

PROVA REC DE CÁLCULO III - MAT 0216
TURMA 2018121-IF-USP
2018.1

INICIAL:	NÚMERO USP:
QUESTÃO	RESPOSTAS
I.	a. b.
II.	a. b. c.
III.	a. b.
IV.	a. b. c.
V.	a. b.

(USO EXCLUSIVO DO PROFESSOR RESPONSÁVEL)

QUESTÃO	COMENTÁRIO	NOTA
I.		
II.		
III.		
IV.		
V.		
NOTA REC :		

REGULAMENTO DA PROVA

- *Os pertences devem ser guardados abaixo da carteira.*
- *Na folha de rosto coloque somente o inicial do primeiro nome e o número USP. Qualquer outra identificação é proibida.*
- *Para fazer as contas da prova não é necessário o uso de uma calculadora.*
- *A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.*
- *Se necessário, utilize o verso das folhas enumerando as questões.*
- *As suas respostas devem ser transcritas na folha de rosto no lugar indicado para cada questão.*
- *Não utilize o espaço na folha de rosto reservado para o professor responsável.*
- *Justifique todas as afirmações usando apenas a teoria ensinada em sala de aula.*
- *Afirmações e respostas não provadas, ou devidamente justificadas, não serão consideradas.*
- *É permitida a entrada na sala de aula para fazer a prova o aluno que chegar com atraso de no máximo 40 minutos após o início da prova.*
- *A duração da prova é de duas horas sendo ela individual.*
- *É permitido sair apenas uma hora após do início da prova.*
- *Para ir ao banheiro é necessário obter permissão.*
- *Após o primeiro aluno sair não será mais permitido ir ao banheiro.*
- *A folha cola não deve ser entregue junto com a prova.*
- *A prova é um relatório que outra pessoa lerá; portanto escreva legível, use argumentos completos, faça as contas na prova e seja organizado.*
- *É proibido o uso de teorias e / ou métodos de resolução que não fazem parte da ementa do curso ou que ainda não foram ensinados pelo professor responsável. A questão que for resolvido fazendo uso destes não será pontuada.*
- *Cada questão vale 2 pontos se resolvida de forma correta.*
- *Todas as afirmações devem ser justificadas com resultados dados em sala de aula ou devem ser provadas na prova. Respostas tipo “sim” e “não” serão consideradas erradas se não vierem acompanhadas de argumentação lógica e cálculos que as corroboram.*
- *A folha cola individual está proibida. Se for detectada a sua prova será anulada.*
- *O seu celular deve permanecer desligado durante toda a prova.*
- *As folhas cola anexas não podem ser destacadas da prova.*

FELIZ TESTE

FOLHA COLA I

Coordenadas Polares:

$$\varphi: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\y &= \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\z &= \rho \cos(\varphi)\end{aligned}$$

Integral repetida:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

uma formula parecida existe para integrais triplas.

Integrais de linha e de superfície

Campo escalar $\int_{\gamma} f d\gamma := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$

$$\text{Massa de } \gamma = \int_{\gamma} \rho d\gamma = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

Trabalho $W = \int_a^b \langle \vec{F} | \vec{e} \rangle ds = \int_a^b \langle \vec{F} \circ \gamma(t) | \gamma'(t) \rangle dt$

Fluxo $\int_a^b \langle \vec{F} | \vec{n} \rangle ds = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)) | J(\gamma'(t)) \rangle dt$

Integrais de superfície

$$\text{Área}(S) = \iint_S dS = \iint_{\Omega} \|\psi_u \times \psi_v\| du dv =$$

$$\text{Fluxo} = \iint_{\Omega_0} \langle \vec{F} \circ \psi | \psi_u \times \psi_v \rangle du dv$$

$$\iint_S f dS = \iint_{\Omega_0} f \circ \psi(u, v) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| du dv$$

Equação homogênea:

$$\begin{aligned}a\lambda^2 + b\lambda + c &= 0 \\ ay'' + by' + cy &= 0\end{aligned}$$

Solução particular:

$$y_p = f(x) \cos(x) + g(x) \sin(x)$$

$$\begin{cases} f' = \frac{-\varphi_2 F}{aW} \\ g' = \frac{\varphi_1 F}{aW} \end{cases}$$

Equação linear de primeira ordem: $y' + p(x)y = f(x)$

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \cdot \left[c + \int (f(x) e^{\int p(x) dx}) dx \right], c \in \mathbb{R} \text{ uma constante.}$$

Jacobina: A jacobina é o determinante da matriz Jacobiana. A última é a matriz cuja colunas são a derivada em relação às variáveis independentes das funções coordenadas da função dada.

FOLHA COLA II

Coordenadas Polares:

$$\varphi: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$

Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= \rho \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Integral repetida:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

uma formula parecida existe para integrais triplas.

Integrais de linha e de superfície

Campo escalar $\int_{\gamma} f d\gamma := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$

$$\text{Massa de } \gamma = \int_{\gamma} \rho d\gamma = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

Trabalho $W = \int_a^b \langle \vec{F} | \vec{e} \rangle ds = \int_a^b \langle \vec{F} \circ \gamma(t) | \gamma'(t) \rangle dt$

Fluxo $\int_a^b \langle \vec{F} | \vec{n} \rangle ds = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)) | J(\gamma'(t)) \rangle dt$

Integrais de superfície

$$\text{Área}(S) = \iint_S dS = \iint_{\Omega} \|\psi_u \times \psi_v\| du dv =$$

$$\text{Fluxo} = \iint_{\Omega_0} \langle \vec{F} \circ \psi | \psi_u \times \psi_v \rangle du dv$$

$$\iint_S f dS = \iint_{\Omega_0} f \circ \psi(u, v) \cdot \|\psi_u \times \psi_v\| du dv$$

Teorema de Stokes e Gauss no Plano

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{Int(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}(\gamma(t)) | \vec{N} \rangle d\gamma = \iint_{Int(\gamma)} (Div(\vec{F})) dx dy$$

Teorema de Stokes e Gauss no Espaço

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \langle F | N \rangle dS &= \iiint_{\Omega} div(F) dx dy dz \\ \int_{\partial S} F d\Gamma &= \int_{\partial S} \left\langle F \left| \frac{\Gamma'}{\|\Gamma'\|} \right\rangle d\Gamma = \iint_S \langle rot(F) | N \rangle dS \end{aligned}$$

Equações diferenciais e Fator Integrante

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = 0$$

I. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função dada por $T(x, y) = (2x + y, -5x + 3y)$ e seja Ω o triângulo formado pelos pontos $(3, 2)$, $(7, 4)$, $(1, 5)$.

- a) **(1 ponto)** A função T é uma transformação linear?
- b) **(1 ponto)** Qual o valor da área de $T(\Omega)$, a imagem de Ω pela T ?

II. Considere a parametrização $\psi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e $p_0 := (3, -4, 5)$.

- a. **(1 ponto)** A parametrização determina uma superfície regular?
- b. **(0,5 ponto)** Determine uma equação vetorial da reta normal à superfície no ponto p_0 .
- c. **(0,5 ponto)** Determine uma equação cartesiana do plano tangente à superfície no ponto p_0 .

III. Considere o campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e a superfície $S: z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$ com densidade de massa igual a 3

- a. **(0,5 ponto)** Qual o valor da massa do fluxo do campo pela região limitada pela intersecção de S e o plano- xy ?
- b. **(1,5 ponto)** Qual o valor da massa do fluxo do campo por S .

IV. Um chapéu de Saci em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície S de classe C^2 tal que $\partial(S)$ é uma curva de Jordan contida num plano π , $(S - \partial(S)) \cap \pi = \emptyset$, e tal que $\text{Int}((\partial(S) \cap \pi)) \cup S$ seja uma superfície compacta. O volume deste chapéu de Saci é definido como sendo o volume desta superfície compacta.

- (a) **(1 ponto)** Sejam $F(x, y, z) = (2x - y + z, x + y - z, 3x + 5y + z)$, π o plano xy , S um chapéu de Saci de volume 3 e ∂S uma circunferência de raio 2. Qual o fluxo do campo pelo chapéu?
- (b) **(0,5 ponto)** É possível reposicionar a $\partial(S)$ do chapéu no plano π de forma que o fluxo por S seja zero?
- (c) **(0,5 ponto)** Explícite, se possível, um tal posicionamento da $\partial(S)$, dado pelo item anterior.

V. Considere a função $y(x) = x(x - 4)$, $x \in [0, 4]$ e seja γ a curva que é a união do gráfico desta função e do segmento de reta $[0, 4]$.

- Calcule a área de $Int(\gamma)$.
- Calcule a

$$\frac{1}{2} \oint_{\gamma} [-2y + \sin(x + \cos(x))] dx + [2x + \ln(2 + \sin(y)) + e^{-\cos(y)}] dy$$

FOLHA EXTRA