→ Qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$?

Sim!

$(1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

Para verificar se um vetor pode ser escrito em uma base $\mathbb{R}^3$.

1º Verificar se é LI.

2º Escrever como combinação linear.

Ângulo entre vetores

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Produto escalar

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

Por isso quando $u \perp v$, $u \cdot v = 0$ porque $\cos 90° = 0$.

Produto escalar é comutativo! $u \cdot v = v \cdot u$

Produto vetorial → área do paralelogramo

O produto vetorial gera um vetor ortogonal

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ e $\vec{w} \perp \vec{v}$ e $\vec{w} \perp \vec{u}$

$u \times v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen}\theta$ $\quad \operatorname{sen} 90° = 1$

Produto misto → volume do paralelogramo

$u \times v \cdot w$ $\quad$ fazer det

$\vec{u} = (a,b,c)$

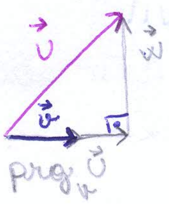
$\vec{v} = (d,e,f)$

$\vec{w} = (g,h,i)$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Projeção ortogonal

$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \lambda \vec{v}$



sendo $\vec{w} \perp \vec{v}$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$

$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + \vec{w} = \vec{u}$

$\lambda \vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\lambda \vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{v}$

$\lambda \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$\lambda \|\vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{v}$ $\qquad \lambda = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

• para mudança de base colocar as linhas como coluna

$v_1 = (a, b, c)$

$v_2 = (m, n, p)$

$v_3 = (k, \gamma, \ell)$

$$\begin{vmatrix} a & m & k \\ b & n & \gamma \\ c & p & \ell \end{vmatrix}$$

Matriz Inversa.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{pmatrix}$

calcule b21.

→ nº coluna

↳ nº da linha

1º Exclua a 2º coluna e 1º linha

2º O nº restante é o b21.

b21 = 3.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{pmatrix}$

calcule b32.

→ nº da coluna

↳ nº da linha

1º

$\det A = 3 - 2 = 1$

$b32 = (-1)^{i+j} \cdot \det A$

como obter o vetor normal de uma reta?

$r: 2x + 3y + z - 1 = 0$

$\vec{n} = (2, 3, 1)$.

como obter o vetor normal de um plano?

$\pi: (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(3, 4, 8)$.

$\vec{v} = (1, 1, 2)$ e $\vec{u} = (3, 4, 8)$

$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$

Para obter a intersecção entre uma reta e um plano.

1º Escrever a reta na forma paramétrica

2º Escreva o plano na forma geral.

como obter a forma geral do plano

$\pi: (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(3, 4, 8)$ ⤳ forma vetorial

$\vec{v} = (1, 1, 2)$ e $\vec{u} = (3, 4, 8)$ ⟶ $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 3\mu \\ y = 2 + \lambda + 4\mu \\ z = 3 + 2\lambda + 8\mu \end{cases}$ ⤳ forma paramétrica

• distância entre pontos:

$A = (x_A, y_A, z_A)$

$B = (x_B, y_B, z_B)$

$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

• distância entre ponto e reta:

$r: (d, e, f) + \lambda(1, 2, 3)$ $A = (d, e, f)$ $\vec{v} = (1, 2, 3)$

$P = (a, b, c)$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{12}$

$P: (a, b, c)$

$\vec{AP} = (\overset{x}{a - d}; \overset{y}{b - e}; \overset{z}{c - f})$

$d(P, r) = \dfrac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$

• distância entre duas retas:

$r: (P_x; P_y; P_z) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$

$s: (Q_x, Q_y, Q_z) + \lambda(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.

$d(r, s) = \dfrac{|\vec{PQ} \cdot \vec{v} \times \vec{w}|}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}$

• distância entre ponto e plano

$d(A, \pi) = \dfrac{|a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $\pi: x + y + z + 1 = 0$.

$A = (a, b, c)$.

⤳ se uma reta é paralela a um plano: $r \parallel \pi$; então $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

• $tg\, \theta = \dfrac{B}{A - C}$ • $sen\, \theta = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{v}\|}$

• $\cos\theta = \dfrac{|u \cdot v|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

posição relativa de

• Reta e reta. $r:(a,b,c)$ $s:(m,n,p)$ $A(x_A, y_A, z_A)$
$B(x_B, y_B, z_B)$.

→ São reversas se $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{AB})$ são L.I → matriz $\neq 0$

→ são paralelas se $(\vec{r}, \vec{s})$ são L.D → $\vec{r} = \lambda(\vec{s})$ matriz $= 0$.

→ são concorrentes se são coplanares e não são paralelas.
$(\vec{r}, \vec{s})$ L.I e $\vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}$ são L.D

$$\begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

matriz $= 0$

• Reta e plano. $r: X = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(m, n, p)$
$\pi: ax + by + cz + d = 0$.

→ $r \subset \pi$ se $r \cap \pi$ contém infinitos pontos.

→ $r // \pi$ se $r \cap \pi = \emptyset$ r não está contido no plano.

→ $r \pitchfork \pi$ se $r \cap \pi$ contém um único ponto.
↳ r é transversal à π.
↳ matriz $\neq 0$

Roteiro:
1) achar um vetor $\vec{v} = (m,n,p)$ paralelo à reta e uma equação geral $ax + by + cz + d = 0$ para o plano.
2) se $am + b.n + c.p \neq 0$ a reta é transversal.
3) se $am + bn + cp = 0$ a reta $r \subset \pi$ ou $r // \pi$.
para verificar pegue um ponto da reta e verifique no plano.

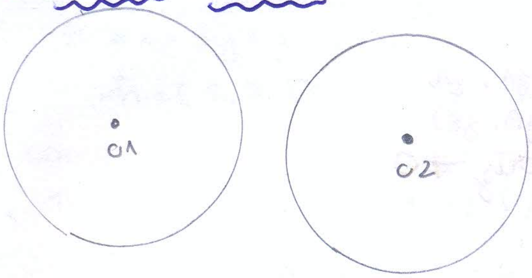
• Plano e plano $\pi_1: a_1.x + b_1.y + c_1.z + d_1 = 0$
$\pi_2: a_2.x + b_2.y + c_2.z + d_2 = 0$

→ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ então $\pi_1 = \pi_2$.

→ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ então $\pi_1 // \pi_2$

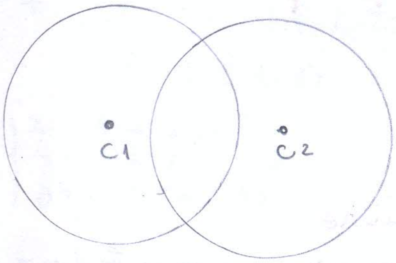
→ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ então $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta.

• esferas e esfera.

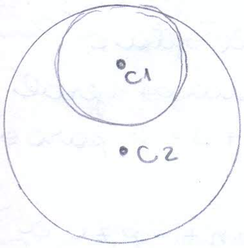


→ $d(C_1,C_2) > R_1+R_2$

→ $d(C_1,C_2) = R_1+R_2$



→ $d(C_1,C_2) < R_1+R_2$



→ $d(C_1,C_2) + R_1 = R_2$

• Rotação Eliminar o termo misto

$x = u \cdot \cos\theta - v \cdot \operatorname{sen}\theta$

$y = u \cdot \operatorname{sen}\theta + v \cdot \cos\theta$

• translação Eliminar o termo de 1º grau.

→ Escrever as linhas como colunas.

$x = h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w$

$y = k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w$

$z = m + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w$

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ f_1 = (& a_{11}, & a_{21}, & a_{31}) \\ f_2 = (& a_{12}, & a_{22}, & a_{32}) \\ f_3 = (& a_{13}, & a_{23}, & a_{33}). \end{array}$$

→ Qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1)?

Sim!

$(1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)$

$(2,2,4) = 2(1,0,0) + 2(0,1,0) + 4(0,0,1)$

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

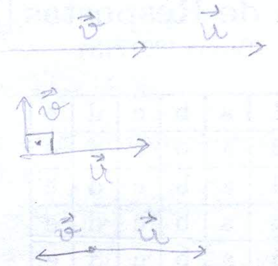
→ Para verificar se um vetor pode ser escrito em uma base $\mathbb{R}^3$

1º verificar se é L.I.

2º combinação linear

• Ângulo entre vetores

$\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|\vec{v}\|}$ $\theta = 0°$



$\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

$\operatorname{sen}\theta =$

Produto escalar

$u \cdot \vec{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$

por isso quando $u \perp v$, $u \cdot v = 0$ porque $\cos 90° = 0$.

Produto escalar é comutativo! $u \cdot v = v \cdot u$

Produto vetorial = área do paralelogramo.

O produto vetorial gera um vetor ortogonal, portanto $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = (v_3 \times v_2) \cdot v_1$

$\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\|u \times v\|}{\|u\| \cdot \|v\|}$

Produto misto ⇒ volume do paralelogramo.

$u \times v \cdot w$

$\vec{u} = a, b, c$

$\vec{v} = d, e, f$

$\vec{w} = g, h, i$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$\|u \times v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$