PROVA III DE CÁLCULO III - MAT 0216
TURMA 2018121-IF-USP
2018.1

INICIAL:	**NÚMERO USP:**

QUESTÃO	**RESPOSTAS**
I.	a. b.
II.	a. b. c.
III.	a. b.
IV.	a. b.
V.	a. b. c.

(USO EXCLUSIVO DO PROFESSOR RESPONSÁVEL)

QUESTÃO	**COMENTÁRIO**	**NOTA**
I.		
II.		
III.		
IV.		
V.		
NOTA P3 :		

REGULAMENTO DA PROVA

- *Os pertences devem ser guardados abaixo da carteira.*
- *Na folha de rosto coloque somente o inicial do primeiro nome e o número USP. Qualquer outra identificação é proibida.*
- *Para fazer as contas da prova não é necessário o uso de uma calculadora.*
- *A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.*
- *Se necessário, utilize o verso das folhas enumerando as questões.*
- *As suas respostas devem ser transcritas na folha de rosto no lugar indicado para cada questão.*
- *Não utilize o espaço na folha de rosto reservado para o professor responsável.*
- *Justifique todas as afirmações usando apenas a teoria ensinada em sala de aula.*
- Afirmações e respostas não provadas, ou devidamente justificadas, não serão pontuadas.
- *É permitida a entrada na sala de aula para fazer a prova o aluno que chegar com atraso de no máximo 40 minutos após o início da prova.*
- *A prova é individual e tem a duração de duas horas.*
- *É permitido entregar a prova apenas uma hora após do início da mesma.*
- *Para ir ao banheiro é necessário obter permissão.*
- *Após o primeiro aluno sair não será mais permitido ir ao banheiro.*
- *A folha cola não pode ser destacada da prova.*
- *A prova é um relatório que outra pessoa lerá; portanto, escreva legível, use argumentos completos, faça as contas na prova e seja organizado.*
- *É proibido o uso de teorias e / ou métodos de resolução que não fazem parte da ementa do curso ou que ainda não foram ensinados pelo professor responsável. A questão que for resolvido fazendo uso destas não será pontuada.*
- *Cada questão vale 2 pontos se resolvida de forma correta.*
- *Todas as afirmações devem ser justificadas com resultados dados em sala de aula ou devem ser provadas na prova. Respostas tipo "sim" e "não" serão consideradas erradas se não vierem acompanhadas de argumentação lógica e cálculos que as corroboram.*
- *A folha cola individual está proibida. Se uma for detectada a sua prova será anulada.*
- *O seu celular deve permanecer desligado durante toda a prova.*

FELIZ TESTE

FOLHA COLA

Coordenadas Polares:

$\varphi: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(\rho, \theta) = (\rho cos(\theta), \rho sen(\theta))$

Coordenadas Esféricas:

$$x = \rho\cos(\theta) sen(\varphi)$$
$$y = \rho sen(\theta) sen(\varphi)$$
$$z = \rho\cos(\varphi)$$

Integral repetida:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

uma formula parecida existe para integrais triplas.

Integrais de linha e de superfície

Campo escalar $\int_\gamma f d\gamma \ := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \| \ \gamma'(t) \ \| \ dt$

$$\boldsymbol{Massa} \ de \ \gamma = \int_\gamma \rho d\gamma = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \cdot \| \ \gamma'(t) \ \| \ dt$$

Trabalho $W = \int_a^b \langle \vec{F} | \vec{e} \rangle \, ds = \int_a^b \langle \vec{F} \circ \gamma(t) \mid \gamma'(t) \rangle \, dt$

Fluxo $\int_a^b \langle \vec{F} | \vec{n} \rangle \, ds = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)) | J(\gamma'(t)) \rangle \, dt$

Integrais de superfície

$$Área(S) = \iint_S dS = \iint_\Omega \| \ \psi_u \times \psi_v \ \| \, dudv =$$

$$Fluxo = \iint_{\Omega_0} \langle \ \vec{F} \circ \psi \mid \psi_u \times \psi_v \ \rangle dudv$$

$$\iint_S f dS = \iint_{\Omega_0} f \circ \psi \, (u,v) \cdot \| \ \psi_u \times \psi_v \ \| \ dudv$$

Teorema de Stokes e Gauss no Plano

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_{Int(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\int_\gamma \langle \vec{F}(\gamma(t)) | \vec{N} \rangle d\gamma = \iint_{Int(\gamma)} \left(Div(\vec{F}) \right) dxdy$$

Teorema de Stokes e Gauss no Espaço

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F | N \rangle dS = \iiint_\Omega div(F) dxdydz$$

$$\int_{\partial S} F d\Gamma = \int_{\partial S} \left\langle F \middle| \frac{\Gamma'}{\|\Gamma'\|} \right\rangle d\Gamma = \iint_S \langle rot(F) | N \rangle dS$$

Equações diferenciais e Fator Integrante

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = 0$$

Jacobina: A jacobina é o determinante da matriz Jacobiana. A última é a matriz cuja colunas são a derivada em relação às variáveis independentes das funções coordenadas da função dada.

I. O centro de massa de uma região do plano é dado pela formula

$$\frac{1}{A}\left(\iint_{\Omega} x dx dy\,, \iint_{\Omega} y dx dy\right)$$

onde

$$A = \iint_{\Omega} dx dy$$

Considere o circulo γ: $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ e o campo

$$F(x,y) = (3x^2y^2, 2x^2(1+xy))$$

a. Qual o centro de massa de $Int(\gamma)$? Justifique!
b. Calcule a

$$\oint_{\gamma} F d\gamma$$

II. Um chapéu de Saci em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície S de classe C^2 S tal que $\partial(S)$ é uma curva de Jordan contida num plano π, $\big(S - \partial(S)\big) \cap \pi = \emptyset$, e tal que $Int((\partial(S) \cap \pi)) \cup S$ seja uma superfície compacta. O volume deste chapéu de Saci é definido como sendo o volume desta superfície compacta.

(a) **(1 ponto)** Sejam $F(x, y, z) = (2x - y + z, x + y - z, 3x + 5y + z)$, π o plano$-xy$, S um chapéu de Saci de volume 3 e ∂S uma circunferência de raio 2. Qual o fluxo do campo pelo chapéu?

(b) **(0,5 ponto)** É possível reposicionar a $\partial(S)$ do chapéu no plano π de forma que o fluxo por S seja zero?

(c) **(0,5 ponto)** Explicite, se possível, um tal posicionamento da $\partial(S)$, dado pelo item anterior.

III. Considere o campo

$$F(x,y) = (-(x^2y + 3x - 2y), 4y^2x - 2x)$$

e uma curva de Jordan γ, qualquer. Seja

$$V(\gamma) = \oint_\gamma F d\gamma$$

a. **(1,3 ponto)** Existe uma curva γ_0 tal que $V(\gamma_0) \leq V(\gamma)$?
b. **(0,7 ponto)** Qual o valor de $V(\gamma_0)$?

IV. Considere a função $y(x) = x(x-4),\ \ x \in [0,4]$ e seja γ a curva que é a união do gráfico desta função e do segmento de reta $[0,4]$.

a. Calcule a área de $Int(\gamma)$.

b. Calcule a

$$\frac{1}{2}\oint_{\gamma} [-2y + sen(x + \cos(x))]dx + [2x + \ln(2 + sen(y) + e^{-\cos(y)}]dy$$

V. Considere a equação

$$-ydx + xdy = 0$$

a. Ela é exata?
b. Ela tem um fator integrante?
c. Considerando a resposta do item b., é possível explicitar uma solução da equação? No caso afirmativo, explicite uma tal solução.

FOLHA EXTRA