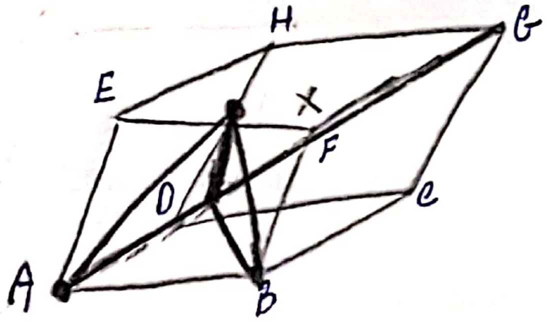
6,5

NOME: Marcos Antônio Ribeiro Santos Junior.

QUESTÃO 1

A

$\boxed{X = A + \lambda . \vec{AG}}$ ⇒ Ponto.



$\vec{BF} = \vec{DE} = \vec{CG} = \vec{AE} = \vec{U}$. [1]

$\vec{EF} = \vec{HG} = \vec{AB} = \vec{DC} = \vec{V}$. [2]

$\vec{BC} = \vec{FG} = \vec{AD} = \vec{EH} = \vec{K}$. [3]

$X = A + \lambda . \vec{AG} \therefore X - A = \lambda . \vec{AG} \therefore \vec{AX} = \lambda \vec{AG} \therefore \vec{AB} + \vec{BX} = \lambda . (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG})$

$\therefore \vec{BX} = \lambda . (\vec{BC} + \vec{CG}) + \vec{AB} . (\lambda - 1)$

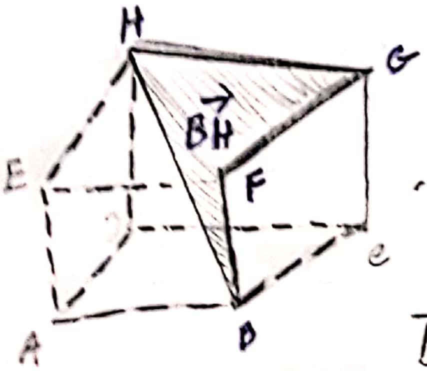
"Da relação [1]":

$\vec{BX} = \lambda . (\vec{BC} + \vec{CG}) + \vec{AB} . (\lambda - 1)$.

$\boxed{\vec{BX} = \lambda \vec{AE} + \lambda \vec{AD} + \vec{AB} . (\lambda - 1)}$.

(B)

Se λ for igual a $\frac{1}{2}$, $[\vec{BX}, \vec{BH}]$ será L.D.



$\vec{BH} = \vec{GH} + \vec{FG} + \vec{BF}$.

$\therefore$ $\vec{BF} = -\vec{K} + \vec{V} + \vec{U}$.

Temos que $\vec{BF}$ em base ortogonal:

$\vec{BF} = [-1, 1, 1]_E$.

$\vec{BH} = [(\lambda - 1); \lambda; \lambda]_E$.

$\boxed{\begin{matrix} \forall \lambda \in \mathbb{R} // \\ \forall \theta, \gamma \in \mathbb{R} // \end{matrix}}$

Por definição: $\theta . \vec{BF} + \gamma . \vec{BH} = 0$.

$\theta . (-1; 1; 1) + \gamma . ((\lambda - 1); \lambda; \lambda]_E = \vec{0}$,

$(-\theta; \theta; \theta) + [(\gamma . \lambda - \gamma); \gamma . \lambda; \gamma . \lambda]_E = \vec{0}$.

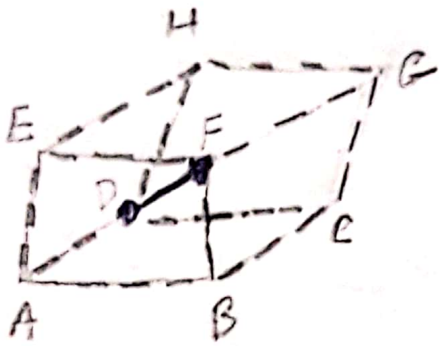
$$\begin{cases} \gamma . (\lambda - 1) - \theta = 0. \\ \lambda . \gamma + \theta = 0. \\ \lambda . \gamma + \theta = 0. \end{cases} \therefore \begin{cases} \gamma . (\lambda - 1) - \lambda = 0. \\ \lambda \gamma + \lambda = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

?

Logo: $\lambda = \frac{1}{2}$ {θ e γ podem ser diferentes de zero e $\vec{BX}$, $\vec{BH}$ são linearmente dependente} //

Se: $\lambda \neq \frac{1}{2}$, θ e γ tem que ser nulos para que $\vec{BX}, \vec{BH}$ seja L.i

C



Temos os pontos:

$$X = A + \lambda . \vec{AG}.$$

$$X - A = \lambda . \vec{AG}.$$

$$\vec{AX} = \lambda . \vec{AG} \therefore \lambda \to \frac{1}{2} //$$

$$\vec{AX} = \frac{1}{2} . \vec{AG}$$

$$\vec{AG} = 2 \vec{AX}$$

$$\vec{AD} + \vec{FG} + \vec{DF} = 2 . [\vec{AD} + \vec{DX}] //$$

Da relação [2] é possível reescrever:

$$\vec{DF} - \vec{V} + \vec{V} = 2 \vec{DN}.$$

$$\vec{DF} = 2 \vec{DN}$$

$$\vec{DN} = \frac{\vec{DF}}{2} \therefore N - D = \frac{\vec{DF}}{2} \therefore \boxed{N = D + \frac{\vec{DF}}{2}}$$

Então, temos que X está contido no seguimento de reta que une D e F, estando na diagonal $\vec{DF}$ //

20

QUESTÃO 2

$\{\vec{F_1}, \vec{e_1}+2\vec{e_2}-2\vec{e_3}\}$ é L.D.

$\{\vec{F_3}; \vec{e_2}; \vec{e_3}\}$ é L.D.

$\vec{F_1} = \lambda \cdot [\vec{e_1}+2\vec{e_2}-2\vec{e_3}] = [\lambda, 2\lambda, -2\lambda]_E$

$\vec{F_3} = \vec{e_2}+\vec{e_3} \therefore \vec{F_3} = (0; x; y)_E.$

"Por definição de dependência linear"

$\alpha . \vec{F_1} + \beta \vec{F_2} + \gamma . \vec{F_3} = 0 \therefore \boxed{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}} \therefore$ HIPÓTESE: (F_1, F_2, F_3) é base.

$\alpha . (\lambda; 2\lambda; -2\lambda) + \beta \vec{F_2} + \gamma . (0; x; y) = 0.$ Logo: $\beta = \gamma = \alpha = 0$

Sendo $F_2 = [a, b, c]_E$ por definição ortonormal.

- $\underline{\vec{F_1} . F_2 = 0} \therefore (\lambda; 2\lambda; -2\lambda).(a; b; c) = 0 \therefore \lambda a + 2\lambda b - 2\lambda c = 0 \therefore$

$\lambda . [a + 2b - 2c] = 0 \therefore \boxed{a + 2b - 2c = 0}$

- $\underline{\vec{F_1} . \vec{F_3} = 0} \therefore (\lambda; 2\lambda; -2\lambda).(0; x; y) = 0 \therefore 2\lambda x - 2\lambda y = 0 \therefore$

$\lambda . [2x - 2y] = 0 \therefore \boxed{x = y}$

- $\underline{\vec{F_2} . \vec{F_3} = 0} \therefore (0; x; y).(a; b; c) = 0 \therefore xa + yc = 0 \therefore \boxed{a = -c}$

"Definindo $\vec{F}_1 ; \vec{F}_2 ; \vec{F}_3$"

$\vec{\varphi}_1 = \lambda.(1;2;-2)_E$.

$\vec{\varphi}_2 = c.(4;-1;1)_E$.

$\vec{\varphi}_3 = x.(0;1;1)_E$.

"Normalizando $\vec{\varphi}_1 ; \vec{\varphi}_2 ; \vec{\varphi}_3$"

$\|\vec{\varphi}_1\| = \sqrt{\lambda^2.(1^2+2^2+2^2)} = 1 \therefore \lambda.\sqrt{9} = 1 \therefore \lambda = \frac{1}{3}$ //

$\|\vec{\varphi}_2\| = \sqrt{c^2.(4^2+(-1)^2+(1)^2} = 1 \therefore c.\sqrt{18} = 1 \therefore c = \frac{1}{\sqrt{18}} \therefore c = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ //

$\|\vec{\varphi}_3\| = \sqrt{x^2.(1)^2+(1)^2} = 1 \therefore x.\sqrt{2} = 1 \therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ //

"Portanto"://

$\vec{F}_1 = \frac{1}{3}.e_1 + \frac{2}{3}.e_2 - \frac{2}{3}.e_3$.

$\vec{F}_2 = \frac{4}{3.\sqrt{2}}.e_1 - \frac{1}{3.\sqrt{2}}.e_2 + \frac{1}{3.\sqrt{2}}.e_3$.

$\vec{F}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}.e_3$.

"Verificando se é positiva ou negativa."

$\det_M > 0$ é positiva

$$\begin{cases} \text{Positiva; se } \det_M \geq 0. \\ \text{Negativa; se } \det_M < 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} = -1$$

$$0 \quad -\frac{1}{18} \quad -\frac{4}{6} \quad -\frac{1}{6} \quad 0 \quad -\frac{8}{18}$$

2,5

Logo, a base a base encontrada é negativa

QUESTÃO 3

(A)

Falso. $[\vec{u}, \vec{v}]$ só podem ser L.D.

Provando por contra exemplo: $\vec{u} = t.\vec{v}$.

$(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se, somente se, $[\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}]$ é L.D.

$(\vec{u}-\vec{v}) = t.\vec{v} - \vec{v}$.

$\vec{u}-\vec{v} = \vec{v}.(t-1)$

$t \in \mathbb{R}$

$(\vec{u}+\vec{v}) = t.\vec{v} + \vec{v}$.

$(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{v}.(t+1)$

Para ser linearmente independente (L.i): $t = t = 0$.

$t - 1 = 0 \therefore t = 1$

$t + 1 = 0 \therefore t = -1$

Portanto, como os parametros t são diferentes provamos por absurdo que só pode ser L.D.

B

VERDADEIRO

$t, \lambda, K \in \mathbb{R}$

Para ser base $\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, (\vec{u}+\vec{v}) \wedge \vec{v}\}$ tem que ser L.i.

HIPÓTESE: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é L.i.

TESE: $\{\vec{u}+\vec{v}; \vec{u}-\vec{v}; (\vec{u}+\vec{v}) \wedge \vec{v}\}$ é L.i.

$$t.(\vec{u}+\vec{v}) + \lambda.(\vec{u}-\vec{v}) + K.[\vec{u} \wedge \vec{v} + \underbrace{\overbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}^{\text{PARALELOS.}}}_{0}] = \vec{0}$$

$$t.(\vec{u}+\vec{v}) + \lambda.(\vec{u}-\vec{v}) + K.\underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v})}_{\text{VETOR}} = (0;0;0)$$

$$t.\vec{u} + t.\vec{v} + \lambda.\vec{u} - \lambda.\vec{v} + K.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0;0;0$$

$$\begin{cases} t.\vec{u} + \lambda.\vec{u} = 0 \\ t.\vec{v} - \lambda.\vec{v} = 0 \end{cases}$$

$t + \lambda - K = 0 \therefore 2\lambda = 0$

$t - \lambda - K = 0 \therefore t = \lambda = K = 0$

Para a hipótese ser satisfeita, temos que os coeficientes t, λ, K sejam nulos. $\boxed{\text{Logo: } t = \lambda = K = 0}$

1,5

QUESTÃO 4

$\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - 3\vec{e_3}$.

$\vec{f_2} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$.

$\vec{f_3} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 0\vec{e_3}$.

$$M_{EF} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_E = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz mudança de base}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}_F$$

vetores deveriam ir nas colunas!

$\therefore$

$x_1 = 3.1 - 1.5 - 3.3 = -11$

$x_2 = 3.2 + 5.2 + 3.0 = 16$ $\therefore$

$x_3 = 2.3 + 5.1 + 3.0 = 11$

$\vec{u} = (-11; 16; 11)_{E//}$ ➜ coordenadas de $\vec{u}$ na base $E_{//}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}_E \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/3 & -1/2 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}_F$$

$\therefore$

$f_1 = 3.0 - \frac{1}{2}.5 + 3.1 = \frac{3}{2}$

$f_2 = 3.0 + 5.1 - 3.1 = 2$

$f_3 = -\frac{1}{3}.3 - \frac{1}{2}.5 + \frac{2}{3}.3 = -\frac{3}{2}$

$\vec{v} = \left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)_F$ ➜ coordenadas de $\vec{v}$ na base F.

cadê as contas?

0,5