Fabio Armando Tal

1^{a} Prova de MAP2313

2019

Escolha 4 questões.

1. Encontre os coeficientes da série de Fourier da função 2π periódica que satisfaz $f(x) = x|x|$, $-\pi \leq x < \pi$. Calcule o erro quadrático total ao se aproximar f por seu polinômio trigonométrico até o 3 harmônico.

2. Mostre que se f é uma função 2π periódica, e que tem derivadas contínuas de qualquer ordem, e se a_n, b_n são os coeficientes da série de fourier de f, então para todo inteiro $k > 0$ existe $M > 0$ tal que $max\{| a_n |, | b_n |\} < \frac{M}{n^k}$

3. Considere o problema:

$$u_t = u_{xx}, 0 \leq x \leq 1$$

$$u(t, 0) = 0,\ u(t, 1) = 1$$

   Encontre:

   a) Uma solução do problema que não dependa de t

   b) A solução do problema com condição inicial $U(0, x) = 4(x - 1/2)^2 + x + 1$. (Dica: Lembre-se que a soma de soluções da equação do calor também é solução).

   c) Estime $\lim_{t\to\infty} u(t, 1/2)$.

4. Seja $u(t, x)$ a solução da equação da onda na reta $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ que satisfaz $u(0, x) = f(x)$ e $u_t(0, x) = 0$. Mostre, usando a solução de D´Alembert, que:

   a) Se f é ímpar, então $u(t, 0) = 0$ para todo $t > 0$.

   b) Se $u(t, 0) = 0$ para todo $t > 0$, então f é ímpar.

5. Encontre a solução de $u_{tt} = u_{xx}, 0 \leq x \leq \pi$, que satisfaz

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0,\ t \geq 0,$$

   e também

$$u(0, x) = 0,\ u_t(0, x) = |x - \pi/2| + \pi/2.$$

$$f(f') = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} f'(v)e^{-i\omega v}\,dv\right) = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(v)e^{-i\omega v}\Big|_{-a}^{a} + i\omega\int_{-a}^{a} f(v)e^{-i\omega v}\,dv\right]\right)$$

$$f(f') = \lim_{a\to+\infty}\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a} f(v)e^{-i\omega v}\,dv = i\omega\, f(f) \qquad f(f'') = -\omega^2 f(f)$$

$$f(f) = \left(\frac{f + f''}{\omega^2}\right) \quad \text{cancelam } \omega^2$$

a) $f(x) = \begin{cases} K & |x|<1 \\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}$

$$f(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i\omega v}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} K\, e^{-i\omega v}\,dv = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega v}}{-i\omega}\Big|_{-1}^{1} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-i\omega}-e^{-i\omega(-1)}}{-i\omega}\right) =$$

$$= \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{i}\right)\right) = K\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

b) $$f(e^{-a|x|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{av-i\omega v}\,dv + \int_{0}^{\infty} e^{-av-i\omega v}\,dv\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(a-i\omega)v}}{a-i\omega}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(-a-i\omega)v}}{(-a-i\omega)}\Big|_{0}^{\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{a-i\omega} - \frac{1}{(-a+i\omega)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a+i\omega+a-i\omega}{(a-i\omega)(a+i\omega)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\omega^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$v^2 + \frac{i\omega v}{c} + \left(\frac{i\omega}{2c}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2c}\right)^2 = \left(v+\frac{i\omega}{2c}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2c}\right)$$

c) $$f(e^{-cx^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cv^2}\cdot e^{-i\omega v}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(v^2+\frac{i\omega v}{c}\right)}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\left(v+\frac{i\omega}{2c}\right)^2}\,dv\; e^{-\frac{\omega^2}{4c^2}}$$

$$B(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5\left(\exp(hc/\lambda kT)-1\right)}$$

$c = 3\cdot 10^{8}$ m/s

$h = 6{,}626\cdot 10^{-34}$ Js

$K = 1{,}3806\cdot 10^{-23}$ J/K

$\lambda = 1{,}02\cdot 10^{-6}$ m

5,778K

$\underline{2\,J\cdot m^2}$

um

0,03129

$-5{,}49\cdot 10^{-5}$