

Sistema de Coordenadas

$$\vec{AB} = B - A$$

$$P + \vec{v} = (p_x + v_x, p_y + v_y, p_z + v_z)$$

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (\text{se } \Sigma \text{ ortogonal})$$

Estudo da reta

$$r: X = P + \lambda \vec{v}$$

(vetorial)

$$r: X = (P_x, P_y, P_z) + \lambda (v_x, v_y, v_z) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Paramétrica: } r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases}$$

se $v_x \neq 0, v_y \neq 0, v_z \neq 0$:

$$\text{Simétrica: } r: \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Estudo do Plano:

$$\pi: X = P + \lambda \vec{v} + \mu \vec{u}$$

(vetorial)

$$\pi: X = (P_x, P_y, P_z) + \lambda (v_x, v_y, v_z) + \mu (u_x, u_y, u_z)$$

$$\text{Paramétrica: } \pi: \begin{cases} x = P_x + \lambda v_x + \mu u_x \\ y = P_y + \lambda v_y + \mu u_y \\ z = P_z + \lambda v_z + \mu u_z \end{cases}$$

Geral: ~~se $\vec{n} = (a, b, c)$~~

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

se Σ é ortonormal $\Rightarrow \vec{n} = (a, b, c)$ é vetor normal a π

Passar de vetorial / paramétrica p/ geral:

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0$$

Coca-Cola

Passar da eq. Geral pl simétrica / vetorial:

chama $x = \lambda$, $y = \mu$ e
 $\pi: ax + by + cz + d = 0$ determina z em função
de λ e μ .

- Em qualquer sistema: $\pi: ax + by + cz + d = 0$

$$\vec{s} \parallel \pi \Leftrightarrow a s_x + b s_y + c s_z = 0$$

Posição Relativa:

Retas

$\vec{r} \parallel r$ e $\vec{s} \parallel s$. $A \in r$, $B \in s$.

se: $(\vec{r}, \vec{s})$ é LI $\left\{ \begin{array}{l} \text{e } (\vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}) \text{ é LI} \rightarrow \text{reversas} \\ \text{e } (\vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}) \text{ é LD} \rightarrow \text{concorrentes} \end{array} \right.$

$(\vec{r}, \vec{s})$ é LD $\left\{ \begin{array}{l} \text{se tem 1 ponto arbitrário em comum } r = s \\ \text{se não } r \parallel s \text{ e } r \cap s = \emptyset \end{array} \right.$

Reta e Plano:

$\vec{r} = (m, n, p) \parallel r$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$

• se $am + bn + cp \neq 0$ r é transversal a π e basta resolver sistema

• se $am + bn + cp = 0$ ou $r \subset \pi$ (qualquer ponto de $r \in \pi$) ou $r \parallel \pi$ (não obedece o anterior)

Plano e Plano:

Sejam $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

• se a_1, b_1, c_1, d_1 são proporcionais a a_2, b_2, c_2, d_2 $\pi_1 = \pi_2$

• se a_1, b_1, c_1 são proporcionais a a_2, b_2, c_2 $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

• se a_1, b_1, c_1 não são propor. a a_2, b_2, c_2 , $\pi_1 \cap \pi_2$ é reta

Como encontrar a reta

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

somar sistema, chamar $x = \lambda$ e obter y e z em função de λ .

Perpendicularidade e Ortogonalidade

$\vec{r} \parallel r, \vec{s} \parallel s, P \in r, Q \in s, PQ = (x_0, y_0, z_0)$
se $\vec{r} \cdot \vec{s} = r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z = 0 \Rightarrow r$ e s são ortogonais
se são ortogonais, podem ser perpendiculares caso:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{se } \det \neq 0 \Rightarrow \text{reversas, não perp.}$$

Em qualquer Σ : se $\pi: (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$

vetor normal $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (n_1, n_2, n_3)$

se $\vec{r} \parallel r$ e $\vec{r} \propto \vec{n} \Rightarrow r \perp \pi$.

Ângulos

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{usar isso p/ retas})$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{r}\|} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{usar p/ reta e plano})$$

$$\text{Entre planos: } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

Distâncias Σ ortonormal

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (\text{entre pontos})$$

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} \quad A \in r, \vec{r} \text{ diretor de } r \quad (\text{ponto, reta})$$

$$d(P, \pi) = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad A \in \pi \quad (\text{ponto e plano})$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{u} \times \vec{v}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \quad Q \in r, P \in s \quad (\text{entre retas})$$