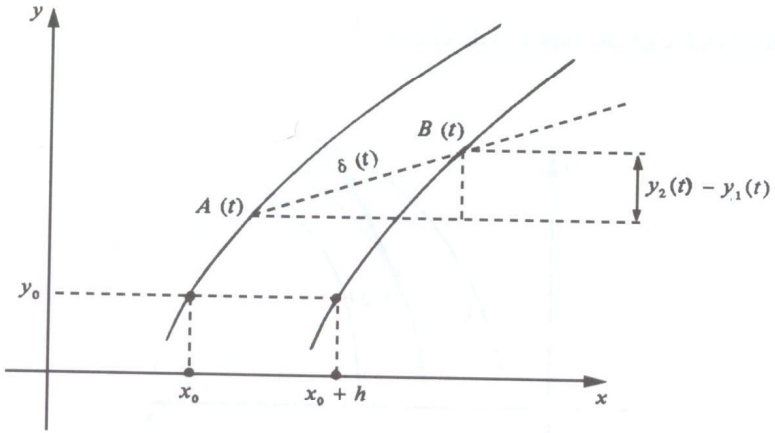
Sejam A e B duas partículas do fluido e suponhamos que no instante t_0 elas ocupem as posições (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0)$, respectivamente, com $h > 0$. Indiquemos por $A(t)$ e $B(t)$ as posições ocupadas pelas partículas num instante t qualquer.



Seja $\theta_h(t)$ o ângulo (medido em radianos) que o segmento de extremidades $A(t)$ e $B(t)$ forma com o segmento de extremidades $A(t_0) = (x_0, y_0)$ e $B(t_0) = (x_0 + h, y_0)$. (O sentido positivo para a contagem do ângulo é o anti-horário.) Façamos

$$A(t) = (x_1(t), y_1(t)) \text{ e } B(t) = (x_2(t), y_2(t)).$$

Seja $\delta(t)$ a distância entre $A(t)$ e $B(t)$. Observe que, no instante t_0, $\delta(t_0) = h$.



Temos:

$$\delta(t) \operatorname{sen} \theta_h(t) = y_2(t) - y_1(t).$$

Derivando em relação a t, obtemos:

$$\text{①} \qquad \dot{\delta}(t) \operatorname{sen} \theta_h(t) + \delta(t)\, \dot{\theta}_h(t) \cos \theta_h(t) = \dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t).$$

No instante t_0 temos:

$$\text{②} \qquad \theta_h(t_0) = 0,\ \delta(t_0) = h,\ \dot{y}_2(t_0) = Q(x_0 + h, y_0) \text{ e } \dot{y}_1(t_0) = Q(x_0, y_0).$$

Observe que $\dot{y}_2(t_0)$ é a componente vertical da velocidade de B no instante t_0; logo,

$$\dot{y}_2(t_0) = Q(x_0 + h, y_0).$$

Da mesma forma,

$$\dot{y}_1(t_0) = Q(x_0, y_0).$$

Substituindo ② em ① vem:

$$\text{③} \qquad \dot{\theta}_h(t_0) = \frac{Q(x_0 + h, y_0) - Q(x_0, y_0)}{h}$$

que é a *velocidade angular* do segmento de extremidades $A(t)$ e $B(t)$, no instante t_0.

Segue de ③ que

$$\lim_{h \to 0} \dot{\theta}_h(t_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Assim, para $h > 0$ suficientemente pequeno,

$$\text{④} \qquad \dot{\theta}_h(t_0) \cong \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Observamos que se o movimento for *rígido* (isto é, a distância entre as partículas mantém-se constante durante o movimento) e com velocidade angular ω, então, para todo $h > 0$,

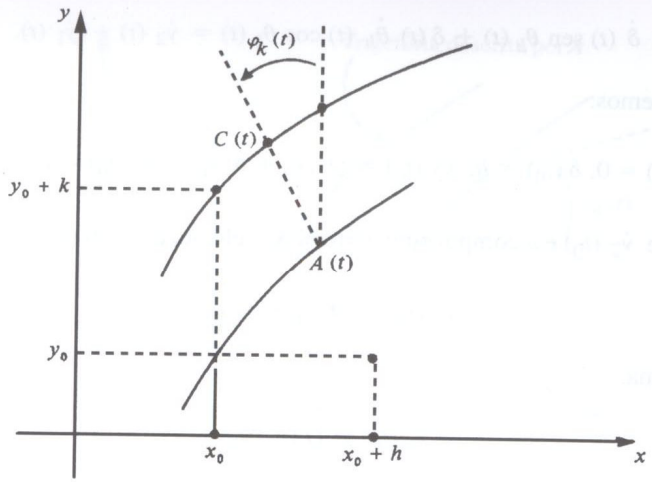
$$\dot{\theta}_h(t_0) = \omega$$

e, portanto,

$$\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Consideremos, agora, uma outra partícula C que no instante t_0 ocupe a posição

$$C(t_0) = (x_0, y_0 + k).$$



No instante t_0, $C(t_0) = (x_0, y_0 + k)$ e $A(t_0) = (x_0, y_0)$. Façamos $C(t) = (x_3(t), y_3(t))$. Sendo $\delta_1(t)$ a distância entre $C(t)$ e $A(t)$, vem:

$$\delta_1(t) \operatorname{sen} \varphi_k(t) = x_1(t) - x_3(t).$$

Deixamos a seu cargo concluir que

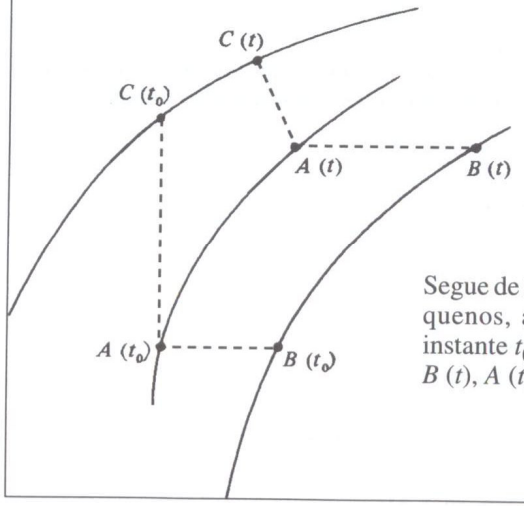
$$\dot{\varphi}_k(t_0) = -\frac{P(x_0, y_0 + k) - P(x_0, y_0)}{k}$$

e, portanto,

$$\lim_{k \to 0} \dot{\varphi}_k(t_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Para k suficientemente pequeno

⑤ $$\dot{\varphi}_k(t_0) \cong -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$



Segue de ④ e ⑤ que, para h e k suficientemente pequenos, a *soma das velocidades angulares,* no instante t_0, dos segmentos de extremidades $A(t)$ e $B(t)$, $A(t)$ e $C(t)$ é aproximadamente

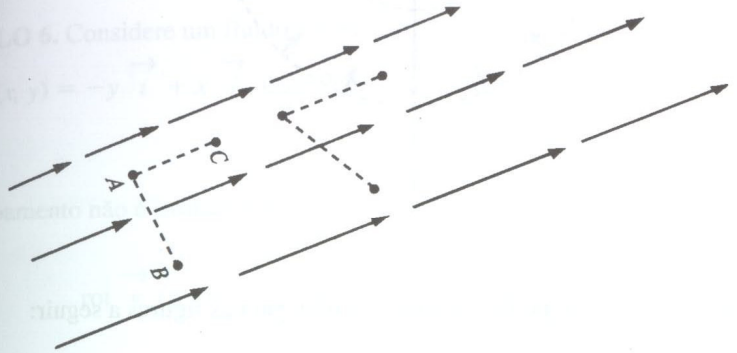
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Observamos que chegaríamos ao mesmo resultado obtido acima se, no instante t_0, os vetores $B(t_0) - A(t_0)$ e $C(t_0) - A(t_0)$ fossem ortogonais, mas não necessariamente paralelos aos eixos coordenados. (Veja Exercício 7.)

Se o movimento for *rígido* com velocidade angular ω, teremos

$$2\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ ou } \omega = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)\right].$$

EXEMPLO 4. Suponhamos que a representação geométrica do campo $\vec{v}(x, y)$ tenha o seguinte aspecto.



Observe que as trajetórias descritas pelas partículas são retas. O segmento de extremidades A e C desloca com velocidade angular nula, enquanto a do segmento AB é não-nula. Devemos esperar então rot $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Seja $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ um campo vetorial qualquer; dizemos que $\vec{F}$ é *irrotacional* se e somente se rot $\vec{F} = \vec{0}$ em Ω.

$$\boxed{\vec{F} \text{ irrotacional} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}.} \quad \blacksquare$$

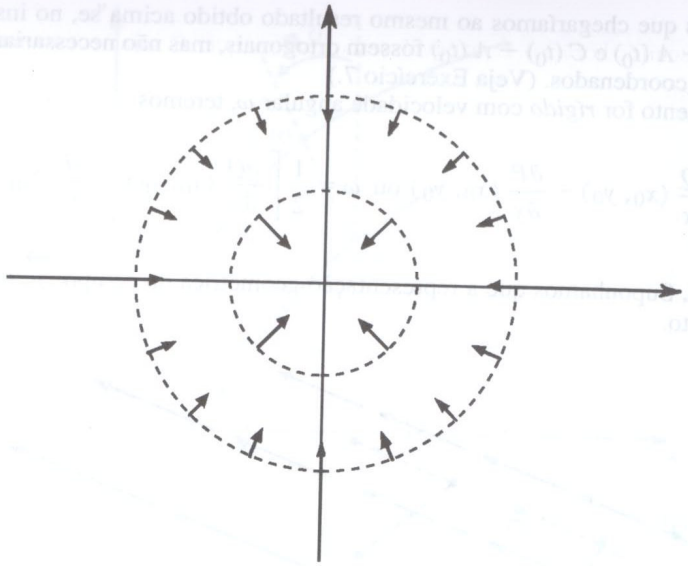
EXEMPLO 5. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = -\dfrac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

a) Desenhe o campo.

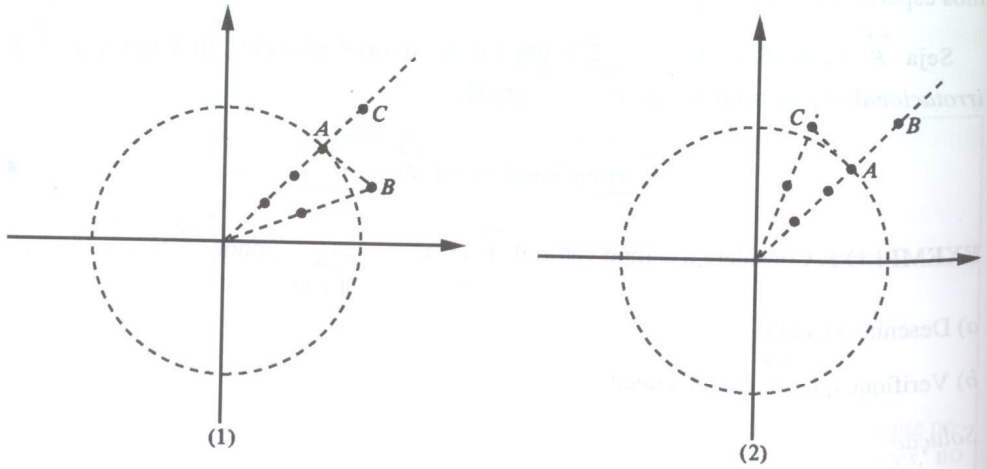
b) Verifique que $\vec{F}$ é irrotacional.

Solução

a) $\|\vec{F}(x, y)\| = \dfrac{1}{\|\vec{r}\|}$ o que significa que a intensidade de $\vec{F}$ em (x, y) é o inverso da distância deste ponto à origem. Observe que a intensidade de $\vec{F}$ é constante sobre cada circunferência de centro na origem. O sentido de $\vec{F}(x, y)$ é do ponto (x, y) para a origem.



b) Imagine $\vec{F}$ como um campo de velocidade e olhe para as figuras a seguir:



Na situação (1), o segmento determinado pelas partículas A e B se desloca com velocidade angular positiva (sentido anti-horário), enquanto o determinado por A e C se desloca com velocidade angular nula. Na situação (2), o segmento determinado por A e B se desloca com velocidade angular nula, enquanto o determinado por A e C se desloca com velocidade angular negativa (sentido horário). É razoável, então, esperar que $\vec{F}$ seja irrotacional (por quê?). E de fato o é, pois:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-x}{x^2+y^2} & \dfrac{-y}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right] \vec{k} = \vec{0}.$$

■

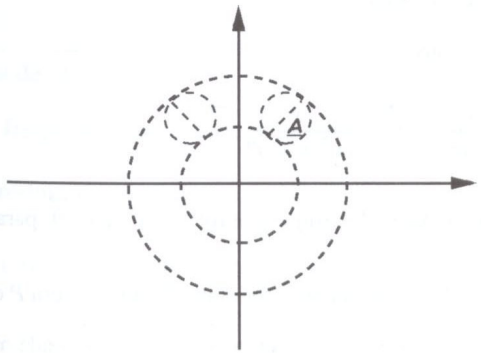
EXEMPLO 6. Considere um fluido em escoamento bidimensional com campo de velocidade $\vec{v}(x, y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$. Calcule rot $\vec{v}$ e interprete.

Solução

O escoamento não é irrotacional, pois,

$$\text{rot } \vec{v}\,(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right] \vec{k} = 2\,\vec{k} \neq \vec{0}.$$

Observe que $\vec{v}\,(x, y)$ é tangente, em (x, y), à circunferência, de centro na origem, que passa por este ponto. *As partículas do fluido descrevem circunferências de centro na origem.* A velocidade escalar da partícula que se encontra na posição (x, y) é $\| \vec{v}\,(x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Segue que a velocidade angular da partícula que se encontra na posição (x, y) é 1 (radiano por unidade de tempo): *todas as partículas do fluido estão girando em torno da origem com a mesma velocidade angular.* Trata-se de um movimento rígido com velocidade angular 1.



Observe que o círculo A gira em torno da origem, com um movimento de rotação em torno do seu próprio centro.

■

Exercícios 1.3

1. Calcule o rotacional.

   a) $\vec{F}(x, y, z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$
   b) $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$
   c) $\vec{F}(x, y, z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$
   d) $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\,\vec{i}$
   e) $\vec{F}(x, y) = xy\,\vec{i} - x^2\,\vec{j}$

2. Considere o *campo de força central* $\vec{g}(x, y) = f(\|\vec{r}\|)\,\vec{r}$ onde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável e $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Calcule rot $\vec{g}$.

3. Seja $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aberto, de classe C^2. Verifique que o campo vetorial $\vec{F} = \nabla\varphi$ é irrotacional.

4. Considere o escoamento bidimensional na região $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < x < 3, y \in \mathbb{R}\}$ com velocidade $\vec{v}(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\vec{j}$.

   a) Desenhe tal campo de velocidade.
   b) O escoamento é irrotacional?

5. Considere o escoamento bidimensional

$$\vec{v}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}.$$

   a) Desenhe tal campo.

   b) Calcule rot $\vec{v}$ e interprete.

6. Considere o escoamento

$$\vec{v}(x, y) = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^\alpha}\,\vec{i} + \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}\,\vec{j}.$$

   onde $\alpha > 0$ é uma constante. Verifique que rot $\vec{v}(x, y) \neq \vec{0}$ para $\alpha \neq 1$.

7. Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, com P e Q diferenciáveis. Sejam $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$ e $\vec{v} = -\operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$, onde $\alpha \neq 0$ é um real dado. Seja (s, t) as coordenadas de (x, y) no sistema de coordenadas $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Assim $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$. Observe que $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ é equivalente a $x = s\cos\alpha - t\operatorname{sen}\alpha$ e $y = s\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha$.

   a) Mostre que

$$\vec{F}(x, y) = [P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\operatorname{sen}\alpha]\,\vec{u} + [Q(x, y)\cos\alpha - P(x, y)\operatorname{sen}\alpha]\,\vec{v}$$

   b) Seja

$$\vec{F}_1(s, t) = P_1(s, t)\,\vec{u} + Q_1(s, t)\,\vec{v}$$

   onde

$$P_1(s, t) = P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\operatorname{sen}\alpha$$

   e

$$Q_1(s, t) = Q(x, y)\cos\alpha - P(x, y)\operatorname{sen}\alpha$$

   com $x = s\cos\alpha - t\operatorname{sen}\alpha$ e $y = s\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha$. Mostre que

$$\frac{\partial Q_1}{\partial s}(s, t) - \frac{\partial P_1}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

   onde $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$. Interprete. (Observe que $\vec{F}_1(s, t) = \vec{F}(x, y)$ onde $(x, y) = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$.)

1.4. DIVERGENTE

Seja $\vec{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ um campo vetorial definido no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e suponhamos que as componentes $F_1, F_2, \ldots, F_n$ admitem derivadas parciais em Ω. O *campo escalar*

$$\operatorname{div}\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

denomina-se *divergente* de $\vec{F}$.

A notação $\nabla \cdot \vec{F}$ é freqüentemente usada para indicar o divergente de $\vec{F}$; interpretamos $\nabla \cdot \vec{F}$ como o "produto escalar" do vetor $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ pelo campo vetorial $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, onde o "produto" de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por F_i deve ser entendido como a derivada parcial $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (F_1, F_2, \ldots, F_n)$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

O símbolo $\nabla \varphi$ já foi utilizado anteriormente (Vol. 2) para representar o gradiente do campo escalar $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right).$$

Deste modo, o gradiente, divergente e rotacional podem ser representados simbolicamente pelos "produtos" $\nabla \varphi$, $\nabla \cdot \vec{F}$ e $\nabla \wedge \vec{F}$, respectivamente.

Vamos destacar, a seguir, as expressões do divergente nos casos $n = 2$ e $n = 3$. Se

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$$

então

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).}$$

Se

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

então

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z).}$$

EXEMPLO 1. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z)\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + (2x + 3y + z^2)\,\vec{k}$. Calcule $\operatorname{div} \vec{F}$.

Solução

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + z) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x + 3y + z^2) \\ &= 2x - 2y + 2z. \end{aligned}$$

Assim

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 2x - 2y + 2z. \quad \blacksquare$$

NÃO SE ESQUEÇA: $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)$ é *número*.

EXEMPLO 2. Calcule $\nabla \cdot \nabla \varphi$, onde $\varphi(x, y) = x^2 y$.

Solução

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\vec{j} = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}.$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (2xy, x^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) \\ &= 2y \end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 2y = \operatorname{div}(\nabla \varphi).$$

Consideremos o campo escalar $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e suponhamos que φ admita derivadas parciais até a 2.ª ordem no aberto Ω. O campo escalar

$$\nabla^2 \varphi: \Omega \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi$$

denomina-se *laplaciano* de φ. Assim, o laplaciano de φ nada mais é do que o divergente do gradiente de φ. Como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} \end{aligned}$$

resulta que o laplaciano de φ é dado por

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 3. Seja $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule o laplaciano de φ.

Solução

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 6. \quad \blacksquare$$

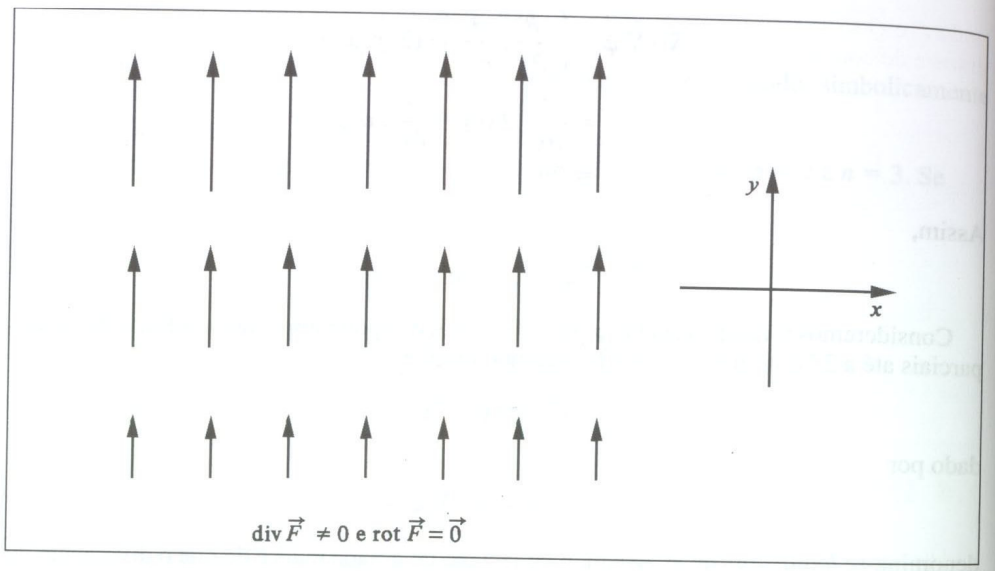
EXEMPLO 4. Seja $\vec{F}(x, y) = Q(x, y)\,\vec{j}$. Suponha que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y) > 0$.

a) Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas.

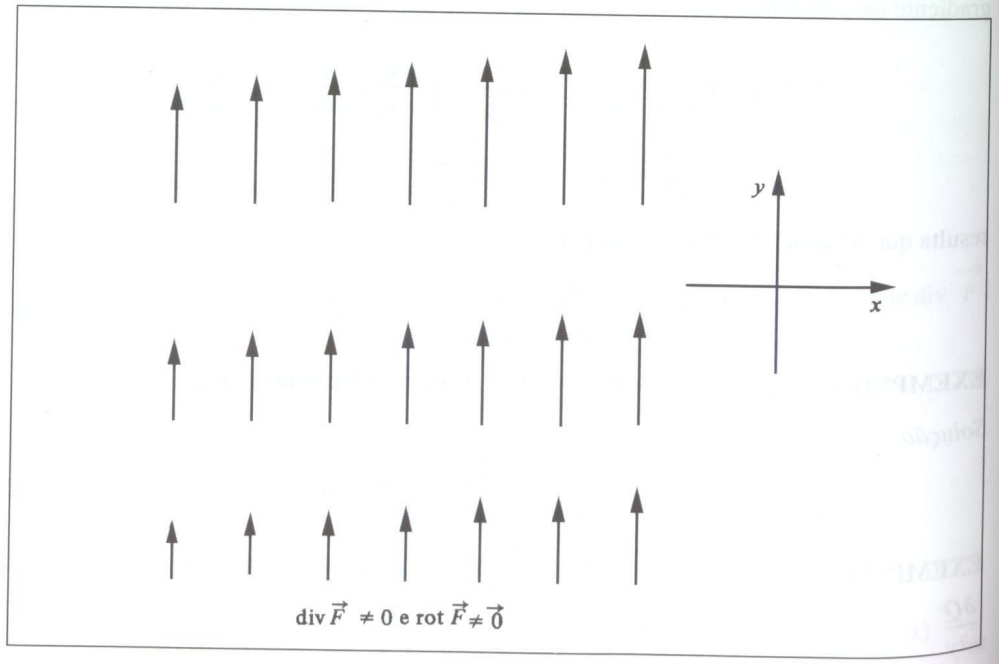
b) Calcule div $\vec{F}$.

Solução

a) Segue da hipótese que, para cada x fixo, a função $y \mapsto Q(x, y)$ é estritamente crescente, isto é, $Q(x, y)$ é estritamente crescente sobre cada reta paralela ao eixo y. Os campos dados a seguir satisfazem as condições dadas.



$\text{div}\,\vec{F} \neq 0$ e $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$



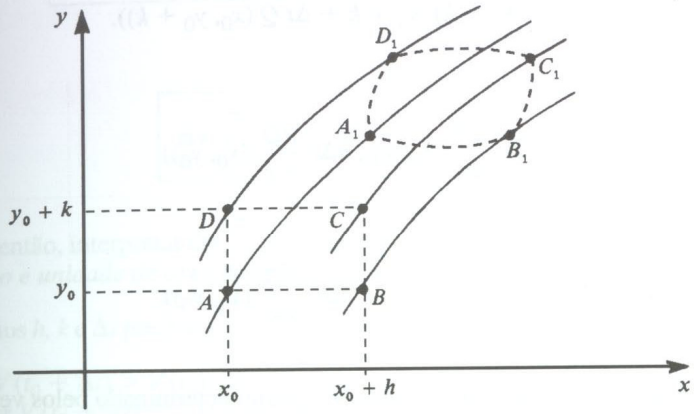
$\text{div}\,\vec{F} \neq 0$ e $\text{rot}\,\vec{F} \neq \vec{0}$

b) $\text{div}\,\vec{F} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$

EXEMPLO 5. (*Interpretação para o divergente.*) Consideremos um fluido em escoamento bidimensional com campo de velocidade

$$\vec{v}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$$

onde P e Q são supostas de classe C^1. Consideremos um retângulo de lados paralelos aos eixos e de comprimentos h e k suficientemente pequenos.



O fluido que no instante t_0 encontra-se no retângulo $ABCD$, no instante $t_0 + \Delta t$ encontrar-se-á no "paralelogramo curvilíneo" $A_1B_1C_1D_1$. Indiquemos por $V(t_0 + \Delta t)$ a área ocupada pelo fluido que, no instante t_0, ocupa o retângulo $ABCD$. Temos $V(t_0) = hk$. A seguir, vamos avaliar $V(t_0 + \Delta t)$, para Δt suficientemente pequeno, onde $V(t_0 + \Delta t)$ é a área do "paralelogramo curvilíneo" $A_1B_1C_1D_1$. Como estamos supondo h, k e Δt suficientemente pequenos, a área do "paralelogramo curvilíneo" $A_1B_1C_1D_1$ é aproximadamente a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{A_1D_1}$. Temos:

$$P(x_0 + h, y_0) \cong P(x_0, y_0) + h\,\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0),$$

①

$$Q(x_0 + h, y_0) \cong Q(x_0, y_0) + h\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0),$$

e

$$P(x_0, y_0 + k) \cong P(x_0, y_0) + k\,\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$Q(x_0, y_0 + k) \cong Q(x_0, y_0) + k\,\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).$$

(**Observação.** $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{Q(x_0, y_0 + k) - Q(x_0, y_0)}{k}$. Daí para k suficientemente pequeno

Temos, então

$$\text{volume de } B = \iint_K \left[\int_{x^2+y^2}^{2x+2y-1} dz \right] dx\, dy$$

onde K é o círculo $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Como

$$2x + 2y - 1 - x^2 - y^2 = 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2$$

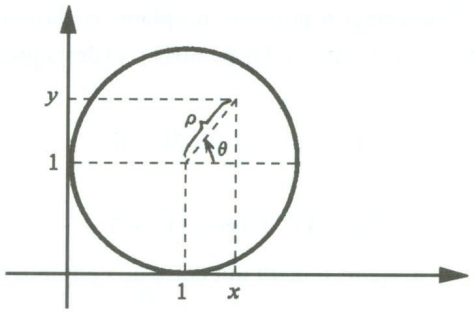
resulta

$$\text{volume de } B = \iint_K [1 - (x-1)^2 - (y-1)^2]\, dx\, dy.$$

Façamos

$$\begin{cases} x - 1 = \rho \cos\theta \\ \\ y - 1 = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \rho \leq 1$$

o que significa que estamos passando para coordenadas polares, com pólo no ponto (1, 1).



Temos, então,

$$\text{volume de } B = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - \rho^2)\, \rho\, d\rho \right] d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exercícios 5.4

1. Calcule

a) $\iiint_B xyz\, dx\, dy\, dz$ onde B é o paralelepípedo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ e $1 \leq z \leq 2$.

b) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$.

c) $\iiint_B \sqrt{1 - z^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq y \leq z$.

d) $\iiint_B \sqrt{1 - z^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é o cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

e) $\iiint_B dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$.

f) $\iiint_B (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ onde B é o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

g) $\iiint_B dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x + 2y - 1$.

h) $\iiint_B y\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + 4y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

i) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, e $x + y \leq z \leq x + y + 1$.

j) $\iiint_B 2z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

l) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 - y^2 \leq z \leq 1 - 2y^2$.

m) $\iiint_B e^{x^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$ e $0 \leq z \leq 1$.

n) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq x + y$.

o) $\iiint_B 2z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

p) $\iiint_B 2z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

q) $\iiint_B \cos z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ e $x - y \leq z \leq x + y$.

r) $\iiint_B (y - x)\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $4 \leq x + y \leq 8$, $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}$, $y > x$ e $0 \leq z \leq \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x+y}}$.

2. Calcule o volume do conjunto dado. (Sugerimos ao leitor desenhar o conjunto.)

a) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 5 - x^2 - 3y^2$.

b) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$ e $0 \leq z \leq x + y^2$.

c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

d) $x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1$.

e) $x^2 + y^2 \leq 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1$.

g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ $(a > 0, b > 0$ e $c > 0)$.

h) $x^2 + y^2 \leq z \leq 4x + 2y$.

i) $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.

j) $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - 3x^2 - 3y^2}$.

l) $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$, $z \geq 0$ $(a > 0)$.

m) $x^2 + y^2 \leq a^2$ e $x^2 + z^2 \leq a^2$ $(a > 0)$.

n) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ e $z \geq \frac{a}{2}$ $(a > 0)$.

o) $x^2 \leq z \leq 1 - y$ e $y \geq 0$.

p) $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2a^2 - x^2$ $(a > 0)$.

q) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ e $z \geq x^2 + y^2$.

r) $4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4$ e $4x^2 + 9y^2 \leq 1$.

3. Calcule a massa do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$, cuja densidade no ponto (x, y, z) é a soma das coordenadas.

4. Calcule a massa do sólido $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = x + y$.

5. Calcule a massa do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 2$, sabendo que a densidade no ponto (x, y, z) é o dobro da distância do ponto ao plano $z = 0$.

6. Calcule a massa do cone $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$, sendo a densidade no ponto (x, y, z) proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo z.

7. Sejam $B \subset \mathbb{R}^3$ e $f(x, y, z)$ uma função contínua em B. Seja (x_0, y_0, z_0) um ponto interior de B. Para cada natural n, seja B_n uma bola de centro (x_0, y_0, z_0) e raio r_n, com $B_n \subset B$. Suponha que r_n tende a zero quando n tende a $+\infty$. Seja V_n o volume de B_n. Prove que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{V_n} \iiint_{B_n} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(x_0, y_0, z_0)$$

(*Sugestão:* Utilize o teorema do valor médio para integrais.)

8. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ e sejam f e g duas funções contínuas em B. Suponha que, para toda bola $B_1 \subset B$,

$$\iiint_{B_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_1} g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Prove que $f(x, y, z) = g(x, y, z)$ em todo ponto (x, y, z) interior a B.

9. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola fechada e seja $f: B \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x, y, z) > 0$ em B. Prove que $\iiint_B f(x, y, z)\, dV > 0$.

10. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado, com fronteira de conteúdo nulo, e seja $f: B \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x, y, z) \geq 0$ em B. Suponha que $\iiint_B f(x, y, z)\, dV = 0$. Prove que $f(x, y, z) = 0$ em todo ponto interior de B.

11. Calcule $\iiint_B x^2\, dx\, dy\, dz$, onde B é o conjunto de todos (x, y, z) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $z = 2$. Compare com o Exercício 10 e explique.

5.5. Mudança de Variáveis na Integral Tripla. Coordenadas Esféricas

O teorema de mudança de variáveis na integral dupla estende-se sem nenhuma modificação para integrais triplas.

Teorema (*de mudança de variáveis na integral tripla*). Seja $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω aberto, de classe C^1, sendo φ dada por $(x, y, z) = \varphi(u, v, w)$, com $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$. Seja B_{uvw} contido em Ω, B_{uvw} compacto e com fronteira de conteúdo nulo e seja B a imagem de B_{uvw} pela φ. Suponhamos que $\varphi(\mathring{B}_{uvw}) = \mathring{B}$ e que φ seja inversível no interior de B_{uvw}. Suponhamos, ainda, que $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$ para todo $(u, v, w) \in \mathring{B}_{uvw}$. Nestas condições, se $f(x, y, z)$ for integrável em B, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{uvw}} f(\varphi(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw.$$

EXEMPLO 1. Calcule $\iiint_B \dfrac{\operatorname{sen}(x + y - z)}{x + 2y + z}\, dx\, dy\, dz$, onde B é o paralelepípedo $1 \leq x + 2y + z \leq 2$, $0 \leq x + y - z \leq \dfrac{\pi}{4}$ e $0 \leq z \leq 1$.

Solução

Façamos a mudança de variáveis: $u = x + y - z$, $v = x + 2y + z$ e $w = z$. Temos:

$$\begin{cases} u = x + y - z \\ v = x + 2y + z \\ w = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2u - v + 3w \\ y = -u + v - 2w \\ z = w \end{cases} \quad \text{(Verifique.)}$$

Segue que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = 1. \text{ (Verifique.)}$$

Assim,

$$\boxed{dx\, dy\, dz = du\, dv\, dw}$$

B_{uvw} é evidentemente o paralelepípedo

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{4},\ 1 \leq v \leq 2 \text{ e } 0 \leq w \leq 1. \text{ (Por quê?)}$$

Temos, então: $\left(K \text{ é o retângulo } 0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{4},\ 1 \leq v \leq 2\right)$

$$\iiint_B \frac{\operatorname{sen}(x + y - z)}{x + 2y + z}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{uvw}} \frac{\operatorname{sen} u}{v}\, du\, dv\, dw = \iint_K \left[\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} u}{v}\, dw\right] du\, dv$$

$$= \iint_K \frac{\operatorname{sen} u}{v}\, du\, dv = \int_1^2 \frac{1}{v}\, dv \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} u\, du = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ln 2,$$

ou seja,

$$\iiint_B \frac{\operatorname{sen}(x + y - z)}{x + 2y + z}\, dx\, dy\, dz = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ln 2. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 2. Calcule o volume do paralelepípedo B dado no Exemplo 1.

Solução

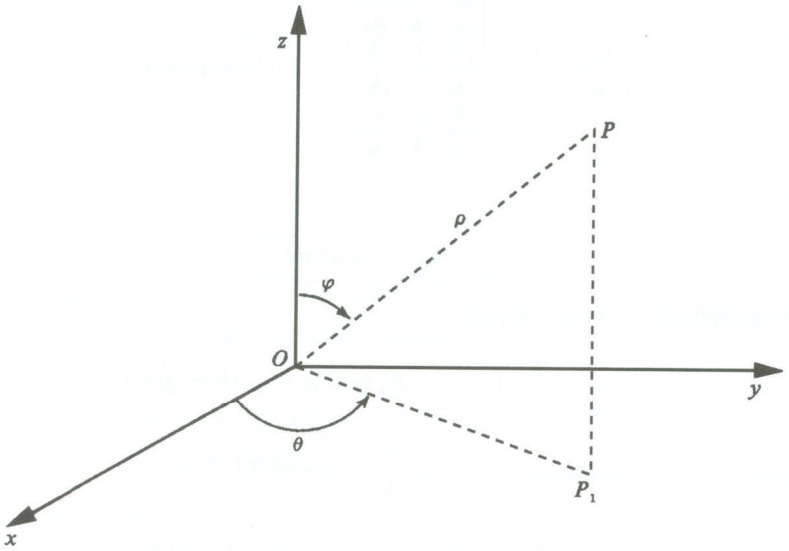
$$\text{volume de } B = \iiint_B dx\, dy\, dz.$$

Utilizando a mudança de variáveis do Exemplo 1, vem:

$$\iiint_B dx\,dy\,dz = \iiint_{B_{uvw}} du\,dv\,dw = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du \int_1^2 dv \int_0^1 dw = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto, o volume de B é $\frac{\pi}{4}$ (unidades de volume). ■

EXEMPLO 3. (*Coordenadas esféricas.*) Cada ponto $P = (x, y, z)$ fica determinado pelas suas *coordenadas esféricas* (θ, ρ, φ), onde θ é o ângulo entre o vetor $\overrightarrow{OP_1} = (x, y, 0)$ e o semi-eixo positivo Ox, ρ o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP}$ e φ o ângulo entre o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o semi-eixo positivo Oz.



As coordenadas cartesianas (x, y, z) do ponto P e suas coordenadas esféricas relacionam-se do seguinte modo:

$$\text{①} \qquad \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

A seguir, vamos calcular o determinante jacobiano da transformação ①.

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\rho \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Assim,

$$\boxed{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, \varphi)} = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi}$$

Como este resultado irá ocorrer várias vezes, sugerimos ao leitor *decorá-lo.*

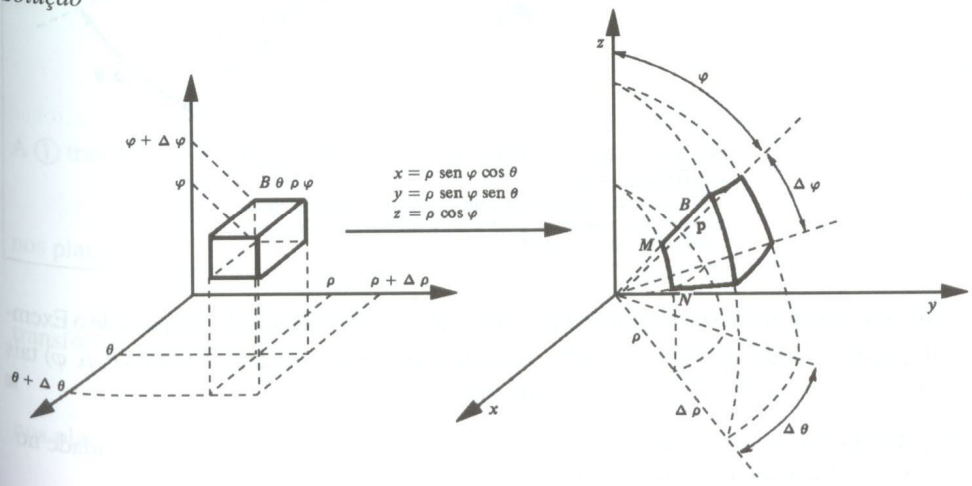
Seja $S = \left\{(\theta, \rho, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \pi,\ \rho \geq 0 \text{ e } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$; seja $B_{\theta\rho\varphi}$ um compacto, com fronteira de conteúdo nulo, contido em S. Observamos que a transformação dada por ① é inversível no interior de S e que, para todo (θ, ρ, φ) em $\mathring{B}_{\theta\rho\varphi}$, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, \varphi)} \neq 0$. Seja B a imagem de $B_{\theta\rho\varphi}$ pela transformação ①. Então, $\mathring{B}$ é a imagem de $\mathring{B}_{\theta\rho\varphi}$ pela transformação ① (verifique). Então, se f for contínua em B

$$\text{②} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \\ &\iiint_{B_{\theta\rho\varphi}} f(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\theta\, d\rho\, d\varphi \end{aligned}}$$ ■

EXEMPLO 4. Seja $B_{\theta\rho\varphi}$ um paralelepípedo de faces paralelas aos planos coordenados e de arestas $\Delta\theta$, $\Delta\rho$ e $\Delta\varphi$, contido no conjunto S acima. Seja B a imagem de $B_{\theta\rho\varphi}$ pela transformação $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ e $z = \rho \cos \varphi$. Mostre que existe $(\theta_1, \rho_1, \varphi_1)$ em $B_{\theta\rho\varphi}$ tal que

$$\text{volume de } B = \rho_1^2 \operatorname{sen} \varphi_1\, \Delta\theta\, \Delta\rho\, \Delta\varphi.$$

Solução



$$\text{volume de } B = \iiint_B dx\,dy\,dz.$$

Passando para coordenadas esféricas, obtemos:

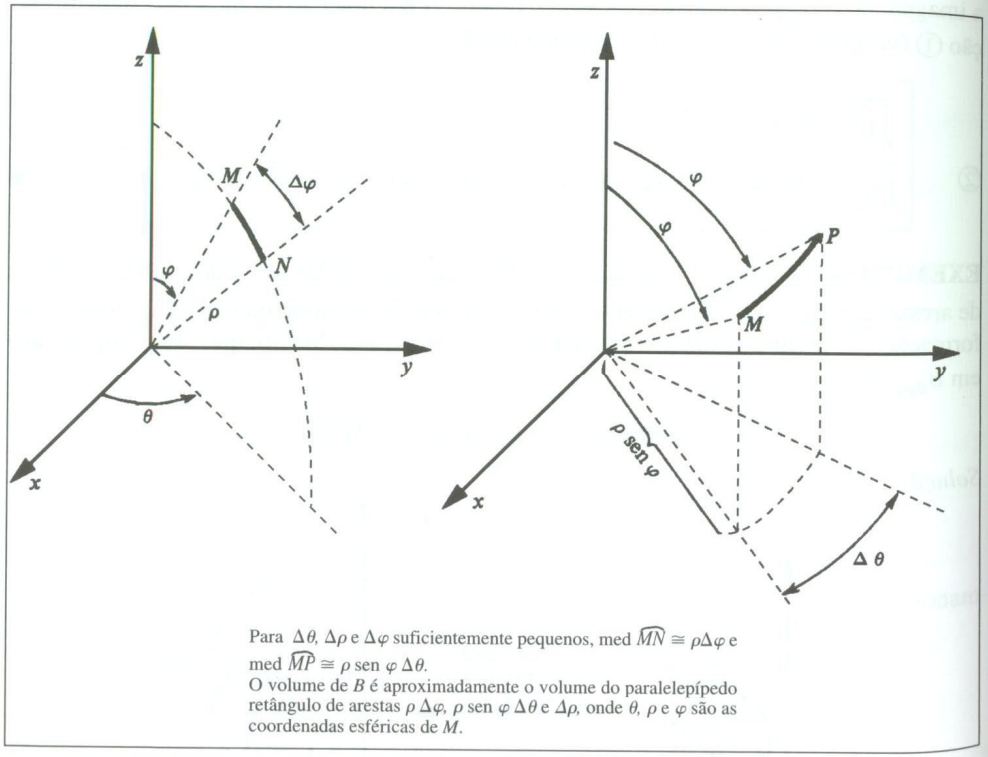
$$\iiint_B dx\,dy\,dz = \iiint_{B_{\rho\theta\varphi}} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\rho\, d\varphi.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $(\theta_1, \rho_1, \varphi_1)$ em $B_{\theta\rho\varphi}$ tal que

$$\iiint_{B_{\rho\theta\varphi}} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\rho\, d\varphi = \rho_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1\, \Delta\theta\, \Delta\rho\, \Delta\varphi.$$

(Observe que $\Delta\theta\,\Delta\rho\,\Delta\varphi$ é o volume de $B_{\theta\rho\varphi}$.) Portanto, existe $(\theta_1, \rho_1, \varphi_1)$ em $B_{\theta\rho\varphi}$ tal que

$$\text{volume de } B = \rho_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1\, \Delta\theta\, \Delta\rho\, \Delta\varphi.$$



Para $\Delta\theta$, $\Delta\rho$ e $\Delta\varphi$ suficientemente pequenos, med $\overline{MN} \cong \rho\Delta\varphi$ e med $\overline{MP} \cong \rho \operatorname{sen}\varphi\,\Delta\theta$.
O volume de B é aproximadamente o volume do paralelepípedo retângulo de arestas $\rho\,\Delta\varphi$, $\rho \operatorname{sen}\varphi\,\Delta\theta$ e $\Delta\rho$, onde θ, ρ e φ são as coordenadas esféricas de M.

Antes de passarmos ao próximo exemplo, observamos que a fórmula ② que precede o Exemplo 4 continua válida mesmo quando $B_{\theta\rho\varphi}$ estiver contido no conjunto de todos (θ, ρ, φ) tais que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\rho \geq 0$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$. (Verifique.) ■

EXEMPLO 5. Calcule a massa da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, supondo que a densidade no ponto (x, y, z) é igual à distância deste ponto à origem.

Solução

A massa M da esfera é

$$M = \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; dx\,dy\,dz$$

onde B é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Passando para coordenadas esféricas, obtemos

$$M = \iiint_{B_{\theta\rho\varphi}} \sqrt{\rho^2}\; \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\rho\, d\varphi$$

onde $B_{\theta\rho\varphi}$ é o paralelepípedo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Segue que

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \pi \text{ (unidades de massa).}$$ ■

EXEMPLO 6. Calcule o volume do conjunto de todos (x, y, z) tais que

$$1 \leq x + y + z \leq 3,\ x + y \leq z \leq x + y + 2,\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

Solução

Façamos a mudança de variáveis

$$\text{①} \qquad \begin{cases} u = z - x - y \\ v = x + y + z \\ w = x \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} x = w \\ y = \dfrac{1}{2}(-u + v - 2w) \\ z = \dfrac{1}{2}(u + v). \end{cases}$$

A ① transforma os planos

$$x + y + z = 1 \text{ e } x + y + z = 3$$

nos planos

$$v = 1 \text{ e } v = 3;$$

transforma os planos

$$z = x + y \text{ e } z = x + y + 2$$

nos planos

$$u = 0 \text{ e } u = 2;$$

transforma o plano $x = 0$ no plano $w = 0$; finalmente, transforma o plano $y = 0$ no plano

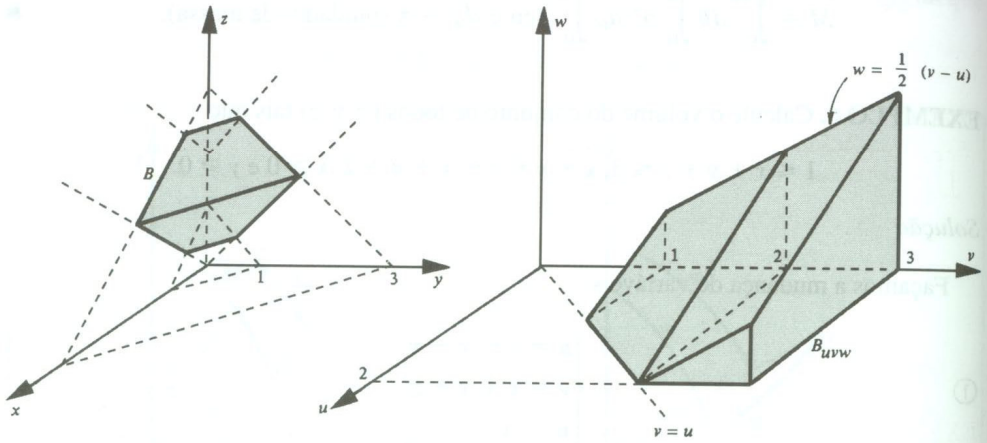
$$\begin{cases} u = z - x \\ v = x + z \\ w = x \end{cases}$$

ou seja

$$2w = v - u.$$

A condição $x \geqslant 0$ acarreta $w \geqslant 0$; a condição $y \geqslant 0$ acarreta

$$-2w - u + v \geqslant 0.$$



a ① transforma o conjunto B no conjunto B_{uvw}.

Temos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

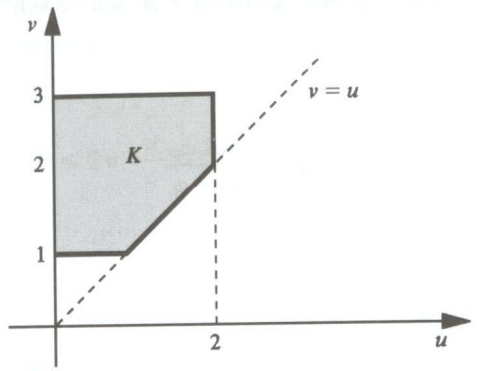
Assim

$$\iiint_B dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iiint_{B_{uvw}} du\,dv\,dw.$$

Portanto,

$$\text{volume } B = \frac{1}{2}\iint_K \left[\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} dw\right] du\,dv$$

onde K é o compacto



Temos

$$\iint_K \left[\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} dw\right] du\,dv = \int_1^2 \left[\int_0^v \frac{1}{2}(v-u)\,du\right] dv + \int_2^3 \left[\int_0^2 \frac{1}{2}(v-u)\,du\right] dv.$$

Logo,

$$\text{volume de } B = \frac{25}{24}. \text{ (Confira.)}$$ ■

EXEMPLO 7. Calcule

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\; dx\,dy\,dz$$

onde B é o conjunto de todos (x, y, z) tais que

$$x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solução

Vamos passar para coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

Temos

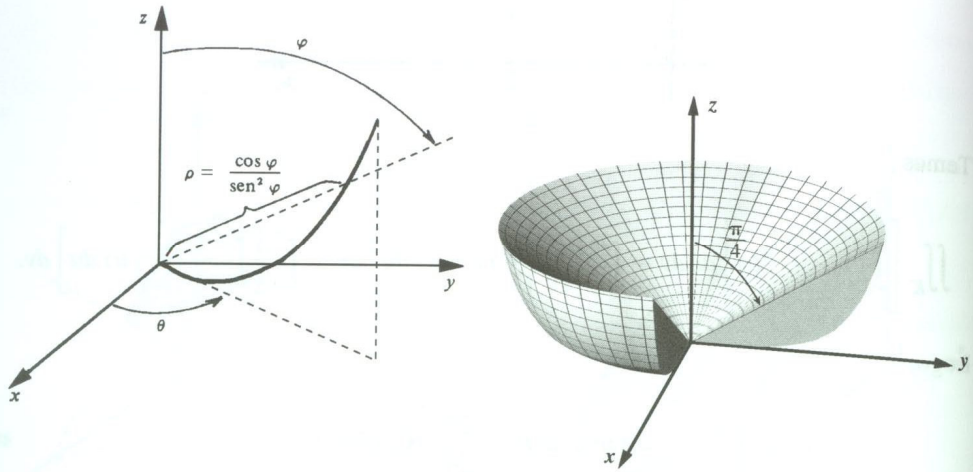
$$dx\,dy\,dz = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta.$$

Vejamos como fica a equação do parabolóide em coordenadas esféricas:

$$\rho \cos \varphi = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta$$

ou seja

$$\rho = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$



O conjunto B é obtido pela rotação da região hachurada, em torno do eixo z. (Observe que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é uma superfície cônica obtida pela rotação da reta

$$\begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$$

em torno do eixo z.)

Para cada (θ, φ) fixo, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, ρ deverá variar de 0 a $\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$. Temos

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{\theta\varphi\rho}} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta$$

onde $B_{\theta\varphi\rho}$ é o conjunto de todos (θ, φ, ρ) tais que

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Então

$$\iiint_{B_{\theta\varphi\rho}} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta = \iint_K \left[\int_0^{\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi}} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho \right] d\theta\, d\varphi$$

onde K é o retângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Segue que

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \varphi}{\operatorname{sen}^7 \varphi}\, d\varphi.$$

Fazendo $\varphi = \frac{\pi}{2} - u$, obtemos

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \varphi}{\operatorname{sen}^7 \varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^4 u}{\cos^7 u}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u (\sec^2 u - 1)^2\, du.$$

Para calcular a última integral, utilize a fórmula de recorrência

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx.$$

(Veja Exercício 2a da pág. 360 do Vol. 1, 5.ª edição.) ■

EXEMPLO 8. Calcule a massa do sólido

$$\text{①} \qquad z \geqslant 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z$$

sendo a densidade no ponto (x, y, z) igual à distância do ponto à origem.

Solução

$$\text{massa} = \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

onde B é o conjunto ①.

Solução

A equação do plano $z = 1$ em coordenadas esféricas é

$$\rho \cos \varphi = 1$$

ou seja

$$\rho = \frac{1}{\cos \varphi}$$

A equação da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ em coordenadas esféricas é

$$\rho^2 = 2\rho \cos \varphi,$$

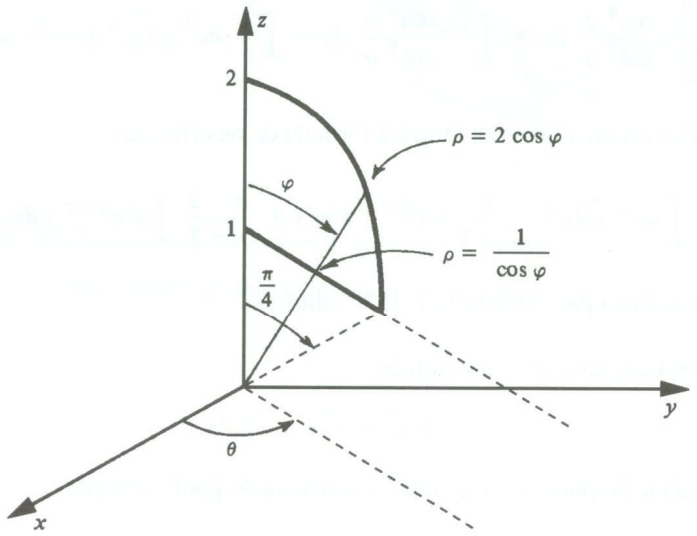
ou seja,

$$\rho = 2 \cos \varphi.$$

(Observe que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

que é uma superfície esférica de centro (0, 0, 1) e raio 1.)



Para cada (θ, φ) fixo, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, ρ deverá variar de $\frac{1}{\cos \varphi}$ até $2 \cos \varphi$. Temos, então

$$\text{massa} = \iint_K \left[\int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^{2 \cos \varphi} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho \right] d\theta \, d\varphi$$

onde K é o retângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

$$\text{massa} = \frac{1}{4} \iint_K \left[16 \cos^4 \varphi - \frac{1}{\cos^4 \varphi} \right] \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

ou seja

$$\text{massa} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[16 \cos^4 \varphi - \frac{1}{\cos^4 \varphi} \right] \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi.$$

Fazendo $u = \cos \varphi$ e, portanto, $du = -\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$ resulta

$$\text{massa} = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left[16u^4 - \frac{1}{u^4} \right] du.$$

O cálculo da integral fica para o leitor. ■

EXEMPLO 9. Calcule

$$\iiint_B z \, dx \, dy \, dz$$

onde B é o conjunto de todos (x, y, z) tais que

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + z^2 \leq 2z$$

Solução

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + z^2 \leq 2z \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1.$$

1.º Processo

Vamos, inicialmente, deslocar o centro do elipsóide para a origem. Para isto basta fazer a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \\ w = z - 1 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 1 \\ z = w + 1 \end{cases}$$

Como

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = 1 \text{ (verifique)}$$

resulta

$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{uvw}} (w + 1)\, du\, dv\, dw$$

onde B_{uvw} é o conjunto

$$\text{①} \qquad \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} + w^2 \leq 1.$$

Vamos, agora, transformar o conjunto ① em uma esfera. Para isto basta fazer a mudança de variáveis

$$\begin{cases} X = \dfrac{u}{2} \\ Y = \dfrac{v}{3} \\ Z = w \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} u = 2X \\ v = 3Y \\ w = Z. \end{cases}$$

Como

$$\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (X, Y, Z)} = 6 \text{ (verifique)}$$

resulta

$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz = 6 \iiint_{B_1} (Z + 1)\, dX\, dY\, dZ$$

onde B_1 é a esfera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1.$$

Passando para coordenadas esféricas resulta

$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz = 6 \iiint_{B_{\theta\varphi\rho}} (\rho \cos \varphi + 1)\, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

onde $B_{\theta\varphi\rho}$ é o paralelepípedo

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq 1.$$

Temos

$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz = 12\pi \int_0^{\pi} \left[\int_0^1 (\rho^3 \cos \varphi + \rho^2) \operatorname{sen} \varphi\, d\rho \right] d\varphi$$

$$= \pi \int_0^{\pi} [3 \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + 4 \operatorname{sen} \varphi]\, d\varphi$$

e, portanto,

$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz = \left[\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi - 4 \cos \varphi \right]_0^{\pi} = 8\pi.$$

2.º Processo

Vamos fazer a mudança de variáveis

$$\text{②} \qquad \begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ \dfrac{y - 1}{3} = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z - 1 = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Temos

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\theta, \rho, \varphi)} = 6\rho^2 \operatorname{sen} \varphi. \text{ (Verifique.)}$$

$B_{\theta\rho\varphi}$ é o paralelepípedo

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Observe que para cada ρ fixo no intervalo $[0, 1]$, ② transforma o retângulo

$$\{(\theta, \rho, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

no elipsóide

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} + (z - 1)^2 = \rho^2.$$

Segue que

$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz = 6 \iiint_{B_{\theta\varphi\rho}} (1 + \rho \cos \varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 10. Considere a integral

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

sendo B o conjunto

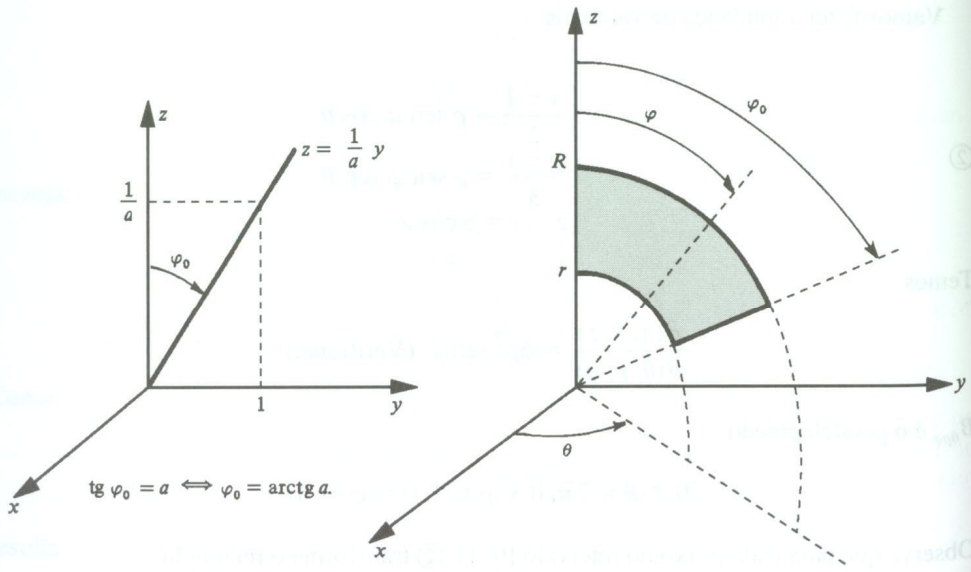
$$r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ a^2z^2 - x^2 - y^2 \geq 0,\ z \geq 0$$

onde $0 < r < R$ e $a > 0$ são reais dados; $f : B \to \mathbb{R}$ é suposta contínua. Passe para coordenadas esféricas.

Solução

$z = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ é uma superfície cônica gerada pela rotação, em torno do eixo z, da reta

$$\begin{cases} z = \frac{1}{a}\, y \\ x = 0 \end{cases}$$



Para cada (θ, φ) fixo, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ ($\varphi_0 = \text{arc tg } a$), ρ deverá variar de r até R. Temos, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_K \left[\int_r^R g(\theta, \varphi, \rho)\rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho \right] d\theta\, d\varphi$$

onde K é o retângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ e

$$g(\theta, \varphi, \rho) = f(x, y, z)$$

com $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ e $z = \rho \cos \varphi$. ∎

Exercícios 5.5

1. Calcule

   a) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $x \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

   b) $\iiint_B z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

   c) $\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

   d) $\iiint_B \sqrt{x + y}\, \sqrt[3]{x + 2y - z}\, dx\, dy\, dz$ onde B é a região $1 \leq x + y \leq 2$, $0 \leq x + 2y - z \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

   e) $\iiint_B z\, dx\, dy\, dz$ onde B é o conjunto $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

   f) $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é a interseção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$, com o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

2. Calcule o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

3. Calcule a massa do sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, supondo que a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional à distância deste ponto ao plano xy.

4. Calcule o volume do conjunto $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ $(a > 0)$.

5. Calcule o volume do conjunto $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax$ $(a > 0)$.

5.6. Coordenadas Cilíndricas

Cada ponto $P = (x, y, z)$ fica determinado pelas suas *coordenadas cilíndricas* (ρ, θ, z), onde ρ é o comprimento do vetor $\overrightarrow{OP_1} = (x, y, 0)$ e θ o ângulo entre este vetor e o semi-eixo positivo Ox. As coordenadas cartesianas (x, y, z) do ponto P e suas coordenadas cilíndricas relacionam-se do seguinte modo

$$\textcircled{1} \qquad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$

Observe que ① transforma o paralelepípedo $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq h$ no cilindro $x^2 + y^2 \leq r^2$ e $0 \leq z \leq h$.

O determinante jacobiano de ① é dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e, portanto,

$$\boxed{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \rho.}$$

Em coordenadas cilíndricas temos então

$$\boxed{\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{\rho\theta z}} f(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z)\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz}$$

EXEMPLO 1. Calcule $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ onde B é o cilindro

$$x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$$

Solução

Vamos calcular a integral utilizando coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{com } (\rho, \theta, z) \in B_{\rho\theta z}$$

onde $B_{\rho\theta z}$ é o paralelepípedo

$$0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq z \leq 1.$$

Temos

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{\rho\theta z}} \rho \sqrt{\rho^2 + z^2}\, d\rho\, d\theta\, dz.$$

Por outro lado,

$$\iiint_{B_{\rho\theta z}} \rho \sqrt{\rho^2 + z^2}\, d\rho\, d\theta\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 \left[\int_0^1 \rho \sqrt{\rho^2 + z^2}\, dp \right]}_{A} dz.$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

e

$$A = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} \left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 dz = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} dz - \frac{1}{3} \int_0^1 z^3\, dz$$

e, portanto,

$$A = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} dz - \frac{1}{12}.$$

Vamos, agora, calcular $\int_0^1 \left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} dz$. Fazendo a mudança de variável $z = \operatorname{tg}\theta$, obtemos

$$\int_0^1 \left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \operatorname{tg}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} \sec^2\theta\, d\theta$$

ou seja,

$$\int_0^1 \left(1 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5\theta\, d\theta.$$

Utilizando a fórmula de recorrência

$$\int \sec^n\theta\, d\theta = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2}\theta \operatorname{tg}\theta + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}\theta\, d\theta$$

resulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5\theta\, d\theta = \left[\frac{1}{4} \sec^3\theta \operatorname{tg}\theta + \frac{3}{8} \sec\theta \operatorname{tg}\theta + \frac{3}{8} \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}},$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8} \ln\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

Segue que

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{12}\left(7\sqrt{2} - 2 + 3\ln(\sqrt{2} + 1)\right). \quad \blacksquare$$

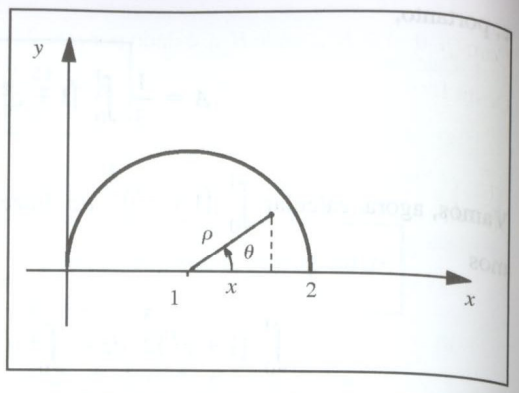
EXEMPLO 2. Utilizando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do sólido B dado por $x^2 + y^2 - 2x \leq 0, 0 \leq z \leq x + y, x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Solução

$$x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Façamos então

$$\begin{cases} x - 1 = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$



com $(\rho, \theta, z) \in B_{\rho\theta z}$, onde $B_{\rho\theta z}$ é dado por $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 1 + \rho\cos\theta + \rho \operatorname{sen}\theta$. Temos

$$\iiint_B dx\,dy\,dz = \iiint_{B_{\rho\theta z}} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \iiint_{B_{\rho\theta z}} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz &= \int_0^{\pi}\int_0^1 \left[\int_0^{1+\rho\cos\theta+\rho\operatorname{sen}\theta} \rho\,dz\right] d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^1 [\rho z]_0^{1+\rho\cos\theta+\rho\operatorname{sen}\theta}\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\left[\int_0^1 (\rho + \rho^2\cos\theta + \rho^2 \operatorname{sen}\theta)\,d\rho\right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta\right] d\theta \end{aligned}$$

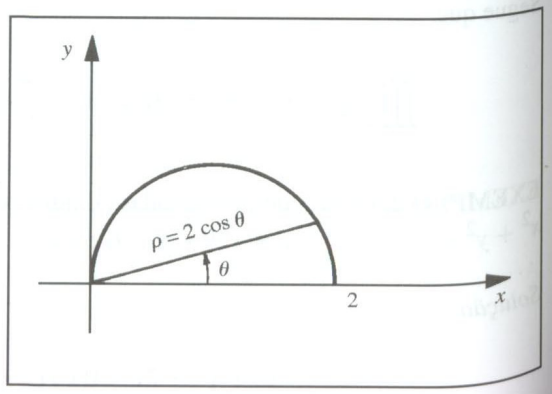
Portanto,

$$\iiint_{B_{\rho\theta z}} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \text{ (unidade de volume)}$$

que é o volume do sólido dado.

Observação. Se tivéssemos tomado o *pólo* na origem teríamos

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$



Com $(\rho, \theta, z) \in B_{\rho\theta z}$ onde $B_{\rho\theta z}$ é dado por $\rho \leq 2\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq z \leq \rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta$.

Desta forma, o volume será

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\left[\int_0^{\rho\cos+\rho\operatorname{sen}\theta} \rho\,dz\right] d\rho\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\left[\rho^2\cos\theta + \rho^2\operatorname{sen}\theta\right] d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}(2\cos\theta)^3\cos\theta + \frac{1}{3}(2\cos\theta)^3\operatorname{sen}\theta\right] d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\theta + \cos^3\theta\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \text{ (Confira!)} \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 3. Calcule $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 - z}\,dx\,dy\,dz$ onde B é dado por

$$0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2.$$

Solução

1.º Processo

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 - z}\,dx\,dy\,dz = \iint_K \left[\int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2 + y^2 - z}\,dz\right] dx\,dy$$

onde K é o conjunto $0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1$.

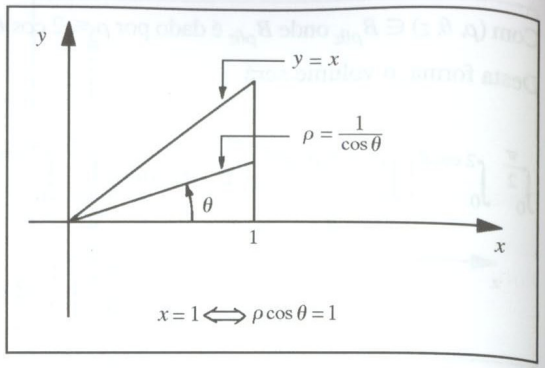
$$\begin{aligned} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2 + y^2 - z}\,dz &= -\frac{2}{3}(x^2 + y^2 - z)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2+y^2} \\ &= \frac{2}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 - z}\,dx\,dy\,dz = \iint_K \frac{2}{3}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy.$$

Mudando para coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$



resulta

$$\iint_K (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^3\, \rho\, d\rho \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^5 \theta\, d\theta = \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8} \ln \left(\sqrt{2} + 1 \right) \right)$$

que já foi calculado no Exemplo 1. Portanto,

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 - z}\, dx\, dy\, dz = \frac{2}{15} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8} \ln \left(\sqrt{2} + 1 \right) \right).$$

2.º Processo (*Utilizando coordenadas cilíndricas*)

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 - z}\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B_{\rho\theta z}} \sqrt{\rho^2 - z}\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

onde $B_{\rho\theta z}$ é dado por $0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{\cos \theta}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ e $0 \leq z \leq \rho^2$.

$$\iiint_{B_{\rho\theta z}} \sqrt{\rho^2 - z}\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \iint_{K_{\rho\theta}} \left[\int_0^{\rho^2} \sqrt{\rho^2 - z}\, \rho\, dz \right] d\rho\, d\theta$$

onde $K_{\rho\theta}$ é o conjunto $0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{\cos \theta}$ e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\rho^2} \rho \sqrt{\rho^2 - z}\, dz = \left[-\frac{2}{3} \rho \left(\rho^2 - z \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\rho^2} = \frac{2}{3} \rho^4.$$

Assim

$$\iiint_{B_{\rho\theta z}} \sqrt{\rho^2 - z}\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\sec\theta} \frac{2}{3} \rho^4\, d\rho \right] d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{15} \sec^5 \theta\, d\theta.$$

Portanto

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 - z}\, dx\, dy\, dz = \frac{2}{15} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8} \ln \left(\sqrt{2} + 1 \right) \right). \quad \blacksquare$$

5.7. Centro de Massa e Momento de Inércia

Imaginemos uma partícula P, de massa m, girando com velocidade angular w, em torno de um eixo fixo. Suponhamos que a distância de P ao eixo seja r. A velocidade v da partícula será, então, $v = wr$ e sua energia cinética será

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (mr^2)\, w^2 = \frac{1}{2} Iw^2$$

onde $I = mr^2$ é, por definição, o momento de inércia de P em relação ao eixo.

Consideremos, agora, um eixo fixo e um sistema de n partículas de massas m_i ($i = 1, 2, \ldots, n$); seja r_i a distância da i-ésima partícula ao eixo. Definimos o *momento de inércia* do sistema, em relação ao eixo, por:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Observe que se as partículas do sistema acima giram, em torno do eixo fixo, com uma mesma velocidade angular w, então a energia cinética do sistema será

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (m_i r_i^2)\, w^2 = \frac{1}{2} Iw^2.$$

Consideremos, finalmente, um corpo B com densidade volumétrica $\delta(x, y, z)$. Definimos o *momento de inércia de B* em relação a um eixo fixo por

$$I = \iiint_B r^2\, dm \quad (dm = \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz)$$

onde $r = r(x, y, z)$ é a distância do ponto (x, y, z) ao eixo.

EXEMPLO 1. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogênea, de raio R, em relação a um eixo passando pelo seu centro.

Solução

Consideremos a esfera com centro na origem e vamos calcular o momento de inércia em relação ao eixo z. A distância r do ponto (x, y, z) ao eixo é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Como estamos supondo a esfera homogênea, sua densidade é constante, que suporemos igual a k. Temos

$$I = \iiint_B r^2 \, dm = \iiint_B (x^2 + y^2)\, k \, dx \, dy \, dz$$

onde B é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Passando para coordenadas esféricas obtemos:

$$I = k \iiint_{B_{\rho\theta\varphi}} (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\theta \, d\rho \, d\varphi$$

onde $B_{\theta\rho\varphi}$ é o paralelepípedo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq R$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$. (Observe: $x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$.) Segue que

$$I = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^4 \, d\rho \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{5} k\pi R^5 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi.$$

Como

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi - \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = [-\cos \varphi]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

resulta

$$I = \frac{2}{5} R^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 k\right) = \frac{2}{5} MR^2$$

onde $M = \dfrac{4}{3} \pi R^3 k$ é a massa da esfera. ■

Consideremos um corpo B, com função densidade $\delta(x, y, z)$. O ponto (x_c, y_c, z_c) onde

$$x_c = \frac{\iiint_B x \, dm}{\iiint_B dm}, \quad y_c = \frac{\iiint_B y \, dm}{\iiint_B dm} \quad \text{e} \quad z_c = \frac{\iiint_B z \, dm}{\iiint_B dm}$$

denomina-se *centro de massa* de B.

EXEMPLO 2. Calcule o centro de massa do corpo homogêneo $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

Solução

Precisamos calcular apenas z_c, pois, tendo em vista a simetria do corpo, em relação ao eixo Oz, $x_c = y_c = 0$. Temos

$$z_c = \frac{\iiint_B zk \, dx \, dy \, dz}{\iiint_B k \, dx \, dy \, dz} = \frac{\iiint_B z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_B dx \, dy \, dz}$$

onde B é o conjunto $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ e k (k constante) a densidade. Seja A o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Temos

$$\iiint_B dx\,dy\,dz = \iint_A \left[\int_{x^2+y^2}^1 dz\right] dx\,dy = \iint_A (1 - x^2 - y^2)\, dx\,dy.$$

Passando para polares obtemos:

$$\iiint_B dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - \rho^2)\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Por outro lado,

$$\iiint_B z \, dx \, dy \, dz = \iint_A \left[\int_{x^2+y^2}^1 z\, dz\right] dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_A \left[1 - (x^2 + y^2)^2\right] dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - \rho^4)\, \rho \, d\rho$$

ou seja,

$$\iiint_B z\, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{3}.$$

Assim,

$$z_c = \frac{\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Portanto, o centro de massa é $\left(0, 0, \dfrac{2}{3}\right)$. ■

Exercícios 5.7

1. Calcule o momento de inércia do corpo homogêneo $x + y + z \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, em relação ao eixo z.

2. Calcule o momento de inércia do cubo homogêneo de aresta L, em relação a um eixo que contém uma das arestas.

3. Considere o cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$ e suponha que a densidade no ponto (x, y, z) seja x.

a) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo Oz.
b) Calcule o centro de massa.

4. Considere o cilindro homogêneo $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ e $0 \leq z \leq h$.

a) Calcule o momento de inércia em relação à reta $x = a$ e $y = 0$.
b) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo Oz.

5. (*Teorema de Steiner ou dos eixos paralelos.*) Seja I_{cm} o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa de um corpo e I o momento de inércia em relação a um eixo paralelo, a uma distância h. Verifique que $I = I_{cm} + Mh^2$, onde M é a massa do corpo.

6. Aplique o teorema de Steiner ao item *b* do Exercício 4.

7. Calcule o centro de massa da semi-esfera homogênea $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e $z \geq 0$ $(R > 0)$.

8. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio R, em relação a um eixo cuja distância ao centro seja h.

9. Considere um cone circular reto homogêneo de altura h e raio da base R.

a) Calcule o centro de massa.
b) Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo.

10. Calcule o momento de inércia de um sólido homogêneo com a forma de um cone circular reto de altura h e raio da base R, em relação a um eixo passando pelo vértice e perpendicular ao eixo do cone.

11. Determine o centro de massa de uma semi-esfera, cuja densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao centro.

12. Calcule o momento de inércia de um cone circular reto de altura h, raio da base R, homogêneo, em relação a um diâmetro de sua base.

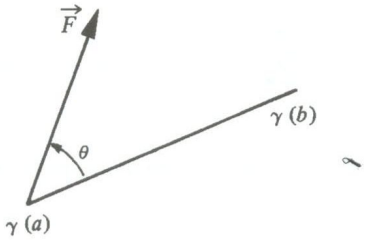
6

INTEGRAIS DE LINHA

6.1. INTEGRAL DE UM CAMPO VETORIAL SOBRE UMA CURVA

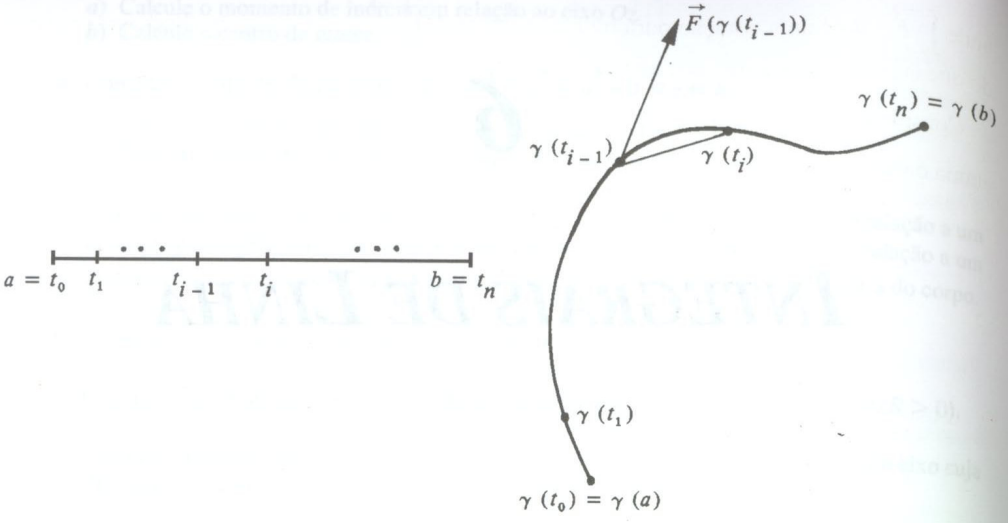
Suponhamos que $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seja um campo de forças definido no aberto Ω e que uma partícula descreva um movimento em Ω com função de posição $\gamma : [a, b] \to \Omega$ ($\gamma(t)$ é a posição da partícula no instante t). Se $\vec{F}$ for *constante* e a imagem de γ um segmento, o *trabalho* τ realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ é, por definição, o produto escalar de $\vec{F}$ pelo deslocamento $\gamma(b) - \gamma(a)$:

$$\tau = \vec{F} \cdot [\gamma(b) - \gamma(a)].$$



$$\tau = \vec{F} \cdot [\gamma(b) - \gamma(a)] = \|\vec{F}\| \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \cos\theta$$

Suponhamos, agora, que $\vec{F}$ e γ sejam quaisquer, com $\vec{F}$ contínuo e γ de classe C^1. Queremos definir o trabalho realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$. Seja $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$, com máx Δt_i suficientemente pequeno. (Lembramos que máx Δt_i é o maior dos números $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.)



Tendo em vista as hipóteses anteriores, é razoável esperar que a soma

$$\textcircled{1} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]$$

seja uma boa aproximação para o trabalho τ realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ e que esta aproximação seja tanto melhor quanto menor for máx Δt_i. Por outro lado,

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \cong \gamma'(t_{i-1})\,\Delta t_i$$

e daí

$$\tau \cong \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_{i-1})\,\Delta t_i.$$

Como a função $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é integrável em $[a, b]$, pois é contínua neste intervalo, segue que

$$\lim_{\text{máx}\,\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\gamma(\bar{t}_i)) \cdot \gamma'(\bar{t}_i)\,\Delta t_i = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Nada mais natural, então, do que definir o *trabalho* τ realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ por

$$\boxed{\tau = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}$$

onde $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$ é uma notação para indicar a integral $\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$. (Pode ser provado que ① tende a esta integral quando máx Δt_i tende a zero.)

Consideremos, agora, um campo vetorial contínuo qualquer $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω aberto, e uma curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$, de classe C^1. Definimos a *integral de linha de* $\vec{F}$ *sobre* γ por

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.}$$

É usual a notação $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para a integral de linha de $\vec{F}$ sobre γ, onde $\vec{r}(t) = \gamma(t)$.

EXEMPLO 1. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{i}$ e $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Solução

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{-1}^{1} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

Temos:

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \vec{F}(t, t^2) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$$

e

$$\gamma'(t) = (1, 2t).$$

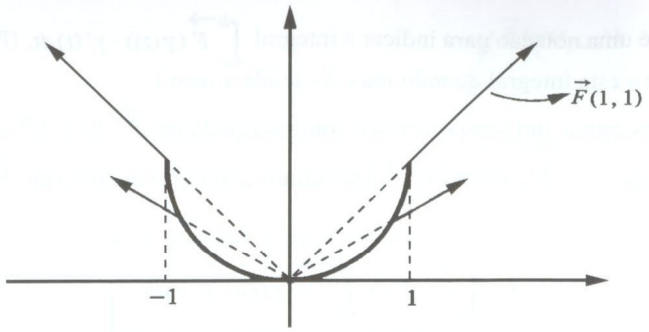
Assim,

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}) \cdot (1, 2t) = t + 2t^3.$$

Portanto,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{-1}^{1} (t + 2t^3)\,dt = 0.$$

(Observe que $t + 2t^3$ é uma função ímpar.)



Se $\vec{F}$ for imaginado como um campo de forças, o trabalho realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(-1)$ até $\gamma(1)$ é zero. ■

EXEMPLO 2. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{j}.$$

Solução

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\,\vec{i} + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\,\vec{j}\right] \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt.$$

Portanto,

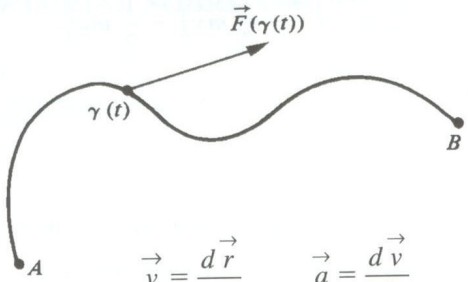
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$ ■

EXEMPLO 3. (*Relação entre trabalho e energia cinética.*) Suponha $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de forças contínuo. Sob a ação da *força resultante* $\vec{F}$, uma partícula de massa m desloca-se de A até B, sendo sua trajetória descrita pela curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$, de classe C^1, com $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$. ($\gamma(t)$ é a posição da partícula no instante t.) Sejam v_A e v_B as velocidades escalares nos instantes a e b, respectivamente. Prove que

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

isto é: o trabalho realizado pela resultante $\vec{F}$ no deslocamento de A até B é igual à variação na energia cinética da partícula.

Solução



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

A força que age sobre a partícula no instante t é $\vec{F}(\gamma(t))$; pela lei de Newton

$$\vec{F}(\gamma(t)) = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Temos, então:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_a^b m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

ou seja,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_a^b \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\,dt.$$

De

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Segue que

$$\int_a^b \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\,dt = \frac{1}{2}\left[\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)\right]_a^b = \frac{1}{2}\left[\vec{v}(b) \cdot \vec{v}(b) - \vec{v}(a) \cdot \vec{v}(a)\right] = \frac{1}{2}\left[v_B^2 - v_A^2\right].$$

(Veja: $v_B^2 = \left\|\vec{v}(b)\right\|^2 = \vec{v}(b) \cdot \vec{v}(b)$ e $v_A^2 = \vec{v}(a) \cdot \vec{v}(a)$.)