MAT 121 - Cálculo diferencial e integral II
Bacharelado diurno em Física - 2° semestre de 2014
Docente: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri
Notas das aulas e exercícios sugeridos - Atualizado 4.12.2014

1. Segunda-feira, 22 de setembro de 2014

Apresentação do curso. Veja-se o arquivo relativo às informações do curso na minha pagina web www.ime.usp.br/$\sim$pluigi

***

Integral definida. Definição e exemplos básicos. Partição e partição pontuada de um intervalo $[a, b]$. Integral obtida como limite de somas finitas quando o parâmetro de afinação tende a zero.

Problemas: 1) quais são as funções integráveis? 2) temos técnicas para calcular a integral que não seja o uso da definição?

Teorema 1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em todo o intervalo com a possível exceção de um número finito de pontos (de desconitinuidade) e é limitada, então é integrável.*

Exercício 1. Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ onde $f(x) = 2$ para todo x. (O exercício parece simples, mas deve ser abordado usando a definição di integral e não através do fato intuitivo de que a área do retângulo subgráfico é 2).

Exercício 2. Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ onde $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$, enquanto $f(1) = 3$.

Exercício 3. Prove, usando a definição de integral, que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ não é limitada, então não é integrável. Se não conseguir o resultado geral do excercício, tente, pelo menos, no caso da função
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Exercício 4. (difícil) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que diferem só em um número finito de pontos do domínio. Prove, usando a definição de integral, que se f é integrável, então g é integrável e
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Quarta-feira, 24 de setembro de 2014

Exercício 5. A *função de Dirichlet* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irracional.} \end{cases}$$
Prove, aplicando a definição de integral, que f não é integrável.

Apresentamos agora uma lista de propriedade das funções integráveis. A prova delas pode ser dada pelo leitor como exercício.

Proposição 2. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis e c um número real. Então segue:*

i) *$f+g$ é integrável e $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,*

ii) *cf é integrável e $\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$,*

iii) *se $r, s \in [a,b]$, então f é integrável em $[r,s]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^r f(x)\,dx + \int_r^b f(x)\,dx$,*

iv) *se $f \leq g$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$,*

v) *se $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (caso particular do acima),*

vi-a) *a função $g(x)$ definida como $g(x) = \max\{f(x), 0\}$ é integrável,*

vi-b) *a função $h(x)$ definida como $h(x) = \min\{f(x), 0\}$ é integrável,*

vii) *$|f|$ é integrável (consequência dos vi), sendo $|f(x)| = \max\{f(x),0\} - \min\{f(x),0\}$) e $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ (caso particular do iv)).*

Até agora, a integral foi definida pelo clássico símbolo, aquele tipo de letra "s" esticada,[1] colocado em baixo o primeiro extremo "a" do intervalo $[a,b]$ e colocando em cima o segundo extremo b. Será útil definir a integral $\int_b^a f(x)\,dx$, porque em várias aplicações e contas aparece a necessidade de inverter os extremos. A definição desta integral com extremos na ordem inversa é

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

A igualdade acima é simplesmente uma definição, e não precisa de explicação lógica. Por outro lado, uma possibilidade de dar um significado à fórmula acima pode levar em conta a ideia de que na integral $\int_a^b f(x)\,dx$ a variável x é como se viajasse de a até b, enquanto na integral $\int_b^a f(x)\,dx$ x viaja no sentido oposto. Neste sentido podemos entender que as duas integrais têm sinal oposto. Em alguns textos se encontra o termo "integral orientada".

Exercício 6. Pegue a fórmula iii) da proposição **??** e use-a para provar que $\int_T^S f(x)\,dx = \int_T^U f(x)\,dx + \int_U^S f(x)\,dx$, qualquer seja a ordem dos números reais S, T, U e posto que as três integrais acima existam.

Exercício 7. Prove alguns dos itens da proposição **??** acima.

* * * * *

O *teorema fundamental do cálculo integral* é o instrumento principal para resolver, quando for possível, o problema do cálculo da integral de uma função em um intervalo. O teorema precisa do seguinte resultado preliminar.

Teorema 3 (Teorema da média integral)**.** ***(com demonstração)*** *Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c).$$

Para introduzir teorema fundamental do cálculo integral, é preciso o conceito de função integral.

Definição. Dado um intervalo $[a,b]$, seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. A função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt,$$

[1]Este símbolo deve-se ao fato que a "s" é inicial de soma, e a integral é concebida como uma soma que passa ao limite. Esta foi a notação escolhida desde o final do século de 1600.

é dita *função integral.*

Teorema 4 (Teorema fundamental do cálculo integral)**.** ***(com demonstração)*** *Sejam dados um intervalo $[a,b]$ e uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Então a função integral*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável em cada $x\in[a,b]$ e temos

$$F'(x)=f(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

Além disso, se $G(x)$ é uma outra função derivável tal que $G'(x)=f(x)$ para cada $x\in[a,b]$, então

$$G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

A igualdade anterior é chamada *fórmula fundamental do cálculo integral.*

Exercício 8. Calcule as integrais seguintes:

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}x\,dx\qquad \int_0^{\pi}\cos x\,dx\qquad \int_0^1\sqrt{x}\,dx\qquad \int_2^3 x^2\,dx\qquad \int_3^4 3x+5\,dx\qquad \int_1^2\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\qquad \int_{-1}^1 e^x\,dx\qquad \int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx\qquad \int_0^1 e^{2x}\,dx\qquad \int_0^1\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\,dx$$

$$\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\qquad \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\qquad \int_1^2\frac{1}{x^3}\,dx$$

Exercício 9. Determine as áreas das porções de plano incluidas entre as curvas seguintes:
1) $y=x$, $y=e^x$, $0\le x\le 1$
2) $y=x^2$, $y=2x-x^2$
3) $y=x^2$, $y=2x$, $y=2-x$

Exercício 10. Cálcule as integrais seguintes ($\log x$ *é o logaritmo natural em base* e):

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x}{2+\cos x}\,dx\qquad \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx\qquad \int_1^3\frac{\log x}{x}\,dx\qquad \int_0^1 x^2\cos x^3\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}2x\,(1+\cos^2 x)\,dx\qquad \int_{-1}^1\frac{e^x}{1+e^x}\,dx\qquad \int_1^e\frac{\cos(\log x)}{x}\,dx\qquad \int_1^e\frac{\log x+\log^2}{x}\,dx$$

$$\int_0^1 e^x\operatorname{tg}e^x\,dx\qquad \int_e^{e^2}\frac{1}{x\log x}\,dx\qquad \int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x\,\cos x}{1+\cos^4 x}\,dx$$

Exercício 11. Cálcule as integrais seguintes

$$\int_1^e x\log x\,dx\qquad \int_0^2 2x\operatorname{arctg}x\,dx\qquad \int_1^3 x^2e^{-x}\,dx\qquad \int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} x \,\mathrm{sen}\, x \, dx \qquad \int_{0}^{1} 2x \,\log(x+1) \, dx$$

Exercício 12. As integrais seguintes precisam de uma oportuna troca de variável

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx \qquad \int_{0}^{2} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \, dx \qquad \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$$

3. Quinta-feira, 25 de setembro de 2014

Exercício 13. Estudo da função

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{sen}\, t}{t} \, dt$$

Em particular, queremos determinar: o domínio de F, o sinal, a derivada, em quais intervalos F é crescente ou decrescente, os pontos de máximo e mínimo relativo.

Observamos, inclusive, algumas diferenças com a função

$$G(x) = \int_{1}^{x} \frac{|\,\mathrm{sen}\, t|}{t} \, dt$$

Exercício 14. Estudo da função

$$F(x) = \int_{x}^{x+1} \frac{1}{(t+2)e^{t^3}} \, dt$$

Em particular, estudamos o domínio, a derivada de F. Podemos provar que F é decrescente em $(-2, +\infty)$.

Exercício 15. Seja a função

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{|t|+1}{t^4+1} \, dt$$

Determine: o domínio de F, $F'(x)$, o sinal de F e $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercício 16. Sejam as funções

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F(x) = \int_{0}^{x} f(t) \, dt$$

Determine o domínio de F, os pontos de máximo e mínimo relativo. Tente determinar $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. (Observação: tente provar, preliminarmente, que a integranda f é contínua em zero e, usando a definição de derivada, que é derivável em zero).

Exercício 17. Seja a função

$$F(x) = \int_{x}^{x+2} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} dt$$

Determine: o domínio de F, e calcule $F'(x)$. (Dica: lembre que a potência com expoente real, a^b é definida se $a > 0$).

Exercício 18. Seja a função

$$F(x) = \int_x^{x+4} \frac{1}{t(t-1)}\,dt$$

Determine (sem calcular a primitiva da função integranda): o domínio de F. Calcule $F'(x)$, o sinal de F os pontos de máximo e mínimo relativo, os limites interessantes de F. Desenhe o gráfico de F.

Exercício 19. Seja a função

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2}(t^2-1)\,dt$$

Determine (sem calcular a primitiva da função integranda): o domínio de F. Calcule $F'(x)$, os pontos de máximo e mínimo relativo, os limites interessantes de F, os intervalos de concavidade e convexidade. Desenhe o gráfico de F.

Exercício 20. Determine o domínio e o sinal da função

$$F(x) = \int_{x-1}^{(x-1)^3} \frac{1}{\log(t^2+2)}\,dt$$

Exercício 21. Determine o domínio e o limite para $x \to +\infty$ da função

$$F(x) = \int_{x-1}^{(x-1)^3} \frac{t^2+\cos t}{t+1}\,dt$$

4. Segunda-feira, 29 de setembro de 2014

Outros exercícios sobre as funções integrais.

Exercício 22. Determine o domínio e tente determinar outras informações (sinal e crescimento) sobre o comportamento das funções seguintes:

$$\int_0^x \frac{\cos t}{1+t}\,dt, \qquad \int_x^{x+1} \frac{\operatorname{sen} t}{1-2t}\,dt, \qquad \int_x^{1-2x} \frac{\cos t}{t^2+t}\,dt.$$

Exercício 23. Escreva as derivadas das funções acima.

Integrais impróprias. Exemplos:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Definição geral de integral imprópria de uma função não limitada em um intervalo $(a,b]$ (ou $[a,b)$).

Outro caso: integral imprópria de uma função definida em um intervalo não limitado. Exemplos e definição geral.

Exemplos: convergência das integrais impróprias:

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx,$$

onde α é positivo, fixado, diverso de 1.

5. Quarta-feira, I de outubro de 2014

Teorema 5. ***(com demonstração)*** *Sejam $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis (segundo Riemann–Cauchy) em todo intervalo $[c, b]$ (i.e. para todo c tal que $a < c \leq b$) e tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Então:*

(1) *se* $\displaystyle\int_a^b g(x)$ *converge, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge;*

(2) *se* $\displaystyle\int_a^b f(x)$ *não converge, então* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *não converge;*

Exercício 24. Escreva o teorema do confronto no caso de funções negativas.

Exercício 25. Escreva o teorema do confronto no caso de funções definidas em intervalos não limitados.

Exercício 26. Dê a demonstração do teorema do confronto nos casos não provados em sala de aula.

Exercício 27. Estude a convergências das integrais impróprias

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx.$$

Exercício 28. Estude a convergência da integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Importante: *neste exercício não podemos determinar a primitiva da função integranda. Porém usando um confronto, podemos provar que a integral converge. Observe-se que o confronto pode ser dado a partir não necessariamente do primeiro extremo de integração, mas de um valor maior, digamos a. Neste caso, se o integral entre 0 e a existe segundo Riemann–Cuachy, pode ser estudado o limite*

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c e^{-x^2}\,dx$$

para obter a convergência (o não) da integral imprópria inicial, usando possivelmente um confronto. Ou seja, temos

$$\lim_{c\to+\infty} \int_o^c e^{-x^2}\,dx = \int_0^a e^{-x^2}\,dx + \lim_{c\to+\infty} \int_a^c e^{-x^2}\,dx$$

posto que $\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ exista. Os dois limites acima têm o mesmo comportamento (existem finitos, existem infinitos, ou não existem).

Esta abordagem pode ser generalizada a muitos exemplos.

Exercício 29. Estude o limite quando $x \to +\infty$ de

$$\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_1^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$$

Exercício 30. Estude a convergência das integrais impróprias

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{1+x^3}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{3x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Exercício 31. Estude o limite quando $x \to +\infty$ de

$$\int_1^{x^2} \frac{1}{x^4+x^3-2}\,dx.$$

Teorema 6. ***(sem demonstração)*** *Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrável (segundo Riemann–Cauchy) em todo intervalo $[c, b]$ (i.e. para todo c tal que $a < c \leq b$) e tais que $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Seja a função $|f(x)|$ integrável (segundo Riemann–Cauchy) em todo intervalo $[c, b]$. Então:*

(1) *se* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|$ *converge, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge;*

Exercício 32. (em sala de aula) Estudo da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Exercício 33. (em sala de aula) Estudo da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx.$$

Introdução das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ em comparação com

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Exercício 34. Estude a convergência das integrais seguintes, determinando, quando possível, o valor exato: (*são muitos exercícios! faça só alguns*)

$$\int_0^{-2} \frac{1}{x^2+x-2}\,dx \qquad \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-x-3}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{x}{\log(1+x^2)}\,dx \qquad \int_2^e \frac{1}{1-\log x}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{x^2}\,dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{(\cos x)^2 + e^{1+1/x}}{x^2}\,dx$$

$$\text{(dificil)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\,\log|\sqrt{x+3}-1|}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\,dx$$

$$\int_0^1 x\log x\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} e^{-x}\,dx \qquad \int_2^4 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-3}\right)dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^{3/2}}\,dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \log x\,dx \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2-4x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$$

Exercício 35. Estude a convergência da integral seguinte:

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

Observação: não é possível determinar elementarmente uma primitiva de $\operatorname{sen} x^2$ (que é coisa bem diversa de $\operatorname{sen}^2 x$, cuidado!). Pode tocar a variável por $t = x^2$, fazer um passo de integração por partes, e, enfim, estudar o limite que define a integração imprópria. Tente!!

6. Quinta-feira, 2 de outubro de 2014

Definição de curva em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Definição de trajetória. Parametrização de uma trajetória.

Exemplos: retas, cônicas, hélice cilíndrica, gráficos de funções.

Exercício 36. Desenhe a trajetória da curva $\phi : [0, 2\pi]$, $\phi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Exercício 37. Desenhe a trajetória da curva $\phi : [\pi/4, \pi/2]$, $\phi(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$.

Exercício 38. Desenhe a trajetória da curva $\phi : [\pi, 2\pi]$, $\phi(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos 2t)$.

Exercício 39. Determine uma parametrização da reta pelos pontos $(1, 2 - 1)$ e $(0, 1, 3)$.

Exercício 40. Determine uma parametrização da trajetória obtida como interseção do paraboloide de equação $z = x^2 + y^2 - 2$ e do plano de equação $y - z = 3$. Esboce em desenho da figura.

Curvas em coordenadas polares: espiral de Arquimedes.

Exercício 41. Escreva uma parametrização da elipse $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Exercício 42. Desenhe a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Parametrização da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercício 43. Escreva uma parametrização de um ramo da hipérbole $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Exercício 44. Desenhe a hipérbole $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Espiral de Arquimedes e espiral logaritmica.

Exercício 45. Escreva uma parametrização da espiral de equação polar $\rho = 2\theta$, onde $\theta \in [0, +\infty)$.

Exercício 46. Escreva uma parametrização da espiral de equação polar $\rho = 3\theta e^{\theta}$, onde $\theta \in [0, 4\pi]$.

Exercício 47. Desenhe as duas trajetórias acima.

Exercício 48. Escreva uma parametrização da cardióide de equação polar $\rho = 1 + \cos\theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$.

7. Segunda-feira, 6 de outubro de 2014

Definição de vetor tangente (vetor velocidade) a uma curva e de reta tangente a uma trajetória.

Exemplos em sala de aula: cardioide de equação polar $\rho = 1+\cos\theta$, parábola semicúbica $\phi(t) = (t^2, t^3)$, com $t \in [-1, 1]$, circunferência.

Exercício 49. Escreva uma parametrização dos gráficos das funções seguintes:
a) $x^2 + 1$, $x \in [-1, 2]$; b) $\operatorname{arctg} x$, $x \in [-\pi, \pi]$; c) $x \log x$, $x \in (0, e]$; d) $|x|x$, $x \in [-2, 1]$.

Exercício 50. Analise a diferença entre os conceitos de curva e trajetória. Escreva um exemplo de duas curvas com a mesma trajetória, calcule os vetores tangentes em dois valores do parâmetro, mas com mesmo ponto imagem sobre a trajetória. Verifique que os vetores são paralelos e determine a reta tangente. (Pense no exercício feito em sala de aula; reescreva aquele exercício e procure um novo exemplo).

Exercício 51. Desenhe as trajetória das curvas seguintes (todas definidas em tudo $\mathbb{R}$):
a) $\phi(t) = \big(t(t-1), (t-1)(t-2)\big)$, b) $\phi(t) = \big(-t(t+1), (t-1/2)(t-1)(t-2)\big)$.

Exercício 52. Estude as três curvas seguintes (todas definidas em tudo $\mathbb{R}$):
a) $\phi(t) = \big(t, |t|\big)$, b) $\psi(t) = \big(t^3, |t^3|\big)$, c) $\chi(t) = \big(t^2, t^3\big)$.

Diga se o vetor tangente é sempre definido, se é nulo em alguns pontos. Analise a relação entre as duas primeiras curvas: explique porque, na sua opinião, do ponto de vista físico, um particular vetor tangente *deve* ser nulo. Enfim, desenhe as trajetórias.

Exercício 53. Escreva a equação da reta tangente às trajetórias parametrizadas seguintes nos pontos escritos ao lado:

$x = \cos t,\ y = 1 - t,\qquad (1, 1)$

$x = e^t,\ y = t + t^2,\qquad (1, 0)$

$x = \operatorname{sen} t \cos t,\ y = 1/\operatorname{sen} t,\qquad (0, 1)$

$x = t^2,\ y = t^3,\qquad (1, 1)$

$x = \log(1 + t),\ y = 2t - t^2,\qquad (0, 0)$

$x = \operatorname{tg} t,\ y = \cos 2t,\qquad (1, 0)$

$x = 1 - \operatorname{arctg} t,\ y = 1 - t^2,\qquad (1 - \pi/4, 0)$

8. Quarta-feira, 8 de outubro de 2014

Defininição de comprimento de uma curva e comprimento de uma trajetória.

Exercício 54. O leitor analise a diferença entre os conceitos de comprimento de curva e comprimento de trajetória. Explique através de um exemplo quando o comprimento de uma curva não representa o comprimento da trajetória correspondente

Exercício 55. (em sala de aula) Determine a parametrização de um arco de ciclóide obtido da rotação de um disco de raio $r > 0$ fixado e cujo centro tem coordenadas $(0, r)$ na posição inicial. Calcule o comprimento do disco e determine as equações das retas tangentes à trajetória em alguns pontos escolhidos (por vocês).

Exercício 56. Escreva a parametrização de uma hélice cilíndrica, em um intervalo limitado, e calcule o comprimento.

Exercício 57. Monte o problema do cálculo do comprimento de uma elipse. (O cálculo, depois, não vai até o fim porque aparece uma integral difícil.)

Exercício 58. Calcule o comprimento da parábola $y = x^2$, com $1 \leq x \leq 2$. Desenhe a trajetória.

Exercício 59. Calcule o comprimento da curva $\phi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [\pi, 4\pi]$. Dê um comentário do resultado.

Exercício 60. Exercício em sala de aula: comprimento da cardióide de equação polar $\rho = 1 + \cos\theta$.

Exercício 61. Calcule o comprimento da *parábola semicúbica*, parametrizada por $x = t^2$, $y = t^3$, onde $t \in [-1, 1]$.

Exercício 62. Calcule o comprimento das curvas seguintes:

$(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$(e^t - 1, e^{2t} + 1) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$(\arccos t, \log t) \qquad 1/2 \leq t \leq 1$

$(\operatorname{sen} t - t\cos t, t \operatorname{sen} t + \cos t) \qquad 0 \leq t \leq \pi/2$

$(\operatorname{sen} t - t\cos t, t \operatorname{sen} t + \cos t + t^2/2) \qquad 0 \leq t \leq \pi/2$

$(\cos^2 t, \cos t \operatorname{sen} t) \qquad 0 \leq t \leq \pi/2$

$(\operatorname{arcsen} t, \log(1+t)) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$(\frac{\cos 2t}{4}, \cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t) \qquad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

$(t^2 + 10t, 4t^2 + 5t) \qquad -1 \leq t \leq 1$

Exercício 63. Calcule o comprimento das trajetórias seguintes, expressas como gráficos de funções:

$y = \log\cos x, \qquad 0 \leq x \leq \pi/3$

$y = \log x, \qquad 3/4 \leq x \leq 4/3$

$y = (e^x + e^{-x})/2, \qquad a \leq x \leq b$ (catenária)

$y = 2 - 2\sqrt{x}, \qquad 1 \leq x \leq 4$

$y = \sqrt{1-x}, \qquad 0 \leq x \leq 1$

$y = x + e^x, \qquad 0 \leq x \leq \log 2$

Exercício 64. Calcule o comprimento das trajetórias seguintes, expressas em coordenadas polares:

$\rho = \operatorname{sen}\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

$\rho = \theta^2 \qquad 0 \leq \theta \leq 3/2$ (espiral quadrática)

$\rho = \theta^3 \qquad 0 \leq \theta \leq 4$ (espiral cúbica)

$\rho = e^\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

9. Quinta-feira, 9 de outubro de 2014

Integrais de linha. Definição e explicação do significado da integral de linha no cálculo da área de uma superfície bidimensional em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 65. Calcule as integrais de linha seguintes:

$\displaystyle\int_C \sqrt{1+x^2+3y}\,ds$, onde C é o arco $y = x^2$, $0 \le x \le 1$

$\displaystyle\int_C e^{2z}\,ds$, onde C é parametrizado por $x = \cos(\log t)$, $y = \operatorname{sen}(\log t)$, $z = t$, $1 \le t \le e^2$

$\displaystyle\int_C xyz\,ds$, onde C é parametrizado por $x = r\cos t$, $y = r\operatorname{sen} t$, $z = ht$, $0 \le t \le 2$

10. Segunda-feira, 13 de outubro de 2014

Introdução ao estudo das funções reais de várias variáveis reais. Domínio, contradomínio, imagem e gráfico de uma função.

Exercício 66. Escreva as definições de domínio, contradomínio, imagem e gráfico de uma função real de várias variáveis reais.

Exercício 67. (em sala de aula) Determine domínio e imagem de $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Desenhe um gráfico aproximado da função.

Exercício 68. (em sala de aula) Estude as funções $f(x,y) = x^2+y^2$ e $g(x,y) = x^2-y^2$. Tente desenhar e analisar o gráfico delas. Determine a imagem.

Exercício 69. Estude as superfícies $z^2 = x^2+y^2-1$, $z^2 = x^2+y^2+1$ e $z^2 = x^2+y^2$. Tente desenha-las. Escreva elas ou porções delas, se for possível, como gráficos de oportunas funções de duas variáveis.

11. Quarta-feira, 15 de outubro de 2014

Exercício 70. (em sala de aula) Considere a função

$$f(x,y) = \log\Big(2\operatorname{sen}(x^2+y^2)\Big).$$

a) Determine e desenhe o domínio de f. b) Determine e desenhe os subconjuntos do domínio onde a função é positiva, onde é negativa e onde se anula. c) Determine a imagem de f.

Exercícios em sala de aula para preparação da P1.

Exercício 71. (em sala de aula) Calcule

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^2(1+x^2)}\,dx.$$

Em seguida, diga se a integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos^2 x}{(\operatorname{arctg} x)^2(1+x^2)}\,dx$$

converge.

12. Quinta-feira, 16 de outubro de 2014

Definição de conjunto de nível. Estudo das curvas de nível das funções $f(x,y) = \cos(x+y)$ e $g(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$.

Exercícios em sala de aula para preparação da P1: funções integrais.

13. Segunda-feira, 20 de outubro de 2014

Exercícios em sala de aula para preparação da P1: curvas.

14. Quarta-feira, 22 de outubro de 2014

Prova P1

15. Quinta-feira, 23 de outubro de 2014

Conceitos de limite e continuidade para funções reais de duas ou mais variáveis reais. Resultados básicos (sem demonstração). Soma, produto, quociente, composição de limites. Teoremas de confronto.

Teorema sobre o limite de uma função de várias variáveis que depende, de fato, só de uma variável.

Exercício 72. Calcule (se existem) os limites seguintes:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2(xy)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2 \operatorname{sen}(\pi x)}{(x-2)+(y-1)^2}$$

Exercício 73. Diga se é contínua na origem a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 74. Determine os pontos de interseção entre as superficies de equação $2x - 2z - y = 10$ e $2z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$.

Exercício 75. Calculem, se existem,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$$

Exercício 76. Prove que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

Exercício 77. Prove que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x-y^2}$.

Exercício 78. Prove que a função seguinte não é contínua na origem.

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{x/y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

16. Quarta-feira, 29 de outubro de 2014 e

17. Quinta-feira, 30 de outubro de 2014

Introdução ao cálculo diferencial.

Definição de direção e de derivada direcional.

Exercício 79. Escreva a definição de derivada direcional de uma função f ao longo de um vetor unitário v em um ponto interior P do domínio.

Exercício 80. Escreva a definição de derivada parcial de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exercício 81. Considere as funções $x\log(xy^2)$, $\cos(xy) + \operatorname{sen}(x+y)$, xe^y. Considere os vetores unitários $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ e os pontos $(1,2)$, $(3,3)$, $(-1,-4)$.

Calcule as derivadas as funções dadas ao longo dos vetores dados e nos pontos dados.

Exercício 82. Considere a função $xyz - \operatorname{sen} xz + ye^{x^2y}$. Calcule as derivadas ao longo das direções dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na origem de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 83. Considere a função $\sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$. Seja $w = (1,-1,1)$. Calcule o vetor unitário v na mesma direção e sentido de w. Em seguida, calcule a derivada direcional da função ao longo de v no ponto $(1,1,-1)$.

Exercício 84. Calcule as derivadas e parciais de $f(x,y) = e^{xy}$, em um ponto genérico (x,y). Em seguida, escolha algumas direções e calcule as derivadas direcionais ao longo das direções escolhidas em um ponto genérico (x,y).

Exercício 85. Determine o domínio e calcule as derivadas parciais das funções seguintes

a) $x\log(xy^2)$, b) $\cos(x/y) + \cos(y/x)$, c) $\operatorname{sen}(x+y) + xe^y$, d) $(x+y)e^{x-y}$, e) $\operatorname{arctg}(x/y)$

f) $\log(x\log y)$, g) $2\sqrt{xy^3} - \sqrt{x\sqrt{y}}$, h) $e^{\sqrt{x \operatorname{sen} y}}$, i) $xyz - \operatorname{sen} xz + ye^{x^2z}$, l) $\sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$.

Exercício 86. Prove que a função seguinte não é contínua na origem e que possui as derivadas em qualquer direção na origem.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 87. Observe, graças ao exercício anterior, que em duas variáveis é falso que se uma função admite derivada então é contínua (em cálculo 1 é verdadeiro)

Exercício 88. Considere a função $f(x,y) = |x| + |y|$. Sejam as direções $w = (1,0)$ e $v = (0,1)$. Calcule as derivadas direcionais de f nos pontos $(2,0)$ $(0,-3)$ ao longos dos vetores w e v. Todas estas derivadas existem? Analise o problema.

Exercício 89. Considere a função $g(x,y) = |x+y|$. Sejam as direções $w = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $v = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Calcule as derivadas direcionais de g nos pontos $(2,2)$ $(1,-1)$ ao longo dos vetores w e v. Todas estas derivadas existem? Analise o problema.

Exercício 90. Prove que a função seguinte (que não é contínua na origem, como visto num exercício anterior) possui as derivadas em qualquer direção na origem.

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{x/y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Exercício 91. Dê a definição de gradiente de uma função.

Introdução ao conceito de função diferenciável e de diferencial de uma função.

18. Segunda-feira, 3 de novembro de 2014

19. Quarta-feira, 5 de novembro de 2014

20. Quinta-feira, 6 de novembro de 2014

Além dos conceitos de derivada parcial e direcional, temos um conceito mais profundo de derivação que generaliza melhor o conceito de derivada de cálculo 1.

Para introduzí-lo consideramos o problema da determinação e da definição da reta tangente ao gráfico de uma função de uma variável. Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $x_0 \in I$ fixado. Sejam as duas funções

$$T(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{e} \quad S(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0),$$

onde $m \neq f'(x_0)$ é fixado. De fato, $S(x)$ representa uma família de funções, variando m em $\mathbb{R}$. O gráfico de T representa a reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$, enquanto os gráficos das S representam, para cada m, as retas secantes ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ (exceto só a secante vertical).

Lembramos que a reta que é gráfico de $T(x)$ *é definida como reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(x_0, f(x_0))$. Ou seja, na análise matemática *não existe uma noção anterior de reta tangente* (por exemplo uma noção geométrica).

$T(x)$ e $S(x)$ aproximam f em x_0, onde "aproximar em x_0" significa que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - T(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) - S(x) = 0.$$

Exercício 92. Verifique os limites acima, sabendo que f é contínua, sendo derivável.

A aproximação dada por T é melhor do que todas as aproximações dadas pelas $S(x)$, porque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T(x)}{x - x_0} = 0 \quad \text{enquanto} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - S(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - m \neq 0.$$

Exercício 93. Verifique os limites acima.

Dizemos que $f(x) - T(x)$ (o resto, ou erro, da aproximação por T) tende para zero "mais rapidamente" do que $x - x_0$, enquanto $f(x) - S(x)$ (o resto, ou erro, da aproximação por S) tende para zero "com a mesma velocidade" do que $x - x_0$.

Observe que a função $x \mapsto f'(x_0) \cdot x$ é uma função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Exercício 94. Prove a observação acima.

Neste sentido podemos definir um conceito de derivada em cálculo 2 como um operador linear que garante a melhor aproximação de primeira ordem uma função dada.

Definição de função diferenciável e de diferencial de uma função dada em sala de aula.

Exercício 95. Prove que a função seguinte não é contínua na origem e que possui as derivadas em qualquer direção na origem.

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{x/y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Teorema – (com demonstração) Seja D um domínio de $\mathbb{R}^2$, $(\overline{x}, \overline{y})$ um ponto interior de D e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função dada que seja diferenciável em $(\overline{x}, \overline{y})$. Então:

(1) f é contínua em $(\overline{x}, \overline{y})$.

(2) f possui derivadas parciais em $(\overline{x}, \overline{y})$ e vale o limite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(\overline{x}+h_1, \overline{y}+h_2) - f(\overline{x}, \overline{y}) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})h_1 - \dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

(ou seja, os valores "a" e "b" da definição de limite são as derivadas parciais de f em $(\overline{x}, \overline{y})$).

(3) f possui derivadas direcionais em $(\overline{x}, \overline{y})$ em qualquer direção $v = (v_1, v_2)$ e vale a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) = \left\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), v \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})v_2.$$

Exercício 96. Prove o teorema anterior, conforme ao que foi feito em sala de aula.

Exercício 97. Diga porque a função do exercício 55 não é diferenciável na origem.

Exercício 98. Enuncie o teorema para funções de 3 variáveis.

Teorema do diferencial – (com demonstração) no caso simples de $\mathbb{R}^2$. Seja D um domínio de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função dada. Suponha que as derivadas parciais sejam definidas em todos os pontos de D e sejam contínuas em um ponto $\overline{x}$. Então, f é diferenciável em $\overline{x}$.

Definição de plano tangente ao gráfico de uma função $f(x, y)$ em um ponto $(\overline{x}, \overline{y}, f(\overline{x}, \overline{y}))$.

Exercício 99. Prove que $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em cada ponto do domínio. Escreva a equação do plano tangente ao gráfico no ponto $(1, 2, f(1, 2))$.

Exercício 100. Escreva o gradiente em $(1, \pi)$ de $f(x, y) = x \operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$. Prove que f é diferenciável. Calcule o plano tangente ao gráfico no ponto $(1, \pi, f(1, \pi))$.

Exercício 101. Seja a função

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^a \, e^{-x^2/y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Estude a continuidade, derivadas parciais e diferenciabilidade de f respeito ao parâmetro real a.

Exercício 102. Seja $f(x,y) = \operatorname{sen}(ax + y^2)$. Diga para quais valores do parâmetro real a o plano tangente ao gráfico de f em $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ é paralelo à reta interseção dos planos de equações $x = y$ e $y = 2z$. Existem valores de a tais que o plano tangente é ortogonal à reta acima?

Exercício 103. Verdadeiro ou falso?

a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são definidas para todos (x,y). f é diferenciável?

b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são definidas e contínuas para todos (x,y). f é diferenciável?

Exercício 104. Calcule as derivadas parciais de $f(x,y) = e^{x^2 y}$. Em seguida, escolha alguns pontos do gráfico e determine o plano tangente ao gráfico de f nestes pontos.

Exercício 105. Calcule a derivada direcional na direção $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ de $f(x,y) = x^2 y - e^{x+y}$

Exercício 106. Calcule as derivadas parciais das funções seguintes:

$x^3y^2 \qquad x^2 y \operatorname{sen} xy \qquad \operatorname{arctg}(x/y) \qquad x^y \qquad x^2 y^{-3} \qquad \sqrt{x^2+y^2} \qquad \log(x^2+y^2) \qquad \operatorname{tg}(x+y^2)$

Exercício 107. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Resolva os problemas seguintes:

(1) Prove que f é contínua na origem;
(2) a continuidade acima que informação dá sobre a diferenciabilidade de f em $(0,0)$?
(3) Prove que f admite derivada direcional em $(0,0)$ ao longo de qualquer direção $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Compare este resultado com o produto escalar $\langle \nabla f(0,0), v \rangle$
(4) o item acima o que diz sobre a diferenciabilidade de f em $(0,0)$?

Regra da cadeia. Derivada de funções compostas **(com demonstração)**.
Curvas de nível e ortogonalidade entre gradiente e curvas de nível **(com demonstração)**.
Gradiente como direção e sentido de máximo das derivada direcionais **(com demonstração)**.

21. Segunda-feira, 10 de novembro de 2014

22. Quarta-feira, 12 de novembro de 2014

23. Quinta-feira, 13 de novembro de 2014

Olhe o site
`http://www.mat.ufba.br/mat042/aula24/aula24.htm`
para alguns exemplos de curvas de nível.

Olhe o site
`www.professores.uff.br/almaraz/images/stories/Aulas_Denise/Parte_11_Calc_2B_-_Vetor_Gradiente.pdf`
para a relação entre gradiente e curvas de nível. *Se o link acima não entrar, copie o nome do link diretamente no browser*

Derivadas segundas. Teorema de Schwartz sobre a inversão da ordem de derivação.

Exercício 108. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas no generico ponto (x, y) das funções seguintes:

a) $x^2 \log x + xy$, b) $\dfrac{x}{x^2 + y}$, c) $\operatorname{sen}(x - y) + \cos(x + y)$, d) xe^{2y}.

Exercício 109. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas no generico ponto (x, y) da função seguinte:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg}(x/y) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Prove que as derivadas primeiras na origem existem (calcule os valores) e que as segundas mistas na origem são diversas.

Exercício 110. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas de

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Diga se as derivadas segundas mistas na origem são iguais.

Exercício 111. Calcule as derivadas parciais primeiras e segundas de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Diga se as derivadas segundas mistas na origem são iguais.

Exercício 112. Procure todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2, que verifiquem, para cada (x, y), a condição $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ para cada (x, y). Entre essas determine aquelas que verifiquem $f(0, y) = \operatorname{sen} y$ e $f(x, 0) = \cos x - 1$.

Exercício 113. Calcule o gradiente e as derivadas parciais segundas no genérico ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ das funções seguintes:

a) $f(x) = \langle x, \overline{x} \rangle$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ fixado.

b) $f(x) = \|x\|^2$.

Exercício 114. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xy - e^x, x \operatorname{sen}(xy))$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = xy - 1$. Calcule a função composta $F = g \circ f$. Calcule as derivadas parciais de F usando seja a sua forma explicita seja a regra da cadeia e compare os resultados obtidos.

Exercício 115. Faça o que foi feito no exercício acima, para os pares de funções seguintes:

1) $f(x, y) = (x, xy)$, $g(x, y) = (xe^y, ye^x)$,

2) $f(x, y) = (x - y, x + y)$, $g(x, y) = xy \cos y$

3) $f(t) = (t + 2, t^2 + t, t^3 - t^2)$, $g(x, y, z) = xy - 2z$

4) $f(x, y) = (x^2 + 2y)$, $g(t) = (te^t, \operatorname{sen} 2t)$

Introdução aos problemas de otimização. Definição de máximo e mínimo (absolutos) de uma função de variável em $\mathbb{R}^n$ e imagem real.

Definição de pontos de máximo e mínimo relativo de uma função de variável em $\mathbb{R}^n$ e imagem real.

Teorema 7 (Weierstrass)**.** ***(sem demonstração)*** *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e fechado. Seja $f : C \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f admite máximo e mínimo absolutos.*

Teorema 8 (Fermat)**.** ***(com demonstração)*** *Sejam D um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função dada. Suponhamos que $\overline{x}$ seja um ponto interior de D, que $\overline{x}$ seja ponto de máximo ou mínimo relativo de f e que f possua derivada direcional $\partial f/\partial v$ no ponto $\overline{x}$ a respeito de uma direção dada v. Então, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}) = 0$.*

Definição de ponto crítico (ou estacionário). Consequência do Teorema de Fermat: dados D um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função derivável em qualquer direção em um ponto dado $\overline{x}$, suponhamos que $\overline{x}$ seja um ponto de máximo ou mínimo relativo de f. Então, $\overline{x}$ é ponto crítico.

Exercício 116. Escreva a definição de ponto crítico de uma função.

Exercício 117. Escreva a definição de ponto crítico de uma função.

Exercício 118. Escreva quais são as três classes de pontos candidatos a serem pontos de máximo ou mínimo relativos de uma função.

Exercício 119. Dê alguns exemplos de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$, de conjuntos fechados de $\mathbb{R}^2$ e de conjuntos de $\mathbb{R}^2$ que não sejam nem abertos nem fechados.

Exercício 120. Dê alguns exemplos de conjuntos de $\mathbb{R}^2$ e de pontos que sejam interiores, e de pontos que pertençam aos conjuntos não sendo interiores.

Exercício 121. Prove o Teorema de Fermat (usando diretamente o análogo resultado para funções de uma variável).

Exercício 122. Determine o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = 2x - y$ no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x + y \leq 3,\ y \geq x\}$. Porque com certeza o máximo e o mínimo de f existem?

Exercício 123. Determine o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no retângulo $[1, 3] \times [2, 4]$. Aborde o problema no retângulo $[1, 3] \times (2, 4)$.

Exercício 124. Determine o único ponto crítico de $x^2 - y^2$. Ele é de máximo ou mínimo relativo? Justifique.

Exercício 125. Determine os pontos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^3 - xy$. A função possui máximo ou mínimo absoluto?

Exercício 126. Considere $f(x, y) = x(1 - x^2 - 4y^2)$ restrita ao conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
a) Prove que f possui máximo e mínimo restrita a E.
b) Calcule o máximo e mínimo e os pontos de máximo e mínimo absolutos.

Exercício 127. Considere $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ restrita ao conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
a) Prove que f possui máximo e mínimo restrita a E.
b) Calcule o máximo e mínimo e os pontos de máximo e mínimo absolutos.

Exercício 128. Escreva uma função que possua máximo absoluto em um ponto onde o gradiente não se anula.

24. Segunda-feira, 17 de novembro de 2014

Exercícios em sala de aula de preparação da prova P2.

25. Quarta-feira, 19 de novembro de 2014

Prova P2

26. Quinta-feira, 20 de novembro de 2014

27. Segunda-feira, 27 de novembro de 2014

28. Quarta-feira, 29 de novembro de 2014

29. Quinta-feira, 30 de novembro de 2014

30. Segunda-feira, I de dezembro de 2014

31. Quarta-feira, 3 de dezembro de 2014

32. Quinta-feira, 4 de dezembro de 2014

Pontos de máximo e mínimo relativo livres. Condições suficientes de segunda ordem.

Vimos no teorema de Fermat que, dada $f : D \to \mathbb{R}$ (onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$), se

(1) $\overline{x}$ é ponto de máximo ou de mínimo relativo de f,
(2) f possui derivadas parciais em $\overline{x}$,
(3) $\overline{x}$ é interior a D,

então $\overline{x}$ é ponto crítico de f. Esta condição de primeira ordem é necessária, mas não suficiente. Em cálculo 1, se $\overline{x}$ é ponto crítico de f, interior a D, para descobrir se é de máximo de mínimo ou de inflexão, podemos usar a derivada segunda da função (se f a possui). Em cálculo de várias variáveis tentamos fazer a mesma coisa.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ dada. Se f admite derivadas parciais segundas em um ponto $x \in D$ escrevemos a matriz seguinte:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}.$$

$H_f(x)$ é chamada *matriz hessiana* de f em x. É uma matriz quadrada $n \times n$ e é simétrica se f for C^2, ou seja com derivadas parciais segundas contínuas em x. *Daqui em diante iremos sempre supor que f seja C^2.*

Exercício 129. Escreva as matrizes hessianas, calculadas em um ponto genrérico (x, y), das funções do exercício 108.

Exercício 130. Escreva as matrizes hessianas, calculadas em um ponto genrérico (x, y, z), das funções seguintes: $x^2 z + \cos(y + z) + e^{xy}, \quad xy^2 + z^3 + \cos x$.

Exercício 131. Escolha alguns pontos específicos dos domínios das funções dos dois exercícios anteriores e calcule as matrizes hessianas naqueles pontos.

Como é usada a matriz hessiana em um ponto crítico de f para estabelecer se ele é de máximo de mínimo relativo ou de inflexão? Precisa primeiramente estudar algumas propriedades das matrizes quadradas. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

uma matriz quadrada, simétrica, qualquer, $n \times n$. Dado $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, a notação Av denota o produto da matriz A pelo vetor coluna v. E o resultado será um vetor de $\mathbb{R}^n$.

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

A notação $\langle Av, v \rangle$ denota o produto escalar de Av e v. Definimos a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(v) = \langle Av, v \rangle$, dita *forma quadrática* associada à matriz A. De fato, se trata de um polinômio de grau 2 nas variáveis $v_1, ..., v_n$. Em detalhes:

$$g(v) = \langle Av, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, v_j\, v_i.$$

Exercício 132. Esolha matrizes 3×3 ou 2×2 e escreva g para estas matrizes. Pode começar com matrizes simples, por exemplos matrizes diagonais.

Exercício 133. Dada uma forma quadrática g associada a uma matriz A qualquer, simétrica, prove que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$,

$$g(tv) = \langle A(tv), tv \rangle = t^2 \langle Av, v \rangle.$$

Definição 9. Dada uma forma quadrática g associada a uma matriz A qualquer, simétrica, dizemos que g é

(1) definida positiva se $g(v) > 0$, para qualquer $v \neq 0$;
(2) definida negativa se $g(v) < 0$, para qualquer $v \neq 0$;
(3) semidefinida positiva se $g(v) \geq 0$, para qualquer v;
(4) semidefinida negativa se $g(v) \leq 0$, para qualquer v;
(5) indefinida se $g(v) > 0$ para alguns v e $g(w) < 0$ para alguns w.

As cinco classes acima podem ser também associadas à matriz A, dizendo que "A é definida postiva se...", "A é definida negativa se...", etc.

Observe que, de fato, a classe 1 acima está contida na classe 3, assim como a classe 2 acima está contida na classe 4.

Exercício 134. Considere as matrizes seguintes e diga a qual das classes acima elas pertencem. (Em geral, se uma matriz não é em forma diagonal, é mais complicado resolver o exercício; e se a dimensão dela é maior de 3×3 pode ser mais complicado.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

O teorema seguinte ajuda a entender quando uma matriz pertence a uma das cinco classes acima.

Teorema 10. ***(com demonstração)*** *Seja A uma matriz quadrada, simétrica, qualquer $n \times n$. Então, A é*

(1) *definida positiva se e somente se todos os autovalores dela são positivos;*
(2) *definida negativa se e somente se todos os autovalores dela são negativos;*
(3) *semidefinida positiva se e somente se todos os autovalores dela são ≥ 0;*
(4) *semidefinida negativa se e somente se todos os autovalores dela são ≤ 0;*
(5) *indefinida se e somente possui autovalores positivos e autovalores negativos.*

Antes de dar a demonstração lembramos que um número real λ é dito *autovalor* de A se existe um vetor não nulo v tal que

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v se chama *autovetor* de A.

Exercício 135. Considere as matrizes diagonais do exercício anterior. Prove que os autovalores delas são os elementos das diagonais principais. Determine autovetores relativos.

Demonstração do teorema. Consideramos a forma quadrática g associada a A. A função g é um polinômio de grau 2 em n variáveis.

Consideramos a função $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(v) = \frac{g(v)}{\|v\|^2} = \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2}.$$

Vamos mostrar que F possui máximo e mínimo absolutos (mesmo não podendo aplicar o teorema de Weierstrass). Se avaliamos F na esfera de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^n$,

$$S = \{v \in \mathbb{R}^n : \ \|v\| = 1\},$$

observamos que S é um conjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}^n$. Portanto, a restrição de F a S possui máximo e mínimo absolutos. Agora, seja $v \in \mathbb{R}^n$ qualquer e não nulo. Seja w o vetor de norma 1 tal que

$$w = \frac{v}{\|v\|}.$$

Temos

$$F(v) = F(\|v\|w) = \frac{\langle A(\|v\|w), \|v\|w \rangle}{\|v\|^2} = \langle Aw, w \rangle = F(w).$$

Portanto, com a possibilidade de F ser avaliada em todos os pontos de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, <u>não</u> vamos ter “novas” imagens, além daquelas obtidas avaliando em S. Isso nos permite dizer que F possui máximo e mínimo absolutos <u>também</u> em todo o domínio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exercício 136. Prove a fórmula acima. Verifique a fórmula acima escolhendo uma matriz 2×2 e fazendo as contas.

Voltando à prova do teorema, como conseguimos provar que F possui máximo e mínimo absolutos em todo seu domínio, os pontos de máximo e mínimo absoluto devem ser pontos críticos de F.

Agora observe que, dada uma direção principal v_j de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(v) = 2\sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k.$$

e que

$$\frac{\partial \|v\|^2}{\partial x_j}(v) = 2v_j.$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(v) = 2\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k - F(v)v_j}{\|v\|^2}.$$

Se $\overline{v}$ é ponto crítico de F, deve ser $\nabla F(\overline{v}) = 0$, ou seja

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\overline{v_k} = F(\overline{v})\overline{v_j}$$

para cada direção principal v_j de $\mathbb{R}^n$. Colocando todas as direções v_j temos portanto

$$A\overline{v} = F(\overline{v})\overline{v}.$$

O resultado acima que acabamos provar pode ser assim resumido:

se $\overline{v}$ é ponto crítico de F, o valor $F(\overline{v})$ é um autovalor de A e portanto o máximo e o mínimo de F devem ser procurados entre os autovalores de A.

Em conclusão, levando em conta que

- F possui máximo e mínimo absolutos,
- o máximo e mínimo absolutos são o maior e o menor autovalor de A,
- o sinal de F coincide com o sinal de g (se $v \neq 0$),

a conclusão da demonstração ou seja, a avaliação dos cinco casos do enunciado, se torna fácil e pode ser deixada como exercício para o leitor $\square$

Exercício 137. Escreva os detalhes da conclusão do argumento acima.

Teorema 11 (condições de segunda ordem para a existência dos pontos de máximo e mínimo relativo)**.** *Seja dada $f : D \to \mathbb{R}$ (onde D é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$) de classe C^2. Seja $\overline{x}$ um ponto crítico de f interior a D. Temos as consequências seguintes:*

(1) *se $H_f(\overline{x})$ é definida positiva, então $\overline{x}$ é ponto de mínimo relativo;*
(2) *se $H_f(\overline{x})$ é definida negativa, então $\overline{x}$ é ponto de máximo relativo;*
(3) *se $H_f(\overline{x})$ é semidefinida positiva, então $\overline{x}$ ou é ponto de mínimo relativo ou é ponto de sela;*
(4) *se $H_f(\overline{x})$ é semidefinida negativa, então $\overline{x}$ ou é ponto de máximo relativo ou é ponto de sela;*
(5) *se $H_f(\overline{x})$ é indefinida, então $\overline{x}$ é ponto de sela.*

Vamos dar uma **ideia da demonstração** só no caso em que $H_f(\overline{x})$ é definida positiva.

Dado um ponto $\overline{x}$ qualquer do domínio, podemos escrever a fórmula de Taylor de segunda ordem de f centrada em $\overline{x}$:

$$f(x) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), x - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})(x - \overline{x}), x - \overline{x}\rangle + r(x)$$

onde $r(x)$ o resto, ou erro, de segunda ordem verifica o limite

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{r(x)}{\|x-\overline{x}\|^2} = 0.$$

Se $\overline{x}$ é de fato ponto crítco, a fórmula acima se torna

$$f(x) = f(\overline{x}) + \frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})(x-\overline{x}), x-\overline{x}\rangle + r(x)$$

Para provar que $\overline{x}$ é ponto de mínimo relativo basta mostrar que

$$+\frac{1}{2}\langle H_f(\overline{x})(x-\overline{x}), x-\overline{x}\rangle + r(x) \geq 0$$

em uma oportuna região em torno de $\overline{x}$. Ou que, equivalentemente,

$$+\frac{1}{2}\frac{\langle H_f(\overline{x})(x-\overline{x}), x-\overline{x}\rangle}{\|x-\overline{x}\|^2} + \frac{r(x)}{\|x-\overline{x}\|^2} \geq 0$$

se x é próximo de $\overline{x}$ e $x \neq \overline{x}$. Vamos dar uma ideia disso, sem aprofundar os detalhes. Lembrando o exercício 133, temos

$$\frac{\langle H_f(\overline{x})(x-\overline{x}), x-\overline{x}\rangle}{\|x-\overline{x}\|^2} = \left\langle H_f(\overline{x})\frac{x-\overline{x}}{\|x-\overline{x}\|}, \frac{x-\overline{x}}{\|x-\overline{x}\|}\right\rangle.$$

Sabemos que o valor acima é sempre positivo (sendo $H_f(\overline{x})$ definida positiva). Como $(x-\overline{x})\|x-\overline{x}\|$ pertence a esfera de centro na origem e raio 1, que é um conjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^n$, podemos aplicar o teorema de Weierstrass e obter que

$$\left\langle H_f(\overline{x})\frac{x-\overline{x}}{\|x-\overline{x}\|}, \frac{x-\overline{x}}{\|x-\overline{x}\|}\right\rangle$$

possui mínimo (absoluto) positivo m. Portanto,

$$+\frac{1}{2}\frac{\langle H_f(\overline{x})(x-\overline{x}), x-\overline{x}\rangle}{\|x-\overline{x}\|^2} \geq \frac{m}{2} \qquad \forall x \neq \overline{x}.$$

Sendo

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{r(x)}{\|x-\overline{x}\|^2} = 0,$$

em uma oportuna vizinhança U de $\overline{x}$ teremos $|r(x)|/\|x-\overline{x}\|^2 \leq m/2$. isso prova que $\overline{x}$ é ponto de mínimo relativo. □

Juntando os dois últimos teoremas temos imediatamente o corolário seguinte.

Corolário 12. *Sejam f e $\overline{x}$ como no teorema* **??**. *Temos que:*

(1) *se os autovalores de $H_f(\overline{x})$ são positivos, então $\overline{x}$ é ponto de mínimo relativo;*
(2) *se os autovalores de $H_f(\overline{x})$ são negativos, então $\overline{x}$ é ponto de máximo relativo;*
(3) *se os autovalores de $H_f(\overline{x})$ são ≥ 0, então $\overline{x}$ ou é ponto de mínimo relativo ou é ponto de sela;*
(4) *se os autovalores de $H_f(\overline{x})$ são ≤ 0, então $\overline{x}$ ou é ponto de máximo relativo ou é ponto de sela;*
(5) *se $H_f(\overline{x})$ possui autovalores positivos e autovalores negativos, então $\overline{x}$ é ponto de sela.*

O problema se torna agora descobrir o sinal dos autovalores de $H_f(\overline{x})$.

Da geometria sabemos que os autovalores de uma matriz A são as raizes do polinômio

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

que é um polinômio de grau n na variável λ e é chamado *polinômio característico* de A. Podemos estabelecer os fatos seguintes, provados em sala de aula, que vou deixar aqui como exercícios.

Exercício 138. Dada uma equação polinomial de grau 2, $\lambda^2+a\lambda+b=0$, suponha que as soluções sejam reais. Prove que:

(1) as soluções são negativas se e somente se $a>0$ e $b>0$,
(2) as soluções são positivas se e somente se $a<0$ e $b>0$,
(3) as soluções são uma positiva e uma negativa se e somente se $b<0$.

Exercício 139. Prove que o polinômio característico de uma matriz A, 2×2, simétrica é do tipo $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$ onde $a=-(a_{11}+a_{22})$ e $b=\det A$.

Exercício 140. Observe que, se $\det A>0$, então a_{11} e a_{22} têm o mesmo sinal.

Exercício 141. (*Critério para pontos de máximo e mínimo relativos em 2 variáveis*). Junte os argumentos dos exercícios acima e verifique que: dados f C^2 e $(\overline{x},\overline{y})$ ponto crítico interior,

(1) se $\det H_f(\overline{x})>0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{y})>0$ (ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})>0$), então $(\overline{x},\overline{y})$ é ponto de mínimo relativo;
(2) se $\det H_f(\overline{x})>0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{y})<0$ (ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})<0$), então $(\overline{x},\overline{y})$ é ponto de máximo relativo;
(3) se $\det H_f(\overline{x})<0$, então $(\overline{x},\overline{y})$ é ponto de sela;
(4) se $\det H_f(\overline{x})=0$, então $H_f(\overline{x})$ é semidefinida.

Exercício 142. Em dimensão 3. Dada uma equação polinomial de grau 3, $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0$, suponha que as soluções sejam reais. Prove que:

(1) as soluções são negativas se e somente se $a>0$, $b>0$ e $c>0$,
(2) as soluções são positivas se e somente se $a<0$, $b>0$ e $c<0$.

Exercício 143. Observe que para obter informações análogas ao caso em duas variáveis, devemos levar em conta que o polinômio característico de uma matriz A, 3×3, simétrica é do tipo $P(\lambda)=-\lambda^3+...$ etc. Portanto o polinômio $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c$ é obtido multiplicando por -1 o polinômio característico.

Exercício 144. Determine os pontos de máximo e mínimo relativo, se existem, das funções seguintes:
1) $x^2+2y^2+z^2+xy-xz$,
2) $x^2+y^4+z^2+y^2-2xz$

Exercício 145. Considere uma equação de grau n, $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0$. Suponhamos que tenha só soluções reais. Prove que as soluções são todas negativas se e somente se todos os coeficientes a_i são positivos, enquanto todas as soluções são positivas se e somente se os coeficientes são alternativamente positivos e negativos.

Exercício 146. Determine os pontos de máximo e mínimo relativo, se existem, das funções seguintes:

$f(x,y)=x-x^2-y^2$
$f(x,y)=xy(x-1)$
$f(x,y)=x^3+x-4xy-2y^2$
$f(x,y)=x(y+1)-x^2y$
$f(x,y)=x(x+y)e^{y-x}$
$f(x,y)=\cos(x+y)+\cos(x-y)$
$f(x,y,z)=x^2+y^3+z^2-xy-xz$
$f(x,y,z)=x^2+y^4+y^2+z^3-2xz$

$f(x,y,z,w) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2w^2 + yz - 2xw$

Exercício 147. Seja $f(x,y) = 3 + (y-x)^2 - y^2 \operatorname{sen}^2 x$. Verifique que $(0,0)$ é ponto crítico e tente ver se é ponto de máximo e mínimo relativo ou de sela.

Exercício 148. Determine os pontos de máximo e mínimo relativo, se existem, das funções seguintes:

$x^2(x-y)$

$(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$\cos x + \sinh y$

$|y-1|(2-y-x^2)$

$x^2 \log(1+y) + x^2y^2.$

$x^2(y-1)^3(x+2)^2$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$

Exercício 149. Determine a mínima distância entre as duas retas em $\mathbb{R}^3$ escritas em termos de interseção de planos

$$x - 1 = (y-2)/3 = (z-2)/2 \qquad \text{e} \qquad x/4 = y = z/2.$$

Sugestão: a primeira reta é representada como conjunto de pontos cujas coordenadas verificam $x-1 = (y-2)/3 = (z-2)/2$. Porque é uma reta? Se o conjunto de pontos deve verificar $x-1 = (y-2)/3 = (z-2)/2$, então deve verificar seja $x-1 = (y-2)/3$ seja $(y-2)/3 = (z-2)/2$. As duas são equações de dois planos. Portanto estamos falando da interseção de dois plano. Agora a sugestão é de escrever esta reta em forma vetorial e portanto dependente de uma variável. Fazendo o mesmo com a outra reta, a distância que o exercício pede minimizar será uma função de duas variáveis, i.e., os dois parámetros.

Exercício 150.

Exercício 151.